



# 计算机科学

COMPUTER SCIENCE

## 三元概念的布尔矩阵表示方法

王霞, 李俊余, 吴伟志

引用本文

王霞, 李俊余, 吴伟志. 三元概念的布尔矩阵表示方法[J]. 计算机科学, 2023, 50(6): 109-115.

WANG Xia, LI Junyu, WU Weizhi. [Boolean Matrix Representation of Triadic Concepts](#)[J]. Computer Science, 2023, 50(6): 109-115.

---

## 相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

**Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)**

[不协调广义决策多尺度序信息系统的最优尺度选择与规则提取](#)

Optimal Scale Selection and Rule Acquisition in Inconsistent Generalized Decision Multi-scale Ordered Information Systems

计算机科学, 2023, 50(6): 131-141. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.220800149>

[随机多尺度序决策系统的最优尺度选择](#)

Optimal Scale Selection in Random Multi-scale Ordered Decision Systems

计算机科学, 2022, 49(6): 172-179. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.220200067>

[一种基于概念可辨识矩阵的概念约简方法](#)

Method of Concept Reduction Based on Concept Discernibility Matrix

计算机科学, 2021, 48(1): 125-130. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.200800013>

[基于变精度和浓缩布尔矩阵的属性约简](#)

Attribute Reduction Based on Variable Precision Rough Sets and Concentration Boolean Matrix

计算机科学, 2017, 44(Z6): 70-74. <https://doi.org/10.11896/j.issn.1002-137X.2017.6A.014>

[改进的无证书代理盲签名方案](#)

Improved Certificateless Proxy Blind Signature Scheme

计算机科学, 2016, 43(8): 92-94. <https://doi.org/10.11896/j.issn.1002-137X.2016.08.019>

# 三元概念的布尔矩阵表示方法

王霞 李俊余 吴伟志

浙江海洋大学信息工程学院 浙江舟山 316022

浙江省海洋大数据挖掘与应用重点实验室(浙江海洋大学) 浙江舟山 316022

(bblylm@126.com)

**摘要** 将布尔矩阵引入到三元概念分析,研究三元背景和三元概念的布尔矩阵表示方法。首先,定义三元背景的关系矩阵,将每一个条件下的三元背景看作一个布尔矩阵,那么三元背景是一个布尔分块矩阵,该布尔分块矩阵即为三元背景的关系矩阵。然后,利用关系矩阵给出三元背景上诱导算子的布尔矩阵表示方法,进而得到生成三元概念的外延、内涵和方式的布尔矩阵表示方法,该方法在生成三元概念时只使用一些基本的布尔矩阵运算而不涉及三元背景的诱导算子。最后,给出构造三元概念的枚举法的布尔矩阵表示方法以及基于对象-条件三元概念构造三元概念的布尔矩阵表示方法。三元概念的布尔矩阵表示方法从矩阵的角度理解三元背景和三元概念,为研究三元概念分析提供了新的视角。

**关键词**:三元概念分析;三元背景;三元概念;诱导算子;布尔矩阵

**中图分类号** TP301

## Boolean Matrix Representation of Triadic Concepts

WANG Xia, LI Junyu and WU Weizhi

School of Information Engineering, Zhejiang Ocean University, Zhoushan, Zhejiang 316022, China

Key Laboratory of Oceanographic Big Data Mining and Application of Zhejiang Province(Zhejiang Ocean University), Zhoushan, Zhejiang 316022, China

**Abstract** The Boolean matrix method is introduced into triadic concept analysis to study the Boolean matrix representation method of triadic context and triadic concept. Firstly, the relation matrix of triadic context is defined. The triadic context under each condition is regarded as a Boolean matrix, then the triadic context is a Boolean block matrix, which is the relation matrix of triadic context. Next, the Boolean matrix representation method of induced operators on triadic context is investigated by using the relation matrix. Then, the Boolean matrix representation method of the extent, intent and modus of a triadic concept is obtained. This method only uses some basic Boolean matrix operations when generating triadic concepts, and does not involve the induced operator of triadic context. Finally, the Boolean matrix representation methods are given according to enumeration method of triadic concept construction and triadic concept construction based on object-conditional triadic concepts respectively. Triadic contexts and triadic concepts are explored from the viewpoint of matrix based on the Boolean matrix representation method of triadic concepts, which gives a new perspective to study triadic concept analysis.

