基于改进的优势关系下的不完备区间值信息系统评估模型

王 斌 邵明文 王金鹤 张俊虎
（青岛理工大学计算机工程学院 青岛 266033）

摘 要 优势粗糙集方法是研究不完备区间值信息系统的一种重要方法。针对当前不完备区间值信息系统研究中存在的问题，提出了两种新的优势关系，即上限优势关系和近似优势关系。在此基础上，研究了对象评估和不确定性度量问题，给出了不同优势关系间的区别与联系，最后利用具体算例加以说明。

关键词 优势粗糙集方法，不完备区间值信息系统，优势关系，对象排序，不确定性度量

中图法分类号 TP18 **文献标识码** A

New Evaluation Model for Incomplete Interval-valued Information System Based on Improved Dominance Relations

WANG Bin SHAO Ming-wen WANG Jin-he ZHANG Jun-hu
(School of Computer Engineering of Qingdao Technological University, Qingdao 266033, China)

Abstract Dominance-based rough set approach is an important method to study incomplete interval-valued information systems. To solve outstanding problems in incomplete interval-valued information systems, we proposed two new dominant relations—the upper-limit dominance relation and the similarity dominance relation. Based on these two relations, we studied object ranking and uncertainty measurement, and showed the difference and relationship between the two proposed dominance relations. Examples were provided to substantiate the proposed concept.

Keywords Dominance-based rough set approach, Incomplete interval-valued information system, Dominance relation, Object ordering, Uncertainty measure

1 引言

Pawlak提出的粗糙集理论[1-6]推广了经典的集合论，它使得利用不充分或模糊的信息来研究智能系统成为可能。目前，粗糙集理论已广泛应用于决策分析、数据挖掘、知识发现、模式识别、冲突分析等领域[7-12]。然而，在研究一些诸如债务比率、产品质量、市场份额等具有偏序特性的问题时却遇到了困难。为此，Greco等拓展了粗糙集方法，提出了优势粗糙集方法（Dominance-based Rough Set Approch，简记为DRSA）[13-19]，上述方法主要研究了在信息完备的条件下，对象间的关系、性质及属性约简、算法等问题。

但在现实中，人们在进行决策时，遇到的往往是信息不充分的情况，如何在信息不完备的条件下进行正确的决策是一个十分重要且有意义的问题。近年来，关于不完备信息系统（Incomplete Information System）的研究已经取得了很多重要成果[20-27]，如Kryszkiewicz等提出了基于容差（tolerance）关系的粗糙集概念[28,29]；Stefanowski等提出了相似关系的概念[30,31]；Greco等提出的DRSA用优势关系替代等价关系进行研究[17-19]；邵明文等进一步在不完备序信息系统中推广了优势关系的概念[32]；钱宇华[33]等将优势关系应用于区间值信息系统，给出了基于DRSA的区间值信息系统的属性约简及对象排序方法；杨习贝[34]等将DRSA应用于不完备区间值信息系统，通过数据补充将不完备区间值信息系统转化为完备的区间值信息系统，给出了属性约简和优化决策规则的产生办法。

本文在上述工作的基础上，针对不完备区间值信息系统提出了两种新的优势关系，即上限优势关系以及近似优势关系，在此基础上，研究了对象评估和不确定性度量问题，给出了不同优势关系间的区别与联系，并使用具体算例加以说明。

2 区间值信息系统上的优势关系

一个区间值信息系统（Interval-valued Information System，简记为IIS）是一个四元组 $S=(U,AT,V,f)$，其中 U 是一个非空有限的对象集，称为论域；AT 是一个非空有限的属性集；$V=\bigcup_{a\in AT}V_a$，V_a 表示属性 a 的取值范围，它是一个区间数，$\forall x\in U$，$\forall a\in AT$，$a(x)=[a^L(x),a^U(x)]$；$a^L(x),a^U(x)\in R$ 且 $a^L(x)\leqslant a^U(x)$，它们分别被称为区间数 $a(x)$ 的下限和上限；$f:U\times AT\rightarrow V$，为满足 $f(x,a)=a(x)\in V_a$，$a\in AT$，$x\in U$ 的所有函数。当 $a^L(x)=a^U(x)$ 时，$a(x)$ 退化为一个实数，此时，将单值信息系统看作区间值信息系统的一个特例。

到稿日期：2013-04-28 返修日期：2013-08-30 本文受国家自然科学基金（61173181）资助。

王 斌（1963－），男，教授，硕士生导师，主要研究方向为知识发现、博弈论及应用，E-mail：wb769@sina.com；**邵明文**（1973－），男，教授，硕士生导师，主要研究方向为知识发现、粗糙集理论、形式概念分析；**王金鹤**（1963－），男，博士，教授，主要研究方向为机器视觉、模式识别与智能系统、生物信息工程和数据处理；**张俊虎**（1974－），男，博士，副教授，主要研究方向为无线传感器网络、分布式数据库、网络技术。

