

# 两类概念格的依赖空间理论

包永伟 王霞 吴伟志

(浙江海洋学院数理与信息学院 舟山 316022)

**摘要** 对象定向概念格和属性定向概念格是经典概念格的两种推广模型。首先,利用对象幂集上的一对对偶近似算子分别定义了对象定向概念格和属性定向概念格上的同余关系。其次,分别基于两类同余关系构造了一个内部算子和一个闭包算子,并研究了内部算子与对象定向概念格的关系以及闭包算子与属性定向概念格的关系。最后将对象(属性)定向概念格之间的关系转化为相应的同余关系之间的关系。

**关键词** 形式背景,对象定向概念格,属性定向概念格,同余关系,依赖空间

中图法分类号 TP301

文献标识码 A

## Dependence Space Based on Two Types of Concept Lattices

BAO Yong-wei WANG Xia WU Wei-zhi

(School of Mathematics, Physics and Information Science, Zhejiang Ocean University, Zhoushan 316022, China)

**Abstract** Object oriented concept lattice and attribute oriented concept lattice are two types of generalized models of classical concept lattice. Firstly, two congruence relations were defined respectively on object power sets of object oriented concept lattice and attribute oriented concept lattice using a pair of dual approximation operators. Secondly, an inner operator and a closure operator were constructed based on two kinds of congruence relations. Then relationship between the inner operator and object oriented concept lattice was studied as well as relationship between the closure operator and attribute oriented concept lattice. Finally, relationships between two object oriented concept lattices were transformed into relationships between the corresponding congruence relations.

**Keywords** Formal context, Object oriented concept lattice, Attribute oriented concept lattice, Congruence relation, Dependence space

### 1 引言

形式概念分析<sup>[1,2]</sup>是由 Wille R. 于 1982 年提出的一种数据分析、知识表示和信息处理的有效工具。形式概念由概念的外延(属于这个概念的所有对象的集合)与概念的内涵(所有这些对象所共有的属性集)组成。所有的概念及它们之间的偏序关系构成一个概念格。概念格的模型推广和概念格的构造是形式概念分析的热点问题。Yao Y. Y. 在文献[3]中结合粗糙集理论给出了一对对偶算子,进而定义了两类形式概念:对象定向(形式)概念和属性定向(形式)概念,并给出了两类推广的概念格模型:对象定向概念格和属性定向概念格。文献[4]针对随机决策形式背景提出了随机概念格的构建算法。文献[5]讨论了基于模糊形式背景的模糊对象概念格的概念约简,并构造出了模糊对象概念格的 3 种变精度概念格。

概念格的属性约简是知识发现的重要问题之一,它可以使形式背景中知识的挖掘变得更容易,也能使这些知识的表示变得更简洁。文献[6-8]提出了一种保持形式背景上所有概念的外延集不变的属性约简方法。该方法能够完全确定形

式背景的所有概念,并保持它们之间原有的格结构关系不变。文献[9]将此方法成功地推广到对象定向概念格和属性定向概念格的属性约简中。基于交不可约元,文献[10]提出了另一种概念格的属性约简方法。该方法保持形式背景的交不可约元不变,进而保持形式背景的所有概念及它们之间原有的格结构关系不变。文献[11]将基于交不可约元的属性约简方法推广到了对象定向概念格和属性定向概念格的属性约简中,该方法大大简化了计算量。文献[12]提出了保持对象幂集上的同余类不变的属性约简方法,并且证明了该方法也能保持形式背景的所有概念及它们之间原有的格结构关系不变。文献[13]提出了基于同余关系的协调决策形式背景和不协调决策形式背景的概念格属性约简方法。但是到目前为止,不协调决策形式背景的对象定向概念格和属性定向概念格的属性约简问题一直没有得到很好的解决。本文将借鉴文献[12]的思想探讨对象定向概念格和属性定向概念格的依赖空间理论,以便为下一步研究不协调决策形式背景的对象定向概念格和属性定向概念格的属性约简的相关问题奠定基础。

到稿日期:2013-05-20 返修日期:2013-12-21 本文受国家自然科学基金项目(61202206, 61272021, 61075120, 61173181, 11071284, 60673096, 11071281),浙江省自然科学基金重点项目(LZ12F03002)资助。

包永伟(1991—),男,主要研究方向为概念格、粗糙集, E-mail: bbylm@126.com; 王霞(1980—),女,博士,讲师,主要研究方向为概念格、粗糙集; 吴伟志(1964—),男,博士,教授,主要研究方向为概念格、粗糙集、随机集、粒计算、数据挖掘和信息融合。

## 2 预备知识

在本节中,我们将给出形式概念分析和依赖空间的基本概念和相关性质。

### 2.1 形式概念分析的相关知识

**定义 1<sup>[2]</sup>** 形式背景  $(U, A, I)$  由两个集合  $U$  和  $A$ , 以及关系  $I \subseteq U \times A$  构成。称  $U$  中的元素为形式背景的对象,  $A$  中的元素为形式背景的属性。