**Keywords** Triadic concept analysis, Triadic context, Triadic concept, Induced operator, Boolean matrix

## 1 引言

1982年,德国数学家 Wille 等<sup>[1-2]</sup>基于概念的哲学观点提出了形式概念分析理论,它是数据分析、知识发现和知识处理的有效工具。形式概念分析以形式背景为研究对象,通过定义形式概念建立一种概念层次结构来描述对象和属性之间的联系。经典形式背景是由数值 0 或 1 构成的二维交叉表,即当对象  $x$  具有属性  $g$  时,则在二维交叉表的相应位置用“1”

标出,而当对象  $x$  不具有属性  $g$  时,则在二维交叉表的相应位置用“0”标出。因此,经典形式背景可以看作一个布尔矩阵。Zhang<sup>[3]</sup>将布尔矩阵引入到形式概念分析,并借助布尔矩阵运算给出决策形式背景协调集判断的新方法。Li 等<sup>[4]</sup>提出了布尔形式背景,给出了布尔形式概念的定义,得到了布尔形式概念的计算。Shi 等<sup>[5]</sup>利用布尔向量的逻辑运算定义了布尔面向对象(属性)概念格,简化了构造面向对象(属性)概念格的过程。此外,也有许多学者利用布尔矩阵理论研究

到稿日期:2022-09-11 返修日期:2023-03-22

基金项目:国家自然科学基金(61573321,41631179,61773349);浙江省自然科学基金(LY18F030017)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61573321,41631179,61773349) and Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China(LY18F030017).

通信作者:李俊余(junyu3737@126.com)

概念格的约简方法及算法<sup>[6-17]</sup>。

1995年,Willie<sup>[19]</sup>基于皮尔斯范畴三分理论提出了三元概念分析。三元概念分析的研究对象是三元背景,它是由数值0或1构成的三维交叉表。三元概念分析的另一个核心概念是三元概念,它由外延、内涵和方式3部分构成。三元概念分析是形式概念分析的推广。目前,关于三元概念分析的研究已有许多成果<sup>[8-45]</sup>,其中三元概念的构造方法主要有构造三元概念的枚举法<sup>[9]</sup>、基于对象-条件三元概念构造三元概念的方法<sup>[44]</sup>和增量式构造方法<sup>[45]</sup>。以上3种构造方法都基于三元背景的诱导算子,其中枚举法是从对象幂集、属性幂集和条件幂集中选定两个集合,从选定的两个幂集的任意子集出发构造三元概念,计算量较大。基于对象-条件三元概念构造法,从任意对象和条件出发构造对象-条件三元概念,进而生成所有的三元概念,该方法体现了对象-条件三元概念的重要地位,相比枚举法计算量更小。增量式构造方法考是在虑到三元背景增加的过程中三元概念的更新及增减变化的基础上提出的概念构造方法,该方法的计算量最小。由于三元背景形式上是一个布尔矩阵,因此本文考虑从布尔矩阵的角度研究三元背景和三元概念。首先将布尔矩阵方法引入到三元概念分析,研究三元背景和三元概念的布尔表示方法,并进一步探索只使用布尔矩阵运算而不涉及诱导算子的三元概念的布尔表示方法。最后以文献<sup>[19]</sup>和文献<sup>[44]</sup>中的构造三元概念的两种方法为例,给出相应的布尔表示方法。

## 2 相关工作

本节给出了三元概念分析的相关概念和结论。

三元背景<sup>[8]</sup>是一个四元组 $(K_1, K_2, K_3, Y)$ ,其中 $K_1, K_2, K_3$ 为非空集合, $Y$ 为 $K_1, K_2, K_3$ 之间的关系,即 $Y \subseteq K_1 \times K_2 \times K_3$ ,分别称 $K_1, K_2, K_3$ 为对象集、属性集和条件集, $K_1, K_2, K_3$ 的元素为对象、属性和条件。若对象 $x$ 、属性 $g$ 和条件 $c$ 具有关系 $Y$ ,则记为 $(x, g, c) \in Y$ ,表示对象 $x$ 在条件 $c$ 下具有属性 $g$ 。

设 $(K_1, K_2, K_3, Y)$ 为三元背景, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ 且 $j < k, X \subseteq K_i, Z \subseteq K_j \times K_k$ ,文献<sup>[18]</sup>定义了 $(i)$ -诱导算子:

$$X^{(i)} = \{(a_j, a_k) \in K_j \times K_k \mid \forall a_i \in K_i, a_i, a_j, a_k \text{ 具有关系 } Y\}$$

$$Z^{(i)} = \{a_i \in K_i \mid \forall (a_j, a_k) \in Z, a_i, a_j, a_k \text{ 具有关系 } Y\}$$

**定义 1<sup>[8]</sup>** 设 $(K_1, K_2, K_3, Y)$ 是一个三元背景,称 $(A_1, A_2, A_3)$ 为三元背景 $(K_1, K_2, K_3, Y)$ 的一个三元概念,如果对任意的 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}, j < k$ ,且 $A_i \subseteq K_i$ 有 $A_i = (A_j \times A_k)^{(i)}$ 。分别称 $A_1, A_2, A_3$ 为该三元概念的外延、内涵和方式。