Greco 等提出的 DRSA 通过研究属性(准则)的偏序域,构造$\geqslant_a$为U的弱偏序关系(outranking),它表示对象集关于准则$a(a\in AT)$的一种偏好,$x\geqslant_a y$表示关于准则a,x至少和y一样好,定义$x\geqslant_A y\Leftrightarrow \forall a\in A, x\geqslant_a y$,它表示对于$A$中的所有属性,$x$至少和$y$一样好。Dembczyn 等[10,11]提出了一种优势关系的定义,$D(A)=\{(x,y)\in U\times U: \forall a\in A, a^U(x)\geqslant a^L(y)\}$,这种定义过于宽泛,例如$a(x)=[1,6]$,$a(y)=[3,7]$,$a(x)$优于$a(y)$,同时也有$a(y)$优于$a(x)$。因此,本文重新定义如下优势关系:

定义 1 设$S=(U,AT,V,f)$是一个 IIS,$A\in AT$,称$D_A^{\geqslant}=\{(x,y)\in U\times U: \forall a\in A, a^U(x)\geqslant a^U(y)\}$为关于$A$的上限优势关系,简称为$A$的优势关系;类似地可定义$A$的上限劣势关系为$D_A^{\leqslant}=\{(x,y)\in U\times U: \forall a\in A, a^U(x)\leqslant a^U(y)\}$,简称为$A$的劣势关系。

由定义 1,很容易可以得到以下性质:

性质 1 设$S=(U,AT,V,f)$是一个 IIS,$A\subset AT$,则$D_A^{\geqslant}=\bigcap_{a\in A}D_{\{a\}}^{\geqslant}$,$D_A^{\leqslant}=\bigcap_{a\in A}D_{\{a\}}^{\leqslant}$。

定义 2 设$S=(U,AT,V,f)$是一个 IIS,$A\subset AT$,对象x关于属性集A的优势类定义为

$[x]_A^{\geqslant}=\{y\in U:(y,x)\in D_A^{\geqslant}\}$;

类似地可定义A的劣势类为

$[x]_A^{\leqslant}=\{y\in U:(y,x)\in D_A^{\leqslant}\}$。

3 不完备区间值信息系统(IIIS)

不完备区间值信息系统是指含有部分未知的属性值的信息系统,本文认为未知的属性值只是被“遗漏”的,而它们是确实存在的。我们仍将 IIIS 表示为$S=(U,AT,V,f)$,其中$V=\bigcup_{a\in AT}V_a\cup\{*\}$,特殊符号“$*$”表示未知的属性值,共有 3 种未知区间值的形式,$a(x)=[a^L(x),*]$,$a(x)=[*,a^U(x)]$,$a(x)=[*^L,*^U]$,$\forall x\in U,\forall a\in AT$。解决 IIIS 问题的前提是恰当地处理不完备信息。文献[34]提出了对“$*$”值进行处理的方法,其规定如下:

(1)若$a(x)=[a^L(x),*]$,取$*=\max\limits_{x\in U}\{a^U(x)\}$;

(2)若$a(x)=[*,a^U(x)]$,取$*=\min\limits_{x\in U}\{a^L(x)\}$;

(3)若$a(x)=[*^L,*^U]$,取$*^L=\min\limits_{x\in U}\{a^L(x)\}$,$*^U=\max\limits_{x\in U}\{a^U(x)\}$。

但这种转换方法在一些情况下与事实不符。例如,某 IIIS 中有 3 个对象在属性a上的值为$a(x_1)=[60,70]$,$a(x_2)=[70,80]$,$a(x_3)=[*,50]$,则按上述转换规则得$*=60$,显然$a(x_3)=[60,50]$与事实不符。为此,本文做如下改进:

(1)若$a(x)=[a^L(x),*]$,取$*=\max\{a^L(x),\max\limits_{x\in U}\{a^U(x)\}\}$;

(2)若$a(x)=[*,a^U(x)]$,取$*=\min\{a^U(x),\min\limits_{x\in U}\{a^L(x)\}\}$;

(3)若$a(x)=[*^L,*^U]$,取$*^L=\min\limits_{x\in U}\{a^L(x)\}$,$*^U=\max\limits_{x\in U}\{a^U(x)\}$。

使用上述改进的方法,可以将 IIIS 转换为完备的 IIS,我们称之为 IIIS 的完备化。由优势关系$D_A^{\geqslant}$和$D(A)$的定义,易得如下性质:

性质 2 设$S=(U,AT,V,f)$是一个 IIS,$A\subset AT$,则

(1)$D_A^{\geqslant}$和$D_A^{\leqslant}$是自反的、传递的,不一定是对称的;

(2)$D(A)$是自反的,不一定是传递的、对称的;

(3)$D_A^{\geqslant}\subseteq D(A)$,反之不然。

例 1 表 1 给出了一个 IIIS[35],论域为$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_{10}\}$,属性集为$AT=\{a_1,\cdots,a_5\}$。