对任意的  $X \subseteq U$  和  $B \subseteq A$ , Yao Y. Y.<sup>[3]</sup> 定义了如下一对对偶的近似算子:

$$X^\square = \{a \in A \mid \forall x \in U, xRa \Rightarrow x \in X\}$$

$$X^\diamond = \{a \in A \mid \exists x \in U, xRa \wedge x \in X\}$$

$$B^\square = \{x \in U \mid \forall a \in A, xRa \Rightarrow x \in B\}$$

$$B^\diamond = \{x \in U \mid \exists a \in A, xRa \wedge a \in B\}$$

**定义 2<sup>[2]</sup>** 设  $(U, A, I)$  为一形式背景。对任意的  $B \subseteq A$ , 称  $(U, B, I_B)$  为形式背景  $(U, A, I)$  的子形式背景, 其中  $I_B = I \cap (U \times B)$ 。

对任意的  $B \subseteq A$ , 记  $\square^B, \diamond^B$  为定义在子形式背景  $(U, B, I_B)$  上的一对对偶近似算子。显然,  $X \subseteq U, X^{\square^B} = X^{\square^A} \cap B, X^{\diamond^B} = X^{\diamond^A} \cap B$  且  $X^{\square^A} = X^\square, X^{\diamond^A} = X^\diamond$ 。

**定义 3<sup>[2]</sup>** 设  $(U, A, I)$  为一形式背景。对任意的  $X \subseteq U, B \subseteq A$ , 若  $X = B^\diamond$  且  $B = X^\square$ , 则称  $(X, B)$  为形式背景  $(U, A, I)$  的对象定向概念。称  $X$  和  $B$  分别为对象定向概念  $(X, B)$  的外延和内涵。

Yao Y. Y. 在文献[3]中给出了对象定向概念之间的交运算和并运算:

$$(X_1, B_1) \wedge (X_2, B_2) = ((X_1 \cap X_2)^\diamond, B_1 \cap B_2)$$

$$(X_1, B_1) \vee (X_2, B_2) = (X_1 \cup X_2, (X_1 \cup X_2)^\square)$$

其中  $(X_1, B_1)$  和  $(X_2, B_2)$  为两个对象定向概念。

记  $L_o(U, A, I) = \{(X, B) \mid X = B^\diamond, B = X^\square\}$  为对象定向概念格,  $L_{\omega}(U, A, I) = \{X \mid (X, B) \in L_o(U, A, I)\}$  为所有对象定向概念的外延构成的集合。

**定义 4<sup>[2]</sup>** 设  $(U, A, I)$  为一形式背景。对任意的  $X \subseteq U, B \subseteq A$ , 若  $X = B^\square$  且  $B = X^\diamond$ , 则称  $(X, B)$  为形式背景  $(U, A, I)$  的属性定向概念。称  $X$  和  $B$  分别为属性定向概念  $(X, B)$  的外延和内涵。

属性定向概念之间的交运算和并运算定义如下:

$$(X_1, B_1) \wedge (X_2, B_2) = (X_1 \cap X_2, (X_1 \cap X_2)^\diamond)$$

$$(X_1, B_1) \vee (X_2, B_2) = ((X_1 \cup X_2)^\square, B_1 \cup B_2)$$

其中  $(X_1, B_1)$  和  $(X_2, B_2)$  为两个属性定向概念。

记  $L_A(U, A, I) = \{(X, B) \mid X = B^\square, B = X^\diamond\}$  为属性定向概念格,  $L_{\omega}(U, A, I) = \{X \mid (X, B) \in L_A(U, A, I)\}$  为所有属性定向概念的外延构成的集合。

**性质 1<sup>[2]</sup>** 设  $(U, A, I)$  为一形式背景。对任意的  $X, X_1, X_2$  为任意的对象集合,  $B, B_1, B_2$  为任意的属性集合, 则有下列几条性质:

(i)  $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_1^\square \subseteq X_2^\square, X_1^\diamond \subseteq X_2^\diamond, B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_1^\square \subseteq B_2^\square, B_1^\diamond \subseteq B_2^\diamond$ ;

(ii)  $X^{\square^\diamond} \subseteq X \subseteq X^{\diamond^\square}, B^{\diamond^\square} \subseteq B \subseteq B^{\square^\diamond}$ ;

(iii)  $X^{\square^\diamond^\square} \subseteq X^\square, B^{\square^\diamond^\square} \subseteq B^\square, X^{\diamond^\square^\diamond} \subseteq X^\diamond, B^{\diamond^\square^\diamond} \subseteq B^\diamond$ ;

(iv)  $(X_1 \cap X_2)^\square = X_1^\square \cup X_2^\square, (X_1 \cup X_2)^\diamond = X_1^\diamond \cup X_2^\diamond$ ,

$$(B_1 \cap B_2)^\square = B_1^\square \cap B_2^\square, (B_1 \cup B_2)^\diamond = B_1^\diamond \cup B_2^\diamond.$$

### 2.2 依赖空间的相关知识

Novotny 在文献[14]中定义了属性幂集  $P(A)$  上的同余关系, 进而得到了依赖空间理论。

**定义 5<sup>[14]</sup>** 设  $A$  为一个有限非空集合,  $\kappa$  是定义在属性幂集  $P(A)$  上的一个等价关系。称  $\kappa$  为定义在  $(P(A), \cup)$  上的一个同余关系, 当它满足下面条件: 若  $(B_1, C_1) \in \kappa, (B_2, C_2) \in \kappa$ , 则  $(B_1 \cup B_2, C_1 \cup C_2) \in \kappa$ 。

