

# 带状线性方程组的含参交替方向并行算法

马欣荣<sup>1,2</sup> 刘三阳<sup>1</sup> 段治健<sup>2</sup>

(西安电子科技大学理学院应用数学系 西安 710071)<sup>1</sup>

(咸阳师范学院数学与信息科学学院 咸阳 712000)<sup>2</sup>

**摘要** 在MIMD分布式存储环境下针对系数矩阵为带状或块三对角矩阵的线性方程组提出了含三参数交替方向迭代并行算法。通过引入三参数调整,并适当分裂系数矩阵得到新算法,给出了系数矩阵为若干特殊矩阵时算法的收敛条件。在HP rx2600集群系统上实现了算法,针对不同的算例将其与多分裂方法、BSOR方法和PEk内迭代方法进行了比较。并行计算结果表明,所提算法具有较高的加速比和并行效率,明显优于多分裂方法和PEk方法,能合理分配内存,从而有效节省计算时间。针对算例1,加速比和计算效率略优于BSOR方法;而算例2的结果明显优于PEk内迭代方法。

**关键词** 线性方程组,HP rx2600集群,并行效率,加速比

**中图法分类号** TP301 **文献标识码** A

## Parallel Alternating Direction Algorithm with Parameters for Solving Banded Linear Systems

MA Xin-rong<sup>1,2</sup> LIU San-yang<sup>1</sup> DUAN Zhi-jian<sup>2</sup>

(Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi'an 710071, China)<sup>1</sup>

(College of Mathematics and Information Science, Xianyang Normal University, Xianyang 712000, China)<sup>2</sup>

**Abstract** This paper focused on parallel iterative method with parameters for solving banded or block tridiagonal linear systems on distributed-memory cluster. By splitting the coefficient matrix and using parameters, we proposed a new algorithm and gave some convergence theories for some special coefficient matrices. Furthermore, we implemented the algorithm on HP rx2600 cluster and compared it with multisplitting method, BSOR method and PEk inner iterative method for different examples. The numerical experiments indicate that acceleration rates and efficiency of our algorithm are higher than the multi-splitting one. The algorithm saves computational time by allocating memory properly. As to Example 1, the acceleration rates and efficiency of our algorithm are better than the BSOR one slightly. And the results for Example 2 are better than PEk inner iterative one significantly.

**Keywords** Linear systems, HP rx2600 cluster, Parallel efficiency, Acceleration rates

### 1 引言

大型稀疏线性方程组的求解在科学与工程计算中扮演着很重要的角色,往往占总模拟时间的比重非常大,尤其是在计算流体力学中,求解采用有限元、有限体积和有限差分方法离散偏微分方程组而得到的大型稀疏线性方程组更是如此。

为求解大型线性方程组,近年来已经发展了许多高效求解方法。目前迭代方法已经取代直接方法得到了广泛的研究<sup>[1-10]</sup>,尤其是多分裂方法<sup>[3]</sup>得到了人们的关注。文献[2]中提出了一种分裂方法,巧妙利用稀疏矩阵特点得到了较为理想的结果。文献[4]中,吴建平等于二维重叠区域分解,对子区域上局部不完全LU分解,给出了一类全局并行不完全分解型预条件算法。文献[5]基于分而治之的思想,恰当分裂系数矩阵,提出了块三对角线性方程组的并行算法。文献[7]

中提出了循环三对角线性方程组的并行求解方法。更多相关研究可以参阅文献[8-14]。本文在文献[2]的基础上,引入参数调整,恰当分裂系数矩阵,提出了参数交替方向并行算法,并与多种方法做了比较。数值计算结果表明本文算法具有良好的并行性和加速比。

### 2 算法推导

考虑带状线性方程组  $Ax = b$  如下所示:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & & & & \\ C_2 & A_2 & B_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & C_{2n-1} & A_{2n-1} & B_{2n-1} & \\ & & & C_{2n} & A_{2n} & \\ & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \\ x_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n-1} \\ b_{2n} \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中  $A_i, B_i, C_i$  均为  $t$  阶矩阵,  $x_i, b_i$  为  $t$  维列向量 ( $t \in Z^+$ )。

到稿日期:2013-04-16 返修日期:2013-10-14 本文受国家自然科学基金项目(11002117),咸阳师范学院科研基金项目(09XSYK204,09XSYK209)资助。

马欣荣(1980—),博士生,讲师,主要研究方向为最优化理论、信息处理快速算法、函数逼近论;刘三阳 博士,教授,主要研究方向为现代优化理论;段治健 博士,讲师,主要研究方向为信息处理中的快速与并行算法。





$$A_i = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & 4 \end{pmatrix}_{t \times t},$$

$$\begin{cases} B_i = C_i = -I_{t \times t} \\ b_i = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T \\ x_i^{(0)} = (0 \ 0 \ \dots \ 0)^T \end{cases}$$

$t=50, m=1000$  及终止条件为  $\epsilon=1 \times 10^{-10}$ , 计算结果见表 5—表 7 及图 2。

表 5 本文算法( $\alpha=1, \beta=0, \tau=6.38$ )计算结果

P	1	2	4	8
T	4.8046	2.1975	1.4152	1.0773
S		2.1864	3.3950	4.4599
E		1.0932	0.8487	0.5575
L	439	439	439	439
$\Delta$	4.6327e-11	4.6327e-11	4.6327e-11	4.6327e-11