利用本文给出的方法,可以将其转换为完备的 IIIS,见表 2。

表 1 IIIS

U	a1	a2	a3	a4	a5
x1	[2.17,2.86]	[2.45,*]	[5.32,7.23]	[3.21,3.95]	[2.54,3.12]
x2	[3.37,4.75]	[3.43,4.85]	[7.24,10.47]	[4.00,5.77]	[3.24,4.70]
x3	[1.83,2.70]	[1.78,2.98]	[7.23,10.27]	[2.96,4.07]	[2.06,2.79]
x4	[1.35,2.12]	[1.42,2.09]	[*,3.93]	[1.87,2.62]	[1.67,2.32]
x5	[*,*]	[3.37,5.11]	[6.37,10.28]	[3.76,5.70]	[*,5.28]
x6	[2.29,3.43]	[2.60,*]	[6.71,8.81]	[*,*]	[3.01,3.84]
x7	[2.22,3.07]	[2.43,3.32]	[4.37,*]	[2.66,3.68]	[2.39,3.20]
x8	[2.51,4.04]	[2.52,4.12]	[7.12,11.26]	[4.44,6.91]	[3.06,4.65]
x9	[1.24,*]	[1.35,1.91]	[3.83,4.28]	[2.13,3.01]	[1.72,2.34]
x10	[1.00,1.72]	[1.10,1.82]	[3.58,5.65]	[1.67,2.53]	[1.10,1.84]

表 2 完备化的 IIIS

U	a1	a2	a3	a4	a5
x1	[2.17,2.86]	[2.45,5.11]	[5.32,7.23]	[3.21,3.95]	[2.54,3.12]
x2	[3.37,4.75]	[3.43,4.85]	[7.24,10.47]	[4.00,5.77]	[3.24,4.70]
x3	[1.83,2.70]	[1.78,2.98]	[7.23,10.27]	[2.96,4.07]	[2.06,2.79]
x4	[1.35,2.12]	[1.42,2.09]	[3.58,3.93]	[1.87,2.62]	[1.67,2.32]
x5	[1.00,4.75]	[3.37,5.11]	[6.37,10.28]	[3.76,5.70]	[1.10,5.28]
x6	[2.29,3.43]	[2.60,5.11]	[6.71,8.81]	[1.67,6.91]	[3.01,3.84]
x7	[2.22,3.07]	[2.43,3.32]	[4.37,11.26]	[2.66,3.68]	[2.39,3.20]
x8	[2.51,4.04]	[2.52,4.12]	[7.12,11.26]	[4.44,6.91]	[3.06,4.65]
x9	[1.24,4.75]	[1.35,1.91]	[3.83,4.28]	[2.13,3.01]	[1.72,2.34]
x10	[1.00,1.72]	[1.10,1.82]	[3.58,5.65]	[1.67,2.53]	[1.10,1.84]

由表 2 可以得到 AT 上的优势关系$D_A^{\geqslant}$。

$$D_{AT}^{\geqslant}=\{(x_1,x_1),(x_1,x_4),(x_1,x_{10}),(x_2,x_2),(x_2,x_3),(x_2,x_4),(x_2,x_9),(x_2,x_{10}),(x_3,x_3),(x_3,x_4),(x_3,x_{10}),(x_4,x_4),(x_5,x_1),(x_5,x_3),(x_5,x_4),(x_5,x_5),(x_5,x_9),(x_5,x_{10}),(x_6,x_1),(x_6,x_4),(x_6,x_6),(x_6,x_{10}),(x_7,x_4),(x_7,x_7),(x_7,x_{10}),(x_8,x_3),(x_8,x_4),(x_8,x_7),(x_8,x_8),(x_9,x_9),(x_{10},x_{10})\}。$$

4 完备化的 IIIS 中对象的排序

粗糙集理论的一个基本问题是通过利用聚集信息的排序寻找满意的结果,本节主要研究在完备化的 IIIS 中,如何利用优势关系$D_A^{\geqslant}$对所有的对象进行排序。张文修[35]等给出了经典序信息系统中对象排序的优势度概念,我们将这一概念应用到完备化的 IIIS 中,最终可以确定每一个对象在完备化的 IIIS 中排序的位置。

定义 3 设$S=(U,AT,V,f)$是一个完备化的 IIIS,$A\subset AT$,对象x_i对x_j关于优势关系$D_A^{\geqslant}$的优势度为$D_A(x_i,x_j)=\dfrac{|\sim[x_i]_A^{\geqslant}\cup[x_j]_A^{\geqslant}|}{|U|}$,其中$|\cdot|$表示集合中元素的个数,$x_i$,$x_j\in U$。

对象x_i关于优势关系$D_A^{\geqslant}$的综合优势度为$D_A(x_i)=\dfrac{1}{|U|-1}\sum\limits_{j\neq i}D_A(x_i,x_j)$,$x_i,x_j\in U$。

由定义可得如下性质:

性质 3 设$D_A(x_i)$为综合优势度,则$D_A(x_i)$满足:

(1)$\frac{1}{|U|}\leqslant D_A(x_i)\leqslant 1$；

(2)若$(x_i,x_j)\in D_A^{\geqslant}$，则 $D_A(x_i)\geqslant D_A(x_j)$。

证明：(1)显然有$\frac{1}{|U|}\leqslant D_A(x_i,x_j)\leqslant 1$，所以 $D_A(x_i)=\frac{1}{|U|-1}\sum_{j\neq i}D_A(x_i,x_j)\leqslant\frac{1}{|U|-1}\sum_{j\neq i}1=1$，$D_A(x_i)=\frac{1}{|U|-1}\sum_{j\neq i}D_A(x_i,x_j)\geqslant\frac{1}{|U|-1}\sum_{j\neq i}\frac{1}{|U|}=\frac{1}{|U|}$。

