黎曼流形上非线性凸规划最优性条件的研究

邹 丽[1,2] 温 欣[1] 林 彬[1]
(辽宁师范大学计算机与信息技术学院 大连 116081)[1]
(南京大学计算机软件新技术国家重点实验室 南京 210093)[2]

摘 要 利用黎曼流形上 Lipschitz 函数的 Penot 广义方向导数和 Clarke 广义梯度,得到了黎曼流形上凸函数的判别,并得到了黎曼流形上凸规划极小点的充分条件,给出了黎曼流形上的等式约束优化问题、不等式约束优化问题及带有等式和不等式约束的优化问题的 Lagrange 定理、Lagrange 充分条件、Kuhn-Tucker 定理及极小点充分条件。

关键词 黎曼流形,凸函数,最优性条件,广义梯度
中图法分类号 TP181 **文献标识码** A

Optimality Conditions on Riemannian Manifold of Nonlinear Convex Programming

ZOU Li[1,2] WEN Xin[1] LIN Bin[1]
(School of Computer Science and Information Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116081, China)[1]
(State Key Laboratory for Novel Software Technology, Nanjing University, Nanjing 210093, China)[2]

Abstract This paper gave the identification of convex function on Riemannian manifold by use of Penot generalized directional derivative and the Clarke generalized gradient, and gave a sufficient condition for the minimum point of convex programming on Riemannian manifolds, and Lagrange theorem, Lagrange sufficient condition, the Kuhn-Tucker theorem and sufficient condition of the minimum point of the equality constrained optimization problems, the inequality constrained optimization problems, and equality and inequality constrained optimization problem was given.

Keywords Riemannian manifold, Convex function, Optimality condition, Generalized gradient

1 引言

流形,是局部具有欧几里德空间性质的空间。人们往往通过测量自己所处的空间来判断其是否存在空间扭曲,测量的标准就是所谓的度量,度量是内蕴性质,具有度量的空间就称为黎曼空间。黎曼流形是具有黎曼度量的微分流形。将基于线性空间上的优化问题扩展到非线性空间上(如黎曼流形上),是目前本研究领域内的一个热门课题[1]。近年来,为了更深入地研究非光滑及其相关问题,人们把几种重要的非光滑分析工具从欧氏空间推广到黎曼流形上[2-5]。

2004 年,Ledyac 等人在黎曼流形上建立了非光滑函数次微分的概念和运算法则,证明定义在黎曼流形上的 Hamilton-Jacobi 方程存在唯一解,并且讨论了黎曼流形上的近似次微分的概念和变分原理等[6,7]。2005 年,Azagra 等人探讨定义在有限维黎曼流形上的弗雷歇次微分和与其相关的极限次微分,并利用广义导数的概念研究定义在微分流形上的微分包含等问题。至此,借助于黎曼流形上的非光滑分析工具,人们探讨了黎曼流形上的非光滑优化问题[8,9]。

近年来刘三阳等人将(MP)问题从线性空间扩展到了微分流形上,给出了黎曼流形上(MP)问题的 Fritz John 必要最优性条件[10];肖刚、尹小艳等人做出了微分流形上的最优化算法[11],采用信赖域算法将线性空间上的理论推广到了微分流形上;之后肖刚、刘三阳又应用变分原理完成了黎曼流形上非可微多目标规划的必要最优性条件[12]以及黎曼流形上非可微多目标规划的弱 Pareto 最优性必要条件[13];李志启主要研究了黎曼流形上一类具有 Ricci 曲下界的 Aronson-Benilan 非线性方程[14];宋如意将稀疏 PCA 这一非线性约束问题转化为黎曼流形上的优化问题,并提出了黎曼流形上的线搜索方法进行求解[15];张晶讨论了黎曼流形上 3 类问题的特征值万有估计[16];高恩芝等人针对近邻点对的侧地距离存在误差和作为衡量投影函数好坏的标准不能很好地表达出 TRIMAP 中定义的图上距离与投影到低维空间中两点实际距离的对比关系,采用了一个新的衡量标准表达式,定义了一个参数 m 来代表对比关系,以此来解决这个缺陷[17]。学者们分别利用不同的算法将最优化问题以及非线性方程推广到流形上,国内流形上的最优化理论进入一个全速发展的阶段。