**定义 6<sup>[14]</sup>** 设  $A$  为一个有限非空集合,  $\kappa$  为定义在  $(P(A), \cup)$  上的一个同余关系。则称  $(A, \kappa)$  为一个依赖空间。

## 3 主要结果

本节中主要研究对象定向概念格和属性定向概念格的依赖空间理论。

### 3.1 对象定向概念格的依赖空间

本小节中首先利用  $\square^B$  算子引入  $(P(U), \cap)$  上的同余关系, 并详细讨论了同余关系及同余等价类的性质。进一步得到了同余类与对象定向概念外延的关系, 以及同余关系与对象定向概念格的外延集之间的关系。

设  $(U, A, I)$  为一形式背景。对任意的  $B \subseteq A$ , 定义对象幂集  $P(U)$  上的二元关系如下:

$$R^{\square^B} = \{(X, Y) \in P(U) \times P(U) \mid X^{\square^B} = Y^{\square^B}\}$$

**引理 1** 设  $(U, A, I)$  为一形式背景。对任意的  $B \subseteq A$ , 则  $R^{\square^B}$  为  $(P(U), \cap)$  上的一个同余关系, 即  $(U, R^{\square^B})$  为形式背景  $(U, A, I)$  上的一个依赖空间。

记  $[X]_{R^{\square^B}} = \{Y \in P(U) \mid (X, Y) \in R^{\square^B}\}$  为  $X$  关于  $R^{\square^B}$  的同余类,  $IN_{R^{\square^B}}(X) = \cap \{Y \mid Y \in [X]_{R^{\square^B}}\}$ 。

**引理 2** 设  $(U, A, I)$  为一形式背景。对任意的  $X \subseteq U$  和  $B \subseteq A$ , 有  $(IN_{R^{\square^B}}(X), X) \in R^{\square^B}$ 。

证明: 由性质 1 知,  $(IN_{R^{\square^B}}(X))^{\square^B} = (\cap \{Y \mid Y \in [X]_{R^{\square^B}}\})^{\square^B} = \cap_{Y \in [X]_{R^{\square^B}}} Y^{\square^B} = X^{\square^B}$  成立。所以有  $(IN_{R^{\square^B}}(X), X) \in R^{\square^B}$ 。证毕。

引理 2 表明  $IN_{R^{\square^B}}(X)$  是  $X$  的同余类  $[X]_{R^{\square^B}}$  的最小元素。

**引理 3** 设  $(U, A, I)$  为一形式背景。对任意的  $B \subseteq A$ ,  $IN_{R^{\square^B}}$  是一个内部算子。即  $IN_{R^{\square^B}}$  满足下面 3 条: (i) 对任意的  $X \subseteq U, IN_{R^{\square^B}}(X) \subseteq X$  成立; (ii) 对任意的  $X, Y \subseteq U$ , 若  $X \subseteq Y$ , 则  $IN_{R^{\square^B}}(X) \subseteq IN_{R^{\square^B}}(Y)$ ; (iii) 对任意的  $X \subseteq U, IN_{R^{\square^B}}(X) = IN_{R^{\square^B}}(IN_{R^{\square^B}}(X))$  成立。

证明: (i) 由  $IN_{R^{\square^B}}$  的定义容易得到  $IN_{R^{\square^B}}(X) \subseteq X$  成立。

(ii) 由于  $(IN_{R^{\square^B}}(X), X) \in R^{\square^B}$  且  $(IN_{R^{\square^B}}(Y), Y) \in R^{\square^B}$  对任意的  $X$  和  $Y$  都成立, 再根据引理 1  $R^{\square^B}$  为  $(P(U), \cap)$  上的一个同余关系知  $(IN_{R^{\square^B}}(X) \cap IN_{R^{\square^B}}(Y), X \cap Y) \in R^{\square^B}$  成立。所以, 由  $X \subseteq Y$  可得  $(IN_{R^{\square^B}}(X) \cap IN_{R^{\square^B}}(Y), X) \in R^{\square^B}$  成立, 即  $IN_{R^{\square^B}}(X) \cap IN_{R^{\square^B}}(Y) \in [X]_{R^{\square^B}}$ 。于是由  $IN_{R^{\square^B}}$  的定义知  $IN_{R^{\square^B}}(X) \subseteq IN_{R^{\square^B}}(X) \cap IN_{R^{\square^B}}(Y)$ 。从而有  $IN_{R^{\square^B}}(X) \cap IN_{R^{\square^B}}(Y) = IN_{R^{\square^B}}(X)$ 。因此,  $IN_{R^{\square^B}}(X) \subseteq IN_{R^{\square^B}}(Y)$  成立。

(iii) 由  $(IN_{R^{\square^B}}(X), X) \in R^{\square^B}$  和  $(IN_{R^{\square^B}}(X), IN_{R^{\square^B}}(X)) \in R^{\square^B}$