(2)因为优势关系 $D_A^{\geqslant}$ 具有传递性，故若$(x_i,x_j)\in D_A^{\geqslant}$，则有$[x_i]_A^{\geqslant}\subseteq[x_j]_A^{\geqslant}$，因而$\sim[x_i]_A^{\geqslant}\supseteq\sim[x_j]_A^{\geqslant}$，所以 $D_A(x_i,x_k)=\frac{1}{|U|}|\sim[x_i]_A^{\geqslant}\cup[x_k]_A^{\geqslant}|\geqslant\frac{1}{|U|}|\sim[x_j]_A^{\geqslant}\cup[x_k]_A^{\geqslant}|=D_A(x_j,x_k)$，又因为 $D_A(x_i,x_j)=1$，$D_A(x_j,x_i)<1$，所以 $D_A(x_i)=\frac{1}{|U|-1}\sum_{k\neq i}D_A(x_k,x_j)\geqslant\frac{1}{|U|-1}\sum_{k\neq j}D_A(x_k,x_j)=D_A(x_j)$，证毕。

例2 计算例1中关于优势关系$D_{AT}^{\geqslant}$产生的优势类，并对U中所有对象进行排序。

解：由例1得$U/D_{AT}^{\geqslant}=\{[x_1]_{AT}^{\geqslant},[x_2]_{AT}^{\geqslant},\cdots,[x_{10}]_{AT}^{\geqslant}\}$，其中$[x_1]_{AT}^{\geqslant}=\{x_1,x_5,x_6\}$，$[x_2]_{AT}^{\geqslant}=\{x_2\}$，$[x_3]_{AT}^{\geqslant}=\{x_2,x_3,x_5,x_8\}$，$[x_4]_{AT}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$，$[x_5]_{AT}^{\geqslant}=\{x_5\}$，$[x_6]_{AT}^{\geqslant}=\{x_6\}$，$[x_7]_{AT}^{\geqslant}=\{x_7,x_8\}$，$[x_8]_{AT}^{\geqslant}=\{x_8\}$，$[x_9]_{AT}^{\geqslant}=\{x_2,x_5,x_9\}$，$[x_{10}]_{AT}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_{10}\}$。

由优势度$D_A(x_i,x_j)$的定义可以得到如下优势关系矩阵：

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc}
1 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 0.8 & 0.8 & 0.7 & 0.7 & 0.8 & 1\\
0.9 & 1 & 1 & 1 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 1 & 1\\
0.7 & 0.7 & 1 & 1 & 0.7 & 0.6 & 0.7 & 0.7 & 0.8 & 0.9\\
0.5 & 0.3 & 0.6 & 1 & 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0.4 & 0.8\\
1 & 0.9 & 1 & 1 & 1 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 1 & 1\\
1 & 0.9 & 0.9 & 1 & 0.9 & 1 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 1\\
0.8 & 0.8 & 0.9 & 1 & 0.8 & 0.8 & 1 & 0.9 & 0.8 & 0.9\\
0.9 & 0.9 & 1 & 1 & 0.9 & 0.9 & 1 & 1 & 0.9 & 0.9\\
0.8 & 0.8 & 0.9 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 1 & 0.9\\
0.6 & 0.4 & 0.6 & 0.9 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.3 & 0.5 & 1
\end{array}\right\}$$

进一步由综合优势度定义计算得：

$D_{AT}(x_1)=0.8$，$D_{AT}(x_2)=0.944$

$D_{AT}(x_3)=0.756$，$D_{AT}(x_4)=0.433$

$D_{AT}(x_5)=0.956$，$D_{AT}(x_6)=0.933$

$D_{AT}(x_7)=0.856$，$D_{AT}(x_8)=0.933$

$D_{AT}(x_9)=0.8$，$D_{AT}(x_{10})=0.5$

因此可得如下排序：$x_5\geqslant x_2\geqslant\binom{x_6}{x_8}\geqslant x_7\geqslant\binom{x_1}{x_9}\geqslant x_3\geqslant x_{10}\geqslant x_4$。

5 IIIS 的不确定性度量

不确定性度量是粗糙集理论中的一个重要问题。文献[33,36]中研究了一些信息系统的不确定性度量问题，但并未涉及 IIIS。本节，我们讨论 IIIS 的精确度和粗糙度。一般文献中，关于优势关系 $D_A^{\geqslant}$ 的上、下近似及精确度和粗糙度定义如下：