表 6 多分裂算法计算结果

P	1	2	4	8
T	22.7881	15.4051	7.7742	5.6206
S		1.4793	2.9312	4.0544
E		0.7397	0.7328	0.5068
L	177	480	257	498

表 7 PEk 内迭代方法计算结果

P	1	2	4	8
T	32.0778	41.2385	20.9080	12.7242
S		0.7779	1.5342	2.5210
E		0.3889	0.3836	0.3151
L	165	483	483	484

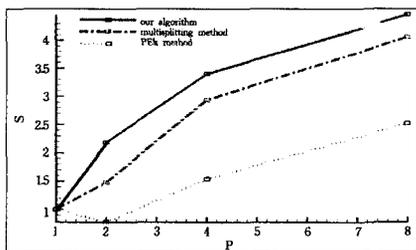


图 2 问题 2 的 3 种算法加速比对比结果

由图 2 及表 5—表 7 可以看出本文算法明显优于 PEk 方法和多分裂方法, 加速比是 PEk 内迭代方法的 1.77 倍以上, 而对于此问题, 多分裂方法优于 PEk 内迭代方法。此时本文参数选取为  $\alpha=1, \beta=0, \tau=6.38$ , 满足收敛性定理。

**结束语** 本文巧妙引入参数, 适当分裂系数矩阵, 推广了

文献[2]中的迭代算法, 提出了含参数带状线性方程组的并行求解算法, 每一次循环, 仅仅需要每两台处理机间进行数据传递, 具有较好的并行性和加速比; 本文的存储方法节省了大量存储空间, 节省了计算时间; 分别讨论了各参数收敛的条件, 并进行了验证, 算例 1、2 结果表明, 本文算法明显优于多分裂方法和 PEk 内迭代方法, 与 BSOR 算法加速比保持一致, 适合于 MIMD 分布式存储环境下求解大型稀疏矩阵。

## 参考文献

- [1] 吕全义, 叶天麒. 系数矩阵为块三对角的线性方程组的并行算法[J]. 西北工业大学学报, 1996, 14(2): 314-317
- [2] 段治健, 等. 求解带状线性方程组的一种并行算法[J]. 计算机科学, 2010, 37(3): 242-244
- [3] 张波, 谷同祥, 莫则尧. 数值并行计算原理与方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999
- [4] 吴建平等. 块三对角线性方程组的一类二维区域分解并行不完全分解预条件[J]. 计算物理, 2009, 26(2): 191-199
- [5] 樊艳红. 具有典型结构的大规模线性方程组的并行算法[D]. 西安: 西北工业大学, 2009
- [6] 谷同祥, 刘兴平. 并行二级多分裂迭代方法[J]. 计算数学, 1998, 20: 153-166
- [7] El-Sayed S M. A direct method for solving circulant tridiagonal block systems of linear equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005(165): 23-30
- [8] Cui Xi-ning, Lü Quan-yi. A parallel algorithm for block-tridiagonal linear systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 173: 1107-1114
- [9] 骆志刚, 李晓梅. 块三对角线性方程组的一种分布式并行算法[J]. 计算机学报, 2000, 23(10): 1028-1034
- [10] 盛跃宾, 宋晓秋, 刘德贵. 带状线性方程组的一种有效分布式并行算法[J]. 系统工程与电子技术, 2004, 26(7): 967-969
- [11] Varga R S. Matrix Iterative Analysis[M]. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1962
- [12] Lv Quan-yi, Xiao Man-yu, Zhou Min. A parallel algorithm based on Galerkin theory for block-tridiagonal linear systems[J]. Applied Mathematics and Communication, 2007, 187(2): 1277-1285
- [13] Garey L E, Shaw R E. A parallel algorithm for solving Toeplitz linear systems[J]. Applied Mathematics and Communication, 1999, 100(2): 241-247
- [14] Frommer A, Szyld D B. Weighted max norms, splitting, and overlapping additive Schwarz iterations[J]. Numerische Mathematik, 1999, 83: 259-278
- [15] 程云鹏. 矩阵论[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2002

(上接第 235 页)

- [4] Crisan D, Doucet A. A Survey of Convergence Results on Particle Filtering Methods for Practitioners[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2002, 50(3): 736-746
- [5] Pan P, Schonfeld D. Video Tracking Based on Sequential Particle Filtering on Graphs[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2011, 20(6): 1641-1651
- [6] Song Lei, Zhang Rong, Liu Zheng-kai, et al. Object Tracking Based on Parzen Particle Filter Using Multiple Cues[C]//Proceeding of 8th Pacific Rim Conference on Multimedia. 2007: 206-215
- [7] Vadakkepat P, Liu Jing. Improved Particle Filter in Sensor Fusion for Tracking Randomly Moving Object[J]. IEEE Trans on

Instrumentation and Measurement, 2006: 1823-1832

- [8] Fernandes E M G P, Martins T F M C, Rocha A M A C. Fish swarm intelligent algorithm for bound constrained global optimization[C]//Proceeding of the International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering. 2009: 1-3
- [9] Yazdani D, Toosi A N, Meybodi R M. Fuzzy Adaptive Artificial Fish Swarm Algorithm[C]//Proceedings of 23rd Australasian Joint Conference. 2010: 334-343
- [10] Han Hua, Ding Yong-sheng, Hao Kuang-rong. A new immune particle filter algorithm for tracking a moving target[C]//Proceeding of Sixth International Conference, ICNC. 2010: 3248-3252