$(IN_{R^{\square B}}(X)) \in R^{\square B}$  知  $(X, IN_{R^{\square B}}(IN_{R^{\square B}}(X))) \in R^{\square B}$ , 于是有  $IN_{R^{\square B}}(X) \subseteq IN_{R^{\square B}}(IN_{R^{\square B}}(X))$ 。所以有  $IN_{R^{\square B}}(X) = IN_{R^{\square B}}(IN_{R^{\square B}}(X))$ 。证毕。

**引理 4** 设  $(U, A, I)$  为一形式背景。对任意的  $X, Y, Z \subseteq U$  和  $B \subseteq A$ , 若  $X \subseteq Y \subseteq Z$  和  $(X, Z) \in R^{\square B}$ , 则有  $(X, Y) \in R^{\square B}$  和  $(Y, Z) \in R^{\square B}$ 。

**证明:** 由  $(Y, Y) \in R^{\square B}$  和  $(X, Z) \in R^{\square B}$ , 再根据引理 1  $R^{\square B}$  为  $(P(U), \cap)$  上的一个同余关系知,  $(X \cap Y, Z \cap Y) \in R^{\square B}$ 。于是若有  $X \subseteq Y \subseteq Z$ , 则  $(X, Y) \in R^{\square B}$ 。再结合  $(X, Z) \in R^{\square B}$  有  $(Y, Z) \in R^{\square B}$  成立。证毕。

对任意的  $B \subseteq A$ , 记  $\gamma_B = \{X \in P(U) \mid IN_{R^{\square B}}(X) = X\}$ 。

**定理 1** 设  $(U, A, I)$  为一形式背景。对任意的  $X \subseteq U$  和  $B \subseteq A$ , 有

- (i)  $IN_{R^{\square B}}(X) = X^{\square B \diamond B}$ ;
- (ii)  $\gamma_B = L_{\mathcal{A}}(U, B, I_B)$ ;
- (iii)  $(IN_{R^{\square B}}(X), X^{\square B}) \in L_O(U, B, I_B)$ 。

**证明:** (i) 根据引理 2 和性质 1 可得:  $X^{\square B \diamond B} = (IN_{R^{\square B}}(X))^{\square B \diamond B} \subseteq IN_{R^{\square B}}(X)$ 。另一方面, 由性质 1 知  $X^{\square B \diamond B} = X^{\square B}$  成立。于是有  $X^{\square B \diamond B} \in [X]_{R^{\square B}}$ , 即  $IN_{R^{\square B}}(X) \subseteq X^{\square B \diamond B}$ 。因此,  $IN_{R^{\square B}}(X) = X^{\square B \diamond B}$  成立。

(ii) 对任意的  $X \in L_{\mathcal{A}}(U, B, I_B)$ , 显然有  $X = X^{\square B \diamond B}$ 。于是由 (i) 知  $IN_{R^{\square B}}(X) = X^{\square B \diamond B} = X$ , 即  $X \in \gamma_B$ 。从而有  $L_{\mathcal{A}}(U, B, I_B) \subseteq \gamma_B$ 。反之若  $X \in \gamma_B$ , 再根据 (i) 可得  $X = IN_{R^{\square B}}(X) = X^{\square B \diamond B}$ , 于是有  $X \in L_{\mathcal{A}}(U, B, I_B)$ 。从而有  $\gamma_B \subseteq L_{\mathcal{A}}(U, B, I_B)$  成立。所以有  $\gamma_B = L_{\mathcal{A}}(U, B, I_B)$ 。

(iii)  $(IN_{R^{\square B}}(X), X^{\square B}) \in L_O(U, B, I_B)$  可直接由 (i) 及性质 1 得到。证毕。

**引理 5** 设  $(U, A_1, I_1)$  和  $(U, A_2, I_2)$  为两个具有相同对象集的形式背景。若  $L_{\mathcal{A}}(U, A_2, I_2) \subseteq L_{\mathcal{A}}(U, A_1, I_1)$ , 则对任意的  $X \in P(U)$ , 有

- (i)  $IN_{R^{\square A_1}}(IN_{R^{\square A_2}}(X)) = IN_{R^{\square A_2}}(X)$ ;
- (ii)  $IN_{R^{\square A_2}}(X) \subseteq IN_{R^{\square A_1}}(X)$ 。

**证明:** (i) 由于  $L_{\mathcal{A}}(U, A_2, I_2) \subseteq L_{\mathcal{A}}(U, A_1, I_1)$ , 且由定理 1 知对任意的  $X \in P(U)$ ,  $IN_{R^{\square A_2}}(X) \in L_{\mathcal{A}}(U, A_2, I_2)$ , 于是有  $IN_{R^{\square A_2}}(X) \in L_{\mathcal{A}}(U, A_1, I_1)$  且  $(IN_{R^{\square A_2}}(X))^{\square A_1 \diamond A_1} = IN_{R^{\square A_2}}(X)$ 。再结合  $IN_{R^{\square A_1}}(IN_{R^{\square A_2}}(X)) = (IN_{R^{\square A_2}}(X))^{\square A_1 \diamond A_1}$  可得,  $IN_{R^{\square A_1}}(IN_{R^{\square A_2}}(X)) = IN_{R^{\square A_2}}(X)$ 。