定义 4 设 $S=(U,AT,V,f)$ 是一个信息系统(IS)，$\forall X\subseteq U$，$A\subset AT$，X 关于优势关系 $D_A^{\geqslant}$ 的上、下近似分别为$\overline{D_A^{\geqslant}}(x)=\{x:[x]_A^{\geqslant}\cap X\neq\emptyset\}$，$\underline{D_A^{\geqslant}}(x)=\{x:[x]_A^{\geqslant}\subseteq X\}$；$Bn_A(X)=\overline{D_A^{\geqslant}}(X)-\underline{D_A^{\geqslant}}(X)$表示粗糙集 X 关于优势关系 $D_A^{\geqslant}$ 的边界。关于优势关系 $D_A^{\geqslant}$ 的精确度定义为：$\alpha_D(A,X)=|\underline{D_A^{\geqslant}}(X)|/|\overline{D_A^{\geqslant}}(X)|$，关于优势关系 $D_A^{\geqslant}$ 的粗糙度定义为：$\rho_D(A,X)=1-|\underline{D_A^{\geqslant}}(X)|/|\overline{D_A^{\geqslant}}(X)|$，其中$|\cdot|$表示集合中元素的个数。

然而，上述定义中的优势关系 $D_A^{\geqslant}$ 针对的是完备的信息系统或者是一个完备化的 IIIS，不存在不完备性。为使上述定义能直接适应于 IIIS，本文给出一种新的优势关系，我们称之为近似优势关系。定义如下：

定义 5 设 $S=(U,AT,V,f)$是一个 IIIS，$A\in AT$，关于 A 的近似优势关系定义为 $SD_A^{\geqslant}=\{(x,y)\in U\times U:\forall a\in A,a^U(x)\geqslant a^U(y)\vee a^U(x)=*\vee a^U(y)=*\}$，关于 A 的近似劣势关系定义为 $SD_A^{\leqslant}=\{(x,y)\in U\times U:\forall a\in A,a^U(y)\geqslant a^U(x)\vee a^U(x)=*\vee a^U(y)=*\}$，对象 x 关于属性集 A 的近似优势类定义为$\{x\}_A^{\geqslant}=\{y\in U:(y,x)\in SD_A^{\geqslant}\}$，即$\{x\}_A^{\geqslant}=\{y\in U:\forall a\in A,a^U(y)\geqslant a^U(x)\vee a^U(x)=*\vee a^U(y)=*\}$；对象 x 关于属性集 A 的近似劣势类定义为 $\{x\}_A^{\leqslant}=\{y\in U:(x,y)\in SD_A^{\geqslant}\}$。$\overline{SD_A^{\geqslant}}(X)=\{x:\{x\}_A^{\geqslant}\cap X\neq\emptyset\}$为 X 关于近似优势关系 $SD_A^{\geqslant}$ 的上近似；X 关于近似优势关系 $SD_A^{\geqslant}$ 的下近似为 $\underline{SD_A^{\geqslant}}(X)=\{x:\{x\}_A^{\geqslant}\subseteq X\}$；$BN_A(X)=\overline{SD_A^{\geqslant}}(X)-\underline{SD_A^{\geqslant}}(X)$表示粗糙集 X 关于近似优势关系 $SD_A^{\geqslant}$ 的边界。X 关于近似优势关系 $SD_A^{\geqslant}$ 的精确度定义为：$\alpha_{SD}(A,X)=|\underline{SD_A^{\geqslant}}(X)|/|\overline{SD_A^{\geqslant}}(X)|$；$X$ 关于近似优势关系 $SD_A^{\geqslant}$ 的粗糙度定义为：$\rho_{SD}(A,X)=1-|\underline{SD_A^{\geqslant}}(X)|/|\overline{SD_A^{\geqslant}}(X)|$，其中$|\cdot|$表示集合中元素的个数。

由定义 5，可以得到关于近似优势关系的如下性质：

性质 4 设 $S=(U,AT,V,f)$是一个 IIIS，$X,Y\subseteq U$，$A\subseteq AT$，$SD_A^{\geqslant}$ 为 A 上的近似优势关系，则

(1)$\underline{SD_A^{\geqslant}}(\emptyset)=\overline{SD_A^{\geqslant}}(\emptyset)=\emptyset$，$\underline{SD_A^{\geqslant}}(U)=\overline{SD_A^{\geqslant}}(U)=U$；

(2)$\underline{SD_A^{\geqslant}}(X)\subseteq X\subseteq\overline{SD_A^{\geqslant}}(X)$；

(3)$\underline{SD_A^{\geqslant}}(\underline{SD_A^{\geqslant}}(X))=\underline{SD_A^{\geqslant}}(X)$；

(4)$\underline{SD_A^{\geqslant}}(X)=\sim\overline{SD_A^{\geqslant}}(\sim X)$，$\overline{SD_A^{\geqslant}}(X)=\sim\underline{SD_A^{\geqslant}}(\sim X)$；

(5)$\underline{SD_A^{\geqslant}}(X)\subseteq\underline{SD_{AT}^{\geqslant}}(X)$，$\overline{SD_A^{\geqslant}}(X)\supseteq\overline{SD_{AT}^{\geqslant}}(X)$；

(6)若 $X\subseteq Y$，则$\underline{SD_A^{\geqslant}}(X)\subseteq\underline{SD_A^{\geqslant}}(Y)$，$\overline{SD_A^{\geqslant}}(X)\subseteq\overline{SD_A^{\geqslant}}(Y)$；

(7)$\underline{SD_A^{\geqslant}}(X\cap Y)=\underline{SD_A^{\geqslant}}(X)\cap\underline{SD_A^{\geqslant}}(Y)$；