基于上述研究成果,文中利用微分流形局部上与线性空间的开子集微分同胚的性质,拟将凸函数的判别及约束问题

到稿日期:2013-05-20 返修日期:2013-07-18 本文受国家自然科学基金(61105059,61175055,61173100),国家自然科学基金国际(地区)合作与交流项目(61210306079),中国博士后基金(2012M510815),辽宁省杰出青年学者计划(LJQ2011116)资助。
邹 丽(1971－),女,博士,副教授,主要研究领域为多值逻辑与不确定性推理、智能信息处理,E-mail:zoulicn@163.com;温 欣(1988－),女,硕士生,主要研究领域为多值逻辑与不确定性推理、智能信息处理;林 彬(1971－),男,硕士,实验师,主要研究领域为智能信息处理,E-mail:lb9648@163.com(通信作者)。

的最优性条件从线性空间上平行地推广到黎曼流形上，使得在黎曼流形上求解凸规划问题得到解决。

2 预备知识

假定 R^n 是 n 维欧式空间，点 $p\in R^n$ 的第 i 个坐标记为 $(p)^i$，即 $()^i$ 是 R^n 中的第 i 个坐标函数。

定义 1[18] 设 M 是一个 Hausdorff 拓扑空间，若 M 的每一点 p 都有一个开邻域 $U\subset M$，使得 U 和 n 维欧式空间 R^n 中的一个开子集是同胚的，则称 M 是一个 n 维拓扑流形，简称为 n 维流形。

定义 2[10] 设函数 $f(x)$ 是定义在黎曼流形上的实值函数，$x_0\in U\subset M$，(U,φ) 是包含点 x_0 的坐标卡，若 $\forall x,y\in U$，$\exists$ 常数 L，有 $|f(y)-f(x)|\leqslant L|\varphi(y)-\varphi(x)|$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近满足局部 Lipschitz 条件。

定义 3[10] 设函数 $f:M\to R$ 在点 $x\in M$ 附近满足局部 Lipschitz 条件，(U,φ) 是包含点 x 的坐标卡，f 在 x 处沿方向 $v\in T_xM$ 的 Clarke 广义方向导数定义为

$$f^\circ(x;v)=\limsup_{\substack{y\to\varphi(x)\\ t\downarrow 0}}\frac{f\circ\varphi^{-1}(y+t\varphi_{*x}(v))-f\circ\varphi^{-1}(y)}{t}=(f\circ\varphi^{-1})^\circ(\varphi(x);\varphi_{*x}(v))\tag{1}$$

其中 $t\to 0$，表示 t 单调下降地趋近于 0。

定义 4[10] 设 $f(x)$ 是定义在黎曼流形 (M,g) 上且在点 x 的某邻域内满足局部 Lipschitz 条件的函数，点 x 的余切空间 T_x^*M 的子集

$$\partial f(x)=\{\xi\in T_x^*M\,|\,f^\circ(x;v)\geqslant(\xi,v),\ \forall v\in T_xM\}\tag{2}$$

中的元素称为函数 f 在 x 处的 Clarke 广义梯度；

广义梯度的范数定义为

$$\|\xi\|_\varphi:=\sup\{(\xi,v),v\in T_xM,\|v\|\leqslant 1\}\tag{3}$$

定义 5[19] 设函数 $f:M\to R$ 在点 $x\in M$ 附近满足局部 Lipschitz 条件，(U,φ) 是包含点 x 的坐标卡，f 在 x 处沿方向 $v\in T_xM$ 的 Penot 广义方向导数定义如下：

$$\underline{d}f(x;v)=\liminf_{\substack{u\to v\\ t\downarrow 0}}\frac{f\circ\varphi^{-1}(y+t\varphi_{*x}(u))-f\circ\varphi^{-1}(y)}{t}=\underline{d}(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x);\varphi_{*x}(v))\tag{4}$$

$$\overline{d}f(x;v)=\limsup_{\substack{u\to v\\ t\downarrow 0}}\frac{f\circ\varphi^{-1}(y+t\varphi_{*x}(u))-f\circ\varphi^{-1}(y)}{t}=\overline{d}(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x);\varphi_{*x}(v))\tag{5}$$

$$\underline{d}^2f(x;v;w)=\liminf_{\substack{u\to w\\ t\downarrow 0}}\frac{f\circ\varphi^{-1}(y+t\varphi_{*x}(v)+t^2\varphi_{*x}(u))-f\circ\varphi^{-1}(y)-t\underline{d}f(x;v)}{t^2}\tag{6}$$

$$\overline{d}^2f(x;v;w)=\limsup_{\substack{u\to w\\ t\downarrow 0}}\frac{f\circ\varphi^{-1}(y+t\varphi_{*x}(v)+t^2\varphi_{*x}(u))-f\circ\varphi^{-1}(y)-t\overline{d}f(x;v)}{t^2}\tag{7}$$