(ii) 由于  $IN_{R^{\square A_1}}$  和  $IN_{R^{\square A_2}}$  为内部算子, 于是有  $IN_{R^{\square A_2}}(X) \subseteq X$  和  $IN_{R^{\square A_1}}(IN_{R^{\square A_2}}(X)) \subseteq IN_{R^{\square A_1}}(X)$ 。再结合 (i) 知,  $IN_{R^{\square A_2}}(X) \subseteq IN_{R^{\square A_1}}(X)$ 。证毕。

**定理 2** 设  $(U, A_1, I_1)$  和  $(U, A_2, I_2)$  为两个具有相同对象集的形式背景。则  $L_{\mathcal{A}}(U, A_2, I_2) \subseteq L_{\mathcal{A}}(U, A_1, I_1)$  等价于  $R^{\square A_1} \subseteq R^{\square A_2}$ 。

**证明:** 充分性(反证法): 假设  $L_{\mathcal{A}}(U, A_2, I_2) \subseteq L_{\mathcal{A}}(U, A_1, I_1)$  不成立, 则存在  $X \in L_{\mathcal{A}}(U, A_2, I_2)$  且  $X \notin L_{\mathcal{A}}(U, A_1, I_1)$ 。于是根据定理 1 知  $IN_{R^{\square A_1}}(X) \subset X = IN_{R^{\square A_2}}(X)$ 。又由于  $R^{\square A_1} \subseteq R^{\square A_2}$  等价于  $[X]_{R^{\square A_1}} \subseteq [X]_{R^{\square A_2}}$ , 因此有  $IN_{R^{\square A_2}}(X) \subseteq IN_{R^{\square A_1}}(X)$ , 这与  $IN_{R^{\square A_1}}(X) \subset IN_{R^{\square A_2}}(X)$  矛盾。所以假设不成立, 即有  $L_{\mathcal{A}}(U, A_2, I_2) \subseteq L_{\mathcal{A}}(U, A_1, I_1)$ 。

必要性(反证法): 假设  $R^{\square A_1} \subseteq R^{\square A_2}$  不成立, 则存在  $X \in P(U)$  使得  $[X]_{R^{\square A_1}} \subseteq [X]_{R^{\square A_2}}$  不成立。于是存在  $Y \in$

$[X]_{R^{\square A_1}}$  且  $Y \notin [X]_{R^{\square A_2}}$ 。以下分两种情况:  $X \in L_{\mathcal{A}}(U, A_1, I_1)$  和  $X \notin L_{\mathcal{A}}(U, A_1, I_1)$  分别证明。

首先, 若  $X \in L_{\mathcal{A}}(U, A_1, I_1)$ , 由  $Y \in [X]_{R^{\square A_1}}$  且  $Y \notin [X]_{R^{\square A_2}}$  可得,  $X = IN_{R^{\square A_1}}(Y) \subset Y$ 。再结合引理 3 知  $IN_{R^{\square A_2}}(Y) \subseteq IN_{R^{\square A_1}}(Y)$ 。于是有  $IN_{R^{\square A_2}}(Y) \subseteq X \subset Y$ 。再根据引理 4 可得  $(Y, X) \in R^{\square A_2}$ , 这与  $Y \notin [X]_{R^{\square A_2}}$  矛盾。所以假设不成立, 即有  $R^{\square A_1} \subseteq R^{\square A_2}$ 。

其次, 若  $X \notin L_{\mathcal{A}}(U, A_1, I_1)$ , 由于  $IN_{R^{\square A_1}}(X) \in L_{\mathcal{A}}(U, A_1, I_1)$ , 根据上段证明知,  $[IN_{R^{\square A_1}}(X)]_{R^{\square A_1}} \subseteq [IN_{R^{\square A_1}}(X)]_{R^{\square A_2}}$ 。由  $Y \in [X]_{R^{\square A_1}}$  知,  $IN_{R^{\square A_1}}(X) \subseteq Y$  且  $Y \in [IN_{R^{\square A_1}}(X)]_{R^{\square A_2}}$ 。再结合  $IN_{R^{\square A_2}}(X) \subseteq IN_{R^{\square A_1}}(X)$  可得  $IN_{R^{\square A_2}}(X) \subseteq Y$ 。由  $Y \in [IN_{R^{\square A_1}}(X)]_{R^{\square A_2}}$  知,  $IN_{R^{\square A_2}}(IN_{R^{\square A_1}}(X)) = IN_{R^{\square A_2}}(Y)$ 。于是由  $IN_{R^{\square A_1}}(X) \subseteq X$  可得  $IN_{R^{\square A_2}}(IN_{R^{\square A_1}}(X)) \subseteq IN_{R^{\square A_2}}(X)$ , 从而,  $IN_{R^{\square A_2}}(Y) \subseteq IN_{R^{\square A_2}}(X)$ 。再结合  $IN_{R^{\square A_2}}(X) \subseteq Y$  和  $(IN_{R^{\square A_2}}(Y), Y) \in R^{\square A_2}$  可得,  $(IN_{R^{\square A_2}}(X), Y) \in R^{\square A_2}$ 。考虑到  $(IN_{R^{\square A_2}}(X), X) \in R^{\square A_2}$ , 则有  $(X, Y) \in R^{\square A_2}$ , 这与  $Y \notin [X]_{R^{\square A_2}}$  矛盾。所以假设不成立, 即  $R^{\square A_1} \subseteq R^{\square A_2}$  成立。