(8)$\overline{SD_A^{\geqslant}}(X\cup Y)=\overline{SD_A^{\geqslant}}(X)\cup\overline{SD_A^{\geqslant}}(Y)$；

(9)$\underline{SD_A^{\geqslant}}(X\cup Y)\supseteq\underline{SD_A^{\geqslant}}(X)\cup\underline{SD_A^{\geqslant}}(Y)$；

(10)$\overline{SD_A^{\geqslant}}(X\cap Y)\subseteq\overline{SD_A^{\geqslant}}(X)\cap\overline{SD_A^{\geqslant}}(Y)$。

性质 5 设 $S=(U,AT,V,f)$是一个 IIIS，$X\subseteq U$，$B\subseteq A\subseteq AT$，$SD_A^{\geqslant}$ 为 A 上的近似优势关系，$D_A^{\geqslant}$ 为 A 上的优势关系，则

(1)$\alpha_{SD}(AT,X)\geqslant\alpha_{SD}(A,X)\geqslant\alpha_{SD}(B,X)$，$\rho_{SD}(AT,X)\geqslant\rho_{SD}(A,X)\geqslant\rho_{SD}(B,X)$；

(2)若 $SD_A^{\geqslant}=SD_{AT}^{\geqslant}$，则

$\alpha_{SD}(AT,X)=\alpha_{SD}(A,X)$，$\rho_{SD}(AT,X)=\rho_{SD}(A,X)$；

(3)$\alpha_D(A,X)\geqslant\alpha_{SD}(A,X)$，$\rho_D(A,X)\leqslant\rho_{SD}(A,X)$。

证明：(1)由近似优势关系定义知 $SD_{AT}^{\geqslant}\subseteq SD_A^{\geqslant}$，且由性

质 4 之(5)有

$$\underline{SD_{A}^{\geqslant}}(X)\subseteq\underline{SD_{AT}^{\geqslant}}(X),\overline{SD_{A}^{\geqslant}}(X)\supseteq\overline{SD_{AT}^{\geqslant}}(X),$$

所以

$$\alpha_{SD}(AT,X)=|\underline{SD_{AT}^{\geqslant}}(X)|/|\overline{SD_{AT}^{\geqslant}}(X)|$$
$$\geqslant|\underline{SD_{A}^{\geqslant}}(X)|/|\overline{SD_{A}^{\geqslant}}(X)|=\alpha_{SD}(A,X);$$

同理可证 $\alpha_{SD}(A,X)\geqslant\alpha_{SD}(B,X)$；因为 $\rho_{SD}(A,X)=1-\alpha_{SD}(A,X)$，所以 $\rho_{SD}(AT,X)\geqslant\rho_{SD}(A,X)\geqslant\rho_{SD}(B,X)$。

(2)由定义知结论显然成立。

(3)由近似优势关系和优势关系定义知，$D_{A}^{\geqslant}\subseteq SD_{A}^{\geqslant}$，且 $\underline{SD_{A}^{\geqslant}}(X)\subseteq\underline{D_{A}^{\geqslant}}(X),\overline{SD_{A}^{\geqslant}}(X)\supseteq\overline{D_{A}^{\geqslant}}(X)$，所以类似于(1)的证明知结论显然成立。

下面，给出一个计算精确度和粗糙度的实例。

例 3　在表 1 给出的 IIIS 中，令 $A=\{a_1,a_2\}\subseteq AT,X=\{x_2,x_5,x_6,x_8\}\subseteq U$，分别计算 X 关于 A 和 AT 的精确度和粗糙度。

解：分别计算 X 关于 $U/SD_{AT}^{\geqslant}=\{\{x_1\}_{AT}^{\geqslant},\{x_2\}_{AT}^{\geqslant},\cdots,\{x_{10}\}_{AT}^{\geqslant}\}$ 和 $U/SD_{A}^{\geqslant}=\{\{x_1\}_{A}^{\geqslant},\{x_2\}_{A}^{\geqslant},\cdots,\{x_{10}\}_{A}^{\geqslant}\}$ 的近似优势关系和近似优势类。

$\{x_1\}_{AT}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_5,x_6,x_8\}$，

$\{x_2\}_{AT}^{\geqslant}=\{x_2\}$，

$\{x_3\}_{AT}^{\geqslant}=\{x_2,x_3,x_5,x_8\}$，

$\{x_4\}_{AT}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$，

$\{x_5\}_{AT}^{\geqslant}=\{x_5\},\{x_6\}_{AT}^{\geqslant}=\{x_2,x_5,x_6,x_8\}$，

$\{x_7\}_{AT}^{\geqslant}=\{x_2,x_5,x_6,x_7,x_8\}$，

$\{x_8\}_{AT}^{\geqslant}=\{x_8\}$，

$\{x_9\}_{AT}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\}$，

$\{x_{10}\}_{AT}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{10}\}$，

所以

$\underline{SD_{AT}^{\geqslant}}(X)=\{x_2,x_5,x_6,x_8\}$，

$\overline{SD_{AT}^{\geqslant}}(X)=U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\}$，

$\{x_1\}_{A}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_5,x_6,x_8,x_9\}$，