如果 $\underline{d}f(x;v)=\overline{d}f(x;v)$，将其值记为 $df(x;v)$，表示 f 在 x 处沿方向 $v\in T_xM$ 的 Penot 广义方向导数；

如果 $\underline{d}^2f(x;v;\omega)=\overline{d}^2f(x;v;\omega)$，将其值记为 $d^2f(x;v;\omega)$，表示 f 在 x 处沿方向 $v\in T_xM$ 的二阶 Penot 广义方向导数；

如果 $df(x;v)$ 与 $d^2f(x;v;\omega)$ 都存在，则有

$$d^2f(x;v;\omega)=\lim_{y\to\varphi(x),t\downarrow 0}\frac{f\circ\varphi^{-1}(y+t\varphi_{*x}(v)+t^2\varphi_{*x}(\omega))-f\circ\varphi^{-1}(y)-tdf(x;v)}{t^2}\tag{8}$$

3 黎曼流形上凸规划极小点的充分条件

3.1 黎曼流形上凸函数的判别定理

定理 1 设 M 是 m 维黎曼流形，U 为测地凸集，且 $U\subset M$，$f:U\to R$ 在 U 上满足局部 Lipschitz 条件，那么 f 是 U 上的测地凸函数的充要条件是：对于 $\forall x,y\in U$，恒有：$f\circ\varphi^{-1}(y+\varphi_{*x}(v))\geqslant f\circ\varphi^{-1}(y)+\nabla(f\circ\varphi^{-1})(y)^{\mathrm T}(y-x)$。

证明：(必要性) $\forall t\in[0,1]$，有

$$\varphi^{-1}(y)+t[\varphi^{-1}(y+\varphi_{*x}(v))-\varphi^{-1}(y)]=t\varphi^{-1}(y+\varphi_{*x}(v))+(1-t)\varphi^{-1}(y)\in U$$

由一阶 Taylor 展式，有

$$f\circ(\varphi^{-1}(y)+t[\varphi^{-1}(y+\varphi_{*x}(v))-\varphi^{-1}(y)])=f\circ\varphi^{-1}(y)+t\nabla(f\circ\varphi^{-1})(y)^{\mathrm T}(y-x)+o(t)\tag{9}$$

而由 f 是 U 上的测地凸函数，又有

$$\begin{aligned}&f\circ(\varphi^{-1}(y)+t[\varphi^{-1}(y+\varphi_{*x}(v))-\varphi^{-1}(y)])\\&=f\circ(t\varphi^{-1}(y+\varphi_{*x}(v))+(1-t)\varphi^{-1}(y))\\&\leqslant tf\circ\varphi^{-1}(y+\varphi_{*x}(v))+(1-t)f\circ\varphi^{-1}(y)\end{aligned}\tag{10}$$

两式联立，有

$$f\circ\varphi^{-1}(y+\varphi_{*x}(v))+(1-t)f\circ\varphi^{-1}(y)\geqslant f\circ\varphi^{-1}(y)+t\nabla(f\circ\varphi^{-1})(y)^{\mathrm T}(y-x)+o(t)$$

即

$$f\circ\varphi^{-1}(y+\varphi_{*x}(v))\geqslant f\circ\varphi^{-1}(y)+\nabla(f\circ\varphi^{-1})(y)^{\mathrm T}(y-x)+\frac{o(t)}{t}\tag{11}$$

令 $t\to 0^+$，则有 $\frac{o(t)}{t}\to 0$，故

$$f\circ\varphi^{-1}(y+\varphi_{*x}(v))\geqslant f\circ\varphi^{-1}(y)+\nabla(f\circ\varphi^{-1})(y)^{\mathrm T}(y-x)$$