综之, 若  $L_{\mathcal{A}}(U, A_2, I_2) \subseteq L_{\mathcal{A}}(U, A_1, I_1)$ , 则有  $R^{\square A_1} \subseteq R^{\square A_2}$ 。

### 3.2 属性定向概念格的依赖空间

本小节中利用  $\diamond B$  算子引入  $(P(U), \cup)$  上的同余关系, 讨论了同余关系及同余等价类的性质。

设  $(U, A, I)$  为一形式背景。对任意的  $B \subseteq A$ , 定义对象幂集  $P(U)$  上的二元关系如下:

$$R^{\diamond B} = \{(X, Y) \in P(U) \times P(U) \mid X^{\diamond B} = Y^{\diamond B}\}$$

显然  $R^{\diamond B}$  为  $P(U)$  上的一个等价关系, 且由性质 1 容易验证  $R^{\diamond B}$  为  $(P(U), \cup)$  上的一个同余关系, 即  $(U, R^{\diamond B})$  为形式背景  $(U, A, I)$  的一个依赖空间。

记  $[X]_{R^{\diamond B}} = \{Y \in P(U) \mid (X, Y) \in R^{\diamond B}\}$  为  $X$  关于  $R^{\diamond B}$  的同余类,  $C_{R^{\diamond B}}(X) = \cup\{Y \mid Y \in [X]_{R^{\diamond B}}\}$ 。由性质 1 容易验证对任意的  $X \subseteq U$  和  $B \subseteq A$  有  $(C_{R^{\diamond B}}(X), X) \in R^{\diamond B}$ 。即  $C_{R^{\diamond B}}(X)$  是  $X$  的同余类  $[X]_{R^{\diamond B}}$  的最大元素。

**引理 6** 设  $(U, A, I)$  为一形式背景。对任意的  $B \subseteq A$ ,  $C_{R^{\diamond B}}$  是一个闭包算子。即  $C_{R^{\diamond B}}$  满足下面 3 条: (i) 对任意的  $X \subseteq U$ ,  $X \subseteq C_{R^{\diamond B}}(X)$  成立; (ii) 对任意的  $X, Y \subseteq U$ , 若  $X \subseteq Y$ , 则  $C_{R^{\diamond B}}(X) \subseteq C_{R^{\diamond B}}(Y)$ ; (iii) 对任意的  $X \subseteq U$ ,  $C_{R^{\diamond B}}(X) = C_{R^{\diamond B}}(C_{R^{\diamond B}}(X))$  成立。

**引理 7** 设  $(U, A, I)$  为一形式背景。对任意的  $X, Y, Z \subseteq U$  和  $B \subseteq A$ , 若  $X \subseteq Y \subseteq Z$  和  $(X, Z) \in R^{\diamond B}$ , 则有  $(X, Y) \in R^{\diamond B}$  和  $(Y, Z) \in R^{\diamond B}$ 。

引理 6 和引理 7 的证明类似引理 3 和引理 4 的证明。

对任意的  $B \subseteq A$ , 记  $\Gamma_B = \{X \in P(U) \mid C_{R^{\diamond B}}(X) = X\}$ 。

**定理 3** 设  $(U, A, I)$  为一形式背景。对任意的  $X \subseteq U$  和  $B \subseteq A$ , 有

- (i)  $C_{R^{\diamond B}}(X) = X^{\diamond B \square B}$ ;
- (ii)  $\Gamma_B = L_{\mathcal{A}}(U, B, I_B)$ ;
- (iii)  $(C_{R^{\diamond B}}(X), X^{\diamond B}) \in L_{\mathcal{A}}(U, B, I_B)$ 。

**证明:** (i) 根据  $(C_{R^{\diamond B}}(X), X) \in R^{\diamond B}$  及性质 1 可得:  $C_{R^{\diamond B}}(X) \subseteq (C_{R^{\diamond B}}(X))^{\diamond B \square B} = X^{\diamond B \square B}$ 。另一方面, 由性质 1 知  $X^{\diamond B \square B} = X^{\diamond B}$  成立。于是有  $X^{\diamond B \square B} \in [X]_{R^{\diamond B}}$ , 即  $X^{\diamond B \square B} \subseteq$

$C_{R \diamond B}(X)$ 。因此,  $C_{R \diamond B}(X) = X^{\diamond B \square B}$  成立。

(ii) 对任意的  $X \in L_{AU}(U, B, I_B)$ , 显然有  $X = X^{\diamond B \square B}$ 。于是由(i)知  $C_{R \diamond B}(X) = X^{\diamond B \square B} = X$ , 即  $X \in \Gamma_B$ 。从而有,  $L_{AU}(U, B, I_B) \subseteq \Gamma_B$ 。反之若  $X \in \Gamma_B$ , 再根据(i)可得  $X = C_{R \diamond B}(X) = X^{\diamond B \square B}$ , 于是有  $X \in L_{AU}(U, B, I_B)$ 。从而有,  $L_{AU}(U, B, I_B) \supseteq \Gamma_B$  成立。所以有  $\Gamma_B = L_{AU}(U, B, I_B)$ 。