$\{x_2\}_{A}^{\geqslant}=\{x_2,x_5\}$，

$\{x_3\}_{A}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_8\}$，

$\{x_4\}_{A}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$，

$\{x_5\}_{A}^{\geqslant}=\{x_1,x_5,x_6\}$，

$\{x_6\}_{A}^{\geqslant}=\{x_2,x_5,x_6,x_8,x_9\}$，

$\{x_7\}_{AT}^{\geqslant}=\{x_2,x_5,x_6,x_7,x_8\}$，

$\{x_8\}_{A}^{\geqslant}=\{x_2,x_5,x_6,x_8\}$，

$\{x_9\}_{A}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\}$，

$\{x_{10}\}_{A}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{10}\}$，

所以 $\underline{SD_{A}^{\geqslant}}(X)=\{x_2,x_8\},\overline{SD_{A}^{\geqslant}}(X)=U$。

$\alpha_{SD}(AT,X)=2/5,\alpha_{SD}(A,X)=1/5$，

$\alpha_{SD}(AT,X)\geqslant\alpha_{SD}(A,X)$，

$\rho_{SD}(AT,X)=3/5,\rho_{SD}(A,X)=4/5$，

$\rho_{SD}(AT,X)\leqslant\rho_{SD}(A,X)$。

结束语　本文使用优势粗糙集方法研究了不完备区间值信息系统的对象排序和不确定性度量问题，针对文献[10,11]提出的优势关系存在的问题，给出了一种新的优势关系——上限优势关系，并改进了文献[34]提出的方法，将不完备的区间值信息系统转换为完备的区间值信息系统，研究了不同优势关系间的关系及对象排序问题。此外，针对上限优势关系不能直接适应于 IIIS 的情况，本文又提出了可直接应用于 IIIS 的近似优势关系的概念，讨论了近似优势关系的性质与上限优势关系及其不确定性度量问题，并使用具体算例加以说明。本文中我们着重讨论了不完备区间值信息系统的对象排序和不确定性度量问题，不完备区间值信息系统的属性约简和规则获取将是下一步研究的问题。

参 考 文 献

[1] Pawlak Z. Rough set theory and its applications to data analysis [J]. Cybernetics and Systems, 1998, 29: 661-688

[2] Pawlak Z, Slowinski R. Decision analysis using rough sets [J]. International Transactions in operational Research, 1994, 1: 107-114

[3] Pawlak Z. Rough sets and intelligent data analysis[J]. Information Sciences, 2002, 147: 1-12

[4] Pawlak Z, Skowron A. Rudiments of rough sets[J]. Information Sciences, 2007, 177: 3-27

[5] Pawlak Z, Skowron A. Rough sets: some extensions[J]. Information Sciences, 2007, 177: 28-40

[6] Pawlak Z, Skowron A. Rough sets and Boolean reasoning[J]. Information Sciences, 2007, 177: 41-73

[7] Li H L, Chen M H. Induction of multiple criteria optimal classification rules for biological and medical data[J]. Computers in Biology and Medicine, 2008, 38: 42-52

[8] Liu J F, Hu Q H, Yu D R. A weighted rough set based method developed for class imbalance learning[J]. Information Sciences, 2008, 178: 1235-1256

[9] Shen L X, Loh H T. Applying rough sets to market timing decisions[J]. Decision Support Systems, 2004, 37: 583-597

[10] Swiniarski R W, Skowron A. Rough set method in feature selection and recognition[J]. Pattern Recognition Letter, 2003, 24: 833-849

[11] Xie G, Zhang J, Lai K K, et al. Variable precision rough set for group decision-making: an application[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2008, 49: 331-343

[12] Zhai L Y, Khoo L P, Zhong Z W. A dominance-based rough set approach to Kansei engineering in product development[J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36: 393-402

[13] Błaszczyn' ski J, Greco S, Słowin'ski R. Multi-criteria classification-a new scheme for application of dominance-based decision rules[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 181: 1030-1044

[14] Chen Y, Li K W, Levy J, et al. A rough set approach to multiple criteria ABC analysis[C]// Transactions on Rough Sets VIII, Lecture Notes in Computer Science. Berlin: Springer-Verlag, 2008

[15] Fortemps P, Greco S, Slowinski R. Multicriteria decision support using rules that represent rough-graded preference relations[J]. European Journal of Operational Research, 2008, 188: 206-223

[16] Greco S, Inuiguchi M, Slowinski R. Fuzzy rough sets and multiple-premise gradual decision rules[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2006, 41: 179-211

[17] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough approximation by dominance relations[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2002, 17: 153-171

(下转第 266 页)

讨了若干性质。链图仅仅是一类特殊的二部图，今后将讨论如何将该理论应用于更广泛的二部图。

参考文献

[1] Wille R. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concept[C]//Rival R I, ed. Ordered Sets. Boston: Reidel, Dordecht, 1982: 445-470

[2] Ganter B, Wille R. Formal Concept Analysis[M]. Mathematical Foundations. Berlin: Springer, 1999