(充分性) $\forall t\in[0,1]$，记 $z=tx+(1-t)y$。

由已知条件有

$$f\circ\varphi^{-1}(y)\geqslant f\circ\varphi^{-1}(y+(1-t)\varphi_{*x}(v))+\nabla(f\circ\varphi^{-1})(y+(1-t)\varphi_{*x}(v))^{\mathrm T}(x-z)\tag{12}$$

$$f\circ\varphi^{-1}(y+\varphi_{*x}(v))\geqslant f\circ\varphi^{-1}(y+(1-t)\varphi_{*x}(v))+\nabla(f\circ\varphi^{-1})(y+(1-t)\varphi_{*x}(v))^{\mathrm T}(y-z)\tag{13}$$

所以

$$tf\circ\varphi^{-1}(y)\geqslant tf\circ\varphi^{-1}(y+(1-t)\varphi_{*x}(v))+t\nabla(f\circ\varphi^{-1})(y+(1-t)\varphi_{*x}(v))^{\mathrm T}(x-z)\tag{14}$$

$$(1-t)f\circ\varphi^{-1}(y+\varphi_{*x}(v))\geqslant(1-t)f\circ\varphi^{-1}(y+(1-t)\varphi_{*x}(v))+(1-t)\nabla(f\circ\varphi^{-1})(y+(1-t)\varphi_{*x}(v))^{\mathrm T}(y-z)\tag{15}$$

两式相加，并进行整理，得

$$tf\circ\varphi^{-1}(y)+(1-t)f\circ\varphi^{-1}(y+\varphi_{*x}(v))\geqslant f\circ\varphi^{-1}(y+(1-t)\varphi_{*x}(v))+\nabla(f\circ\varphi^{-1})(y+(1-t)\varphi_{*x}(v))^{\mathrm T}(tx+(1-t)y-z)\tag{16}$$

由于 $z=tx+(1-t)y$，因此

$$\begin{aligned}&tf\circ\varphi^{-1}(y)+(1-t)f\circ\varphi^{-1}(y+\varphi_{*x}(v))\\&\geqslant f\circ\varphi^{-1}(y+(1-t)\varphi_{*x}(v))\\&=f\circ(t\varphi^{-1}(y)+(1-t)\varphi^{-1}(y+\varphi_{*x}(v)))\end{aligned}$$

表明 f 是测地凸集 U 上的测地凸函数。

3.2 黎曼流形上约束问题的最优性条件

3.2.1 等式约束问题

定义 6 对于数学规划问题(NLP)

$$\min f(x)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} h_j(x)=0, j\in J \\ x\in M \end{cases} \tag{17}$$

式中，$D:=\{x\in M|h_j(x)=0,j\in J\}$为该规划问题的可行域。$f(x),h_j(x)$是黎曼流形$U\subset M$上的测地凸函数，$U$是$M$中的一个开子集，$(U,\varphi)$是包含点$x^*$的坐标卡。

定理2 设M是一个完备且连通的m维黎曼流形，C是m维黎曼流形M的闭子集，并且点x^*是该规划的最优解，如果函数$f(x):M\to R,h_j(x):M\to R,j\in J$在点$x^*\in M$附近满足局部Lipschitz条件，且所有等式约束在x^*的梯度$\nabla h_1(x^*),\cdots,\nabla h_l(x^*)$线性无关，那么存在$l$个数，$\lambda_1',\cdots,\lambda_l'$使得

$$\partial f(x^*)+\sum_{j\in J}\lambda_j'\partial h_j(x^*)=0 \tag{18}$$

定理3 如果在等式约束问题(17)中，点x^*满足如下3个条件：

(1)$f(x):M\to R,h_j(x):M\to R,j\in J$的二阶Penot广义方向导数存在；

(2)存在$\lambda'\in M$，使$\nabla(L\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*),\varphi(\lambda'))=0$；

(3)对M中的非零向量d，如果有$d^{\mathrm{T}}\nabla(h_j\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*))=0,j\in J$，必有

$$d^{\mathrm{T}}\nabla_x^2(L\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*),\varphi(\lambda'))d>0$$

则x^*是黎曼流形上的严格局部极小点。

3.2.2 不等式约束问题

对于数学规划问题(NLP)

$$\min f(x)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} g_i(x)\leqslant 0, i\in I \\ x\in M \end{cases} \tag{19}$$