(iii)  $(C_{R \diamond B}(X), X^{\diamond B}) \in L_{AU}(U, B, I_B)$  可直接由(i)及性质 1 得到。证毕。

**引理 8** 设  $(U, A_1, I_1)$  和  $(U, A_2, I_2)$  为两个具有相同对象集的形式背景。若  $L_{AU}(U, A_2, I_2) \subseteq L_{AU}(U, A_1, I_1)$ , 则对任意的  $X \in P(U)$ , 有

$$(i) C_{R \diamond A_1}(C_{R \diamond A_2}(X)) = C_{R \diamond A_2}(X);$$

$$(ii) C_{R \diamond A_1}(X) \subseteq C_{R \diamond A_2}(X)。$$

证明: (i) 由于  $L_{AU}(U, A_2, I_2) \subseteq L_{AU}(U, A_1, I_1)$ , 且由定理 3 知对任意的  $X \in P(U)$ ,  $C_{R \diamond A_2}(X) \in L_{AU}(U, A_2, I_2)$ , 于是有  $C_{R \diamond A_2}(X) \in L_{AU}(U, A_1, I_1)$  且  $(C_{R \diamond A_2}(X))^{\diamond A_1 \square A_1} = C_{R \diamond A_2}(X)$ 。再结合  $C_{R \diamond A_1}(C_{R \diamond A_2}(X)) = (C_{R \diamond A_2}(X))^{\diamond A_1 \square A_1}$  可得,  $C_{R \diamond A_1}(C_{R \diamond A_2}(X)) = C_{R \diamond A_2}(X)$ 。

(ii) 由于  $C_{R \diamond A_1}$  和  $C_{R \diamond A_2}$  为闭包算子, 于是有  $X \subseteq C_{R \diamond A_2}(X)$  和  $C_{R \diamond A_1}(X) \subseteq C_{R \diamond A_1}(C_{R \diamond A_2}(X))$ 。再结合(i)知,  $C_{R \diamond A_1}(X) \subseteq C_{R \diamond A_2}(X)$ 。证毕。

**定理 4** 设  $(U, A_1, I_1)$  和  $(U, A_2, I_2)$  为两个具有相同对象集的形式背景。则  $L_{AU}(U, A_2, I_2) \subseteq L_{AU}(U, A_1, I_1)$  等价于  $R^{\diamond A_1} \subseteq R^{\diamond A_2}$ 。

证明: 充分性(反证法): 假设  $L_{AU}(U, A_2, I_2) \subseteq L_{AU}(U, A_1, I_1)$  不成立, 则存在  $X \in L_{AU}(U, A_2, I_2)$  且  $X \notin L_{AU}(U, A_1, I_1)$ 。于是根据定理 3 知  $C_{R \diamond A_2}(X) = X \subset C_{R \diamond A_1}(X)$ 。又由于  $R^{\diamond A_1} \subseteq R^{\diamond A_2}$  等价于  $[X]_{R^{\diamond A_1}} \subseteq [X]_{R^{\diamond A_2}}$ , 从而有  $C_{R \diamond A_1}(X) \subseteq C_{R \diamond A_2}(X)$ , 这与  $C_{R \diamond A_2}(X) \subset C_{R \diamond A_1}(X)$  矛盾。所以假设不成立, 即有  $L_{AU}(U, A_2, I_2) \subseteq L_{AU}(U, A_1, I_1)$ 。

必要性(反证法): 假设  $R^{\diamond A_1} \subseteq R^{\diamond A_2}$  不成立, 则存在  $X \in P(U)$  使得  $[X]_{R^{\diamond A_1}} \subseteq [X]_{R^{\diamond A_2}}$  不成立。于是存在  $Y \in [X]_{R^{\diamond A_1}}$  且  $Y \notin [X]_{R^{\diamond A_2}}$ 。以下分  $X \in L_{AU}(U, A_1, I_1)$  和  $X \notin L_{AU}(U, A_1, I_1)$  两种情况分别证明。

首先, 若  $X \in L_{AU}(U, A_1, I_1)$ , 由于  $Y \in [X]_{R^{\diamond A_1}}$  且  $Y \notin [X]_{R^{\diamond A_2}}$  可得,  $Y \subset C_{R \diamond A_1}(X) = X$ 。再结合引理 8 有  $Y \subset X = C_{R \diamond A_1}(Y) \subseteq C_{R \diamond A_2}(Y)$ 。再根据引理 7 可得,  $(Y, X) \in R^{\diamond A_2}$ , 这与  $Y \notin [X]_{R^{\diamond A_2}}$  矛盾。所以假设不成立, 即有,  $R^{\diamond A_1} \subseteq R^{\diamond A_2}$ 。