[3] 张文修，魏玲，祈建军．概念格的属性约简理论与方法[J]．中国科学 E 辑：信息科学，2005，35(6)：628-639

[4] 魏玲，祁建军，张文修．决策形式背景的概念格属性约简[J]．中国科学 E 辑：信息科学，2008，38(2)：195-208

[5] Wu W Z, Leung Y, Mi J S. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2009, 21(10): 1461-1474

[6] Liu M, Shao M W, Zhang W X, et al. Reduction method for concept lattices based on rough set theory and its application[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2007, 53(9): 1390-1410

[7] Elloumi S, Jaam J, Hasnah A, et al. A multi-level conceptual data reduction approach based on the Lukasiewicz implication[J]. Information Sciences, 2004, 163: 253-262

[8] Li L F, Zhang J K. Attribute reduction in fuzzy concept lattices based on the T implication[J]. Knowledge-Based Systems, 2010, 23: 497-503

[9] Yang H Z, Leung Y, Shao M W. Rule acquisition and attribute reduction in real decision formal contexts[J]. Soft Computing, 2011, 15: 1115-1128

[10] Li J H, Mei C L, Lv Y J. Knowledge reduction in real decision formal contexts[J]. Information Sciences, 2012, 189: 191-207

[11] Amilhastre J, Vilarem M C, Janssen P. Complexity of minimum biclique cover and minimum biclique decomposition for bipartite dominofree graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 1998, 86: 125-144

[12] Berry A, Sigayret A. Representing a concept lattice by a graph [J]. Discrete Applied Mathematics, 2004, 144(1/2): 27-42

[13] Ghosh P, Kundu K, Sarkar D. Fuzzy graph representation of a fuzzy concept lattice[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2010, 161: 1669-1675

（上接第 256 页）

[18] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough sets theory for multicriteria decision analysis[J]. European Journal of Operational Research, 2002, 129: 1-47

[19] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Handing missing values in rough set analysis of multiattribute and multi-criteria decision problems[C]//Zhong N, Skowron A, Ohsuga S, eds. New Directions in Rough Sets, Data Mining and Granular-Soft Computing, Lecture Notes in Artificial Intelligence. Berlin: Springer-Verlag, 1999: 146-157

[20] Grzymala-Busse J W. Characteristic relations for incomplete data: a generalization of the indiscernibility relation[C]//Tsumoto S, et al, eds. Proceeding of the Third International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing, Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2004. Berlin: Springer-Verlag, 2004: 244-253

[21] Grzymala-Busse J W. Data with missing attribute values: generalization of indiscernibility relation and rule reduction[C]//Transactions on Rough Sets I, Lecture Notes in Computer Science. Berlin: Springer-Verlag, 2004

[22] Grzymala-Busse J W, Wang A Y. Modified algorithms LEM1 and LEM2 for rule induction from data with missing attribute values[C]//Proceeding of the Fifth International Workshop on Rough Sets and Soft Computing at the Third Joint Conference on Information Sciences, 1997. Research Triangle Park, NC, 1997: 69-72

[23] Grzymala-Busse J W. On the unknown attribute values in learning from examples[C]//Zbigniew W, Maria Z, eds. Proceeding of the Sixth International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems, 1991. Berlin: Springer-Verlag, 1991: 368-377

[24] Guan Y Y, Wang H K. Set-valued information systems[J]. Information Sciences, 2006, 176: 2507-2525

[25] Kryszkiewicz M. Rough set approach to incomplete information systems[J]. Information Sciences, 1998, 112: 39-49

[26] Leung Y, Li D Y. Maximal consistent block technique for rule acquisition in incomplete information systems[J]. Information Sciences, 2003, 115: 85-106

[27] Leung Y, Wu W Z, Zhang W X. Knowledge acquisition in incomplete information systems: a rough set approach[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 168: 164-180

[28] Kryszkiewicz M. Rough set approach to incomplete information systems[J]. Information Sciences, 1998, 112: 39-49

[29] Kryszkiewicz M. Rules in incomplete information systems[J]. Information Sciences, 1999, 113: 271-292

[30] Stefanowski J, Tsoukia's A. On the extension of rough sets under incomplete information[C]//Zhong N, Skowron A, Ohsuga S, eds. New Directions in Rough Sets, Data Mining and Granular-Soft Computing, Lecture Notes in Artificial Intelligence. Berlin: Springer-Verlag, 1999: 73-82

[31] Stefanowski J, Tsoukia's A. Incomplete information tables and rough classification[J]. Computational Intelligence, 2001, 17: 545-566

[32] Shao M W, Zhang W X. Dominance relation and rules in an incomplete ordered information system[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2005, 20: 13-27

[33] Qian Yu-hua, Liang Ji-ye, Dang Chuang-yin. Interval ordered information systems[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 56: 1994-2009

[34] Yang Xi-bei, Yu Dong-jun, Yang Jing-yu, et al. Dominance-based rough set approach to incomplete interval-valued information system[J]. Data & Knowledge Engineering, 2009, 68: 1331-1347

[35] Zhang W X, Qiu G F. Uncertain Decision Making Based on Rough Sets[M]. Beijing, China: Science Press, 2005

[36] Dai Jian-hua, Xu Qing. Approximations and uncertainty measures in incomplete information systems[J]. Information Sciences, 2012, 198: 62-80