式中，$D:=\{x\in M|g_i(x)\leqslant 0,i\in I\}$为该规划问题的可行域。

$f:M\to R,g:M\to R^l,h:M\to R^n$是黎曼流形$U\subset M$上的测地凸函数，$U$是$M$中的一个开子集，$(U,\varphi)$是包含点$x^*$的坐标卡。

定理4 设M是一个完备且连通的m维黎曼流形，C是m维黎曼流形M的闭子集，并且点x^*是该规划的最优解，如果函数$f:M\to R,g_i:M\to R,i\in I$在点$x^*\in M$附近满足局部Lipschitz条件，且当$i\notin I$时，$g_i$在$x^*$处连续。如果对于$i\in I$，向量组$\nabla(g_i\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*))$线性无关，那么存在数$u_i(i\in I)$，使得

$$\left.\begin{aligned} &\nabla(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*)+\sum_{i\in I}u_i\nabla(g_i\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*))=0 \\ &u_i\geqslant 0, i\in I \end{aligned}\right\}$$

特别地，若当$i\notin I$时，也有g_i在$x^*\in M$附近满足局部Lipschitz条件，则有

$$\left.\begin{aligned} &\nabla(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*)+\sum_{i=1}^{m}u_i\nabla(g_i\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*))=0 \\ &u_i(g_i\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*))=0, i=1,2,\cdots,m \\ &u_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m \end{aligned}\right\}$$

定理5(极小点充分条件) 设极小化问题(19)是凸规划，x^*是一个K-T点，那么，x^*必是全局极小点。

证明：任取一个可行点x，那么，$g_i\circ\varphi^{-1}(\varphi(x))\leqslant 0$；

又由于约束函数$g_i\circ\varphi^{-1}(\varphi(x^*))$是测地凸函数，则有

$$g_i\circ\varphi^{-1}(\varphi(x))\geqslant g_i\circ\varphi^{-1}(\varphi(x^*))+\nabla(g_i\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*))^{\mathrm{T}}(x-x^*), i=1,2,\cdots,m$$

当$i\in I,g_i\circ\varphi^{-1}(\varphi(x^*))=0$时，有

$$\nabla(g_i\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*))^{\mathrm{T}}(x-x^*)\leqslant 0。$$

由x^*是K-T点，有

$$\nabla(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*)=-\sum_{i\in I}u_i\nabla(g_i\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*)),\quad u_i\geqslant 0, i\in I$$

$$\nabla(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*)^{\mathrm{T}}(x-x^*)=-\sum_{i\in I}u_i\nabla(g_i\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*))^{\mathrm{T}}(x-x^*)\geqslant 0$$

因$f\circ\varphi^{-1}(\varphi(x))$是测地凸函数，所以

$$f\circ\varphi^{-1}(\varphi(x))\geqslant f\circ\varphi^{-1}(\varphi(x^*))+\nabla(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*)^{\mathrm{T}}(x-x^*)$$

$$f\circ\varphi^{-1}(\varphi(x))\geqslant f\circ\varphi^{-1}(\varphi(x^*))$$

这表明，x^*是原问题的全局极小点。

3.2.3 一般约束问题

数学规划问题(NLP)

$$\min f(x)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} g_i(x)\leqslant 0, i\in I \\ h_j(x)=0, j\in J \\ x\in M \end{cases} \tag{20}$$

式中，$D:=\{x\in M|g_i(x)\leqslant 0,i\in I;h_j(x)=0,j\in J\}$为该规划问题的可行域。

$f:M\to R,g:M\to R^l,h:M\to R^n$是黎曼流形$U\subset M$上的测地凸函数，$U$是$M$中的一个开子集，$(U,\varphi)$是包含点$x^*$的坐标卡。

定理6 设在问题(20)中，x^*为可行点，$I=\{i|g_i\circ\varphi^{-1}(\varphi(x^*))=0\}$，$f$和$g_i(i\in I)$在$x^*$可微，$g_i(i\notin I)$在$x^*$连续，$h_j(j=1,2,\cdots,l)$在$x^*$连续可微，如果对于$i\in I$，向量组$\nabla g_i,i\in I,\nabla h_j,j\in J$线性无关，那么存在一组数$u_i(i\in I),v_j(j\in J)$，使得

$$\begin{cases} \nabla(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*)+\sum_{i\in I}u_i\nabla(g_i\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*))+ \\ \sum_{j\in J}v_j\nabla(h_j\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*))=0 \\ u_i\geqslant 0, i\in I \end{cases}$$