其次, 若  $X \notin L_{AU}(U, A_1, I_1)$ , 由于  $C_{R \diamond A_1}(X) \in L_{AU}(U, A_1, I_1)$ , 根据上段证明知,  $[C_{R \diamond A_1}(X)]_{R^{\diamond A_1}} \subseteq [C_{R \diamond A_1}(X)]_{R^{\diamond A_2}}$ 。由  $Y \in [X]_{R^{\diamond A_1}}$  知,  $Y \subset C_{R \diamond A_1}(X) = X$  且  $Y \in [C_{R \diamond A_1}(X)]_{R^{\diamond A_2}}$ , 再结合  $C_{R \diamond A_1}(X) \subseteq C_{R \diamond A_2}(X)$  可得  $Y \subseteq C_{R \diamond A_2}(X)$ 。由  $Y \in [C_{R \diamond A_1}(X)]_{R^{\diamond A_2}}$  知,  $C_{R \diamond A_2}(C_{R \diamond A_1}(X)) = C_{R \diamond A_2}(Y)$ 。于是由  $X \subseteq C_{R \diamond A_1}(X)$  可得  $C_{R \diamond A_2}(X) \subseteq C_{R \diamond A_2}(C_{R \diamond A_1}(X))$ 。从而,  $C_{R \diamond A_2}(X) \subseteq C_{R \diamond A_2}(Y)$ 。再结合  $Y \subseteq C_{R \diamond A_2}(X)$  和  $(Y, C_{R \diamond A_2}(Y)) \in R^{\diamond A_2}$  可得,  $(Y, C_{R \diamond A_2}(X)) \in R^{\diamond A_2}$ 。考虑到  $(X, C_{R \diamond A_2}(X)) \in R^{\diamond A_2}$ , 则有  $(X, Y) \in R^{\diamond A_2}$ , 这与  $Y \notin [X]_{R^{\diamond A_2}}$  矛盾。所以假设不成立, 即  $R^{\diamond A_1} \subseteq R^{\diamond A_2}$ 。

综之,  $R^{\diamond A_1} \subseteq R^{\diamond A_2}$ 。

**结束语** 本文主要研究如何将对象(属性)定向概念格之间的关系转化为对应的二元关系之间的关系。基于一对对偶算子, 本文在对象定向概念格和属性定向概念格中引入了两个同余关系, 并讨论了同余关系的性质。进一步构造了一个内部算子和一个闭包算子, 研究了内部算子和闭包算子与形式概念之间的关系。最后证明了两个概念格之间的包含关系与对应的同余关系之间的反包含关系是等价的。该结果为基于同余关系下的对象定向概念格和属性定向概念格的知识约简与规则提取提供了理论基础。

## 参 考 文 献

- [1] Wille R. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts [M] // Rival I, ed. Ordered Sets. Reidel, Dordrecht-Boston, 1982; 445-470
- [2] Ganter B, Wille R. Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations [M]. Berlin: Springer, 1999
- [3] Yao Yi-yu. A comparative study of formal concept analysis and rough set theory in data analysis [J]. Rough Sets and Current Trends in Computing, Lecture Notes in Computer Science, 2004, 3066: 59-68
- [4] 刘保相, 李言. 随机决策形式背景下的概念格构建原理与算法 [J]. 计算机科学, 2013, 40(Z6): 90-92, 119
- [5] 宋笑雪, 张文修, 李红. 变精度对象概念格的构造及其性质 [J]. 计算机科学, 2010, 37(12): 197-200
- [6] 张文修, 仇国芳. 基于粗糙集的不确定决策 [M]. 清华大学出版社, 2005
- [7] Zhang Wen-xiu, Wei Ling, Qi Jian-jun. Attribute reduction theory and approach to concept lattice [J]. Science in China Series F: Information Science, 2005, 48(6): 713-726
- [8] Wei Ling, Qi Jian-jun, Zhang Wen-xiu. Attribute reduction theory of concept lattice based on decision formal contexts [J]. Science in China Series F: Information Science, 2008, 51(7): 910-923
- [9] Liu Min, Shao Ming-wen, Zhang Wen-xiu, et al. Reduction method for concept lattices based on rough set theory and its application [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2007, 53: 1390-1410
- [10] Wang Xia, Ma Jian-min. A novel approach to attribute reduction in concept lattices [J]. Rough Sets and Current Trends in Computing, Lecture Notes in Computer Science, 2006, 4062: 522-529
- [11] Wang Xia, Zhang Wen-xiu. Relations of attribute reduction between object and property oriented concept lattices [J]. Knowledge-Based Systems, 2008, 21(5): 398-403
- [12] Wang Xia. Approaches to Attribute Reduction in Concept Lattices Based on Rough Set Theory [J]. International Journal of Hybrid Information Technology, 2012, 5(2): 67-80
- [13] Wang Xia, Wu Wei-zhi. Approximate reduction in inconsistent formal decision contexts [C] // Proceedings 2012 IEEE International Conference on Granular Computing. Hangzhou, 2012: 616-621
- [14] Novotny M. Dependence spaces of information system [M] // Orłowska E. ed. Incomplete Information: Rough Set Analysis. Physica-Verlag, Heidelberg-New York, 1998: 193-246