定理7 设在问题(20)中，$f,g_i(i=1,2,\cdots,m)$是测地凸函数，$h_j(j=1,2,\cdots,l)$是线性函数，可行域为$U,x^*\in U,I=\{i|g_i\circ\varphi^{-1}(\varphi(x^*))=0\}$，且在$x^*$处K-T必要条件成立，及存在$u_i\geqslant 0(i\in I)$及$v_j(j\in J)$，使得

$$\nabla(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*)+\sum_{i\in I}u_i\nabla(g_i\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*))+\sum_{j\in J}v_j\nabla(h_j\circ\varphi^{-1})(\varphi(x^*))=0$$

则x^*是全局最优解。

结束语 由于微分流形在局部上与欧氏空间相似，整体上缺乏线性结构，这就需要新的技术和方法去处理这些问题。本文主要是将约束问题的最优性条件从线性空间上平行地推广到黎曼流形上去，在黎曼流形上建立了凸函数分析工具，在介绍了经典的Clarke广义方向导数与广义梯度概念之后，利用Penot广义方向导数的概念对平直空间上的Lagrange定理进行推广；给出了黎曼流形上凸函数的判别定理及其证明，并给出了黎曼流形上等式约束优化问题、不等式约束优化问题及带有等式和不等式约束的优化问题的Lagrange定理、Lagrange充分条件、Kuhn-Tucker定理及极小点充分条件。

参考文献

[1] Udriste C. Convex Functions and Optimization Methods on Riemannian Manifolds [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publi-

shers,1994

[2] Daniel A,Juan F,Fernando Lopez-Mesas. Nonsmooth Analysis and Hamilton-Jacobi Equations on Riemannian Manifolds [J]. Journal of Functional Analysis,2005,220(2):304-361

[3] Ledyaev Y S,Zhu Q J. Techniques for Nonsmooth Analysis on Smooth Manifolds:Local Problems [J]. Lecture Notes in Control and Information Sciences,2004,301:283-297

[4] Ledyaev Y S,Zhu Q J. Techniques for Nonsmooth Analysis on Smooth Manifoldsò:Deformations and Flows [J]. Lecture Notes in Control and Information Sciences,2004,301:299-311

[5] Daniel A,Juan F. Proximal Calculus on Riemannian Manifolds [J]. Mediterranean Journal of Mathematics,2005,2(4):437-450

[6] Ledyacv Y S, Zhu Q J. Techniques for nonsmooth analysis on smooth manifolds i:local problems[J]. Lecture Notes in Control and Information Sciences,2004,301:283-297

[7] Ledyacv Y S, Zhu Q J. Techniques for nonsmooth analysis on smooth manifolds ii:deformations and folws[J]. Lecture Notes in Control and Information Sciences,2004,301:299-311

[8] Azagra D, Ferrera J, Lopez-Mesas F. Nonsmooth analysis and Hamilton-Jacobi equations on smooth manifolds[J]. Joural of Functional Analysis,2005,220:304-361

[9] Azagra D,Ferrera J. Proximal calculus on Riemannian Manifolds [J]. Mediterranean Jorunal of Mathematics,2005,2:437-450

[10] 刘三阳,朱石焕,肖刚. 黎曼流形上 Fritz John 必要最优性条件[J]. 辽宁师范大学学报:自然科学版,2007,30(3):268-272

[11] 肖刚,刘三阳,尹小艳. 微分流形上的最优化算法[J]. 西安电子科技大学学报:自然科学版,2007,34(3):472-475

[12] 肖刚,刘三阳. 黎曼流形上非可微多目标规划的必要最优性条件[J]. 吉林大学学报:理学版,2008,46:209-213

[13] 肖刚. 几类向量变分不等式的研究[D]. 西安:西安电子科技大学,2008

[14] 李志启. 黎曼流形上 Aronson-Benilan 非线性方程的局部梯度估计[D]. 上海:华东师范大学,2012

[15] 宋如意. 基于黎曼流形上的优化方法求解稀疏 PCA[D]. 上海:复旦大学,2012

[16] 张晶. 黎曼流形上拉普拉斯算子的特征值估计[D]. 新乡:河南师范大学,2012

[17] 高恩芝,王士同. 黎曼流形的距离均方差最小降维改进算法[J]. 计算机工程与应用,2013,49(2):198-202

[18] Lang S. Analysis II [M]. Addison-Wesley

[19] 付巍巍. 黎曼流形上非光滑优化最优性条件的研究[D]. 阜新:辽宁工程技术大学,2009

(上接第 71 页)

从图 6 可以得出,本文提出的优化混合模型推荐算法相对于单纯的内容过滤和改进的 Item-Based 协同过滤以及传统的混合模型推荐算法在推荐质量上确实有明显的提升。

结束语 本文对传统混合模型的推荐算法进行了优化,增加了用户评分归一化及用户活跃度对物品相似性的影响,新的相似性度量方法使得计算得到的目标物品的最近邻居更加准确。实验结果表明,上述方法显著提高了推荐系统的推荐质量,并且可以有效解决冷启动问题。实验不足之处是在解决冷启动问题上,计算精度还有待提高,需要进一步的深入研究。

参 考 文 献

[1] Breese J,Hecherman D,Kadie C. Empirical analysis of predictive algorithms for collaborative filtering[C]// Proceedings of the 14th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence(UAI-98). 1998:43-52

[2] Herlocker L J,Konstan A J,Riedl T J. Empirical analysis of design choices in neighborhood-based collaborative filtering algorithms[J]. Information Retrieval,2002,5(4):287-310

[3] Zeng C,Xing C X,Zhou L Z. A personalized search algorithm by using content-based filtering[J]. Journal of Software,2003,14(5):999-1004

[4] Stawar B,Karypis G,Konstan J,et al. Item-Based Collaborative Filtering Recommendation Algorithms[A]// Proceedings of the 10th International World Wide Web Conference[C]. Paris:IEEE Computer Society Press,2001:285-295

[5] Dempster A,Laird N,Rubin D. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm[J]. Journal of the Royal Statistical Society,1977,B39:1-38

[6] Thiesson B,Meek C,Chickering D,et al. Learning mixture of DAG models[R]. Technical Report,MSR-TR-97-30. Redmond:Microsoft Research,1997

[7] Sarwar B M,Karypis G,Konstan J A,et al. Application of dimensionality reduction in recommender system—A case study [C]// ACM WebKDD 2000 Workshop. 2000

[8] Peng Yu,Cheng Xiao-ping. Item-based collaborative filtering algorithm using attribute similarity[J]. Computer Engineering and Applications,2007,43(14):144-147

[9] Wu Yue-ping, Zheng Jian-guo. Collaborative Filtering Recommendation Algorithm on improved similarity measure method [J]. Computer Applications and Software,2011,28(10)

[10] Deng Ai-lin, Zhu Yang-yong, Shi Bai-le. A Collaborative Filtering Recommendation Algorithm Based on Item Rating Prediction[J]. Journal of Software,2003,14(9):1621-1628

[11] Cheng Shu, Gui Lin, Ji Hang. Subjective Rating Normalization Algorithm and Error Analysis[J]. Journal of Higher Correspondence Education(Natural Sciences),2007,21(5)

[12] Breese J S,Heckerman D,Kadie C. Empirical Analysis of Predictive Algorithms for Callaborative Filtering[R]. Technical Report,MSR-TR-98-12. May 1998

[13] Chen Tian-qi,Zheng Zhao,Lu Qiu-xia,et al. Infomative Ensemble of Multi-Resolution Dynamic Factorization Models[C]// KDD-Cup Workshop. 2011

[14] Chen Tian-qi,Tang Lin-peng,Liu Qin,et al. Combining Factorization Model and Additive Forest for Collaborative Followee Recommendation[C]// KDD-Cup Workshop. 2012

[15] Chen Tian-qi,Zheng Zhao,Yong Yu,et al. Svdfeature:User Reffrence Manual[R]. Technical Report,APEX-TR-2011-09-17. Apex Data & Konwledge Management Lab,Shanghai Jiaotong University,2011

[16] Li Xue, Zuo Wan-li, He Feng-ling, et al. An Improved Item-Based Collaborative Filtering Recommendation Algorithm[J]. Journal of Computer Research and Development,2009,46(Suppl.):394-399