三元背景 $(K_1, K_2, K_3, Y)$ 的所有三元概念构成的集合记为 $\mathfrak{S}(K_1, K_2, K_3, Y)$ 。

为了书写方便,以下将 $(i)$ -诱导算子统一记为 $*$ 算子,即 $\forall X \subseteq K_i, \forall Z \subseteq K_j \times K_k$ :

$$X^* = \{(a_j, a_k) \in K_j \times K_k \mid \forall a_i \in K_i, a_i, a_j, a_k \text{ 具有关系 } Y\}$$

$$Z^* = \{a_i \in K_i \mid \forall (a_j, a_k) \in Z, a_i, a_j, a_k \text{ 具有关系 } Y\}$$

## 3 三元背景的子背景

本节将给出三元背景的子背景、子背景上的诱导算子的概念及相关性质。

**定义 2** 设 $(K_1, K_2, K_3, Y)$ 是一个三元背景, $\forall C \subseteq K_3, C \neq \emptyset$ ,称 $(K_1, K_2, C, Y_C)$ 为三元背景 $(K_1, K_2, K_3, Y)$ 关于条件子集 $C$ 的子背景,其中 $Y_C = Y \cap K_1 \times K_2 \times C$ 。

$\forall X \subseteq K_1, \forall B \subseteq K_2, \forall C_1 \subseteq C$ ,子背景 $(K_1, K_2, C, Y_C)$ 的诱导算子记为 ${}^*C$ 。当 $C = K_3$ 时,将 ${}^*C$ 简记为 $*$ 。

根据定义2容易得到性质1和性质2。

**性质 1** 设 $(K_1, K_2, K_3, Y)$ 为三元背景, $C \subseteq K_3$ 且 $C \neq \emptyset$ ,则 $\forall X \subseteq K_1, \forall B \subseteq K_2, \forall C_1 \subseteq C$ 有:

$$(1) X^*C = X^* \cap (K_2 \times C); B^*C = B^* \cap (K_1 \times C); C_1^*C = C_1^*;$$

$$(2) (X \times C_1)^*C = (X \times C_1)^*; (B \times C_1)^*C = (B \times C_1)^*; (X \times B)^*C = (X \times B)^* \cap C.$$

**性质 2** 设 $(K_1, K_2, K_3, Y)$ 为三元背景, $C \subseteq K_3$ 且 $C \neq \emptyset$ ,则 $\forall X \subseteq K_1, \forall B \subseteq K_2, \forall C_1 \subseteq C$ 有:

$$(1) X^*C = \bigcup_{c_k \in C} X^* \{c_k\};$$

$$(2) B^*C = \bigcup_{c_k \in C} B^* \{c_k\};$$

$$(3) (X \times C)^* = \bigcap_{c_k \in C} (X \times \{c_k\})^*;$$

$$(4) (B \times C)^* = \bigcap_{c_k \in C} (B \times \{c_k\})^*.$$

由性质2可得,若 $X \neq \emptyset, B \neq \emptyset, C \neq \emptyset$ ,则有 $X^*C =$

$$\bigcap_{x_i \in X} \{x_i\}^*C = \bigcup_{c_k \in C} \bigcap_{x_i \in X} \{x_i\}^* \{c_k\}; B^*C = \bigcap_{g_j \in B} \{g_j\}^*C = \bigcup_{c_k \in C} \bigcap_{g_j \in B} \{g_j\}^* \{c_k\}; (X \times C)^* = \bigcap_{x_i \in X} ((x_i \times C)^* = \bigcap_{c_k \in C} [\bigcap_{x_i \in X} (\{x_i\} \times \{c_k\})^*]; (B \times C)^* = \bigcap_{g_j \in B} ((g_j \times C)^* = \bigcap_{c_k \in C} [\bigcap_{g_j \in B} (\{g_j\} \times \{c_k\})^*]; (X \times B)^* = \bigcap_{g_j \in B} [\bigcap_{x_i \in X} (\{x_i\} \times \{g_j\})^*].$$

## 4 三元背景的布尔矩阵表示

设 $(K_1, K_2, K_3, Y)$ 为三元背景,对象集 $K_1$ 、属性集 $K_2$ 和条件集 $K_3$ 均为有限集合。不妨设 $K_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, K_2 = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}, K_3 = \{c_1, c_2, \dots, c_t\}$ 。若对象 $x$ 、属性 $g$ 和条件 $c$ 具有关系 $Y$ ,即 $(x, g, c) \in Y$ ,则在三维交叉表的相应位置用“1”标出;若 $(x, g, c) \notin Y$ ,则在三维交叉表的相应位置用“0”标出。记 $Q = (Q^1 : Q^2 : \dots : Q^t)$ ,其中 $Q^k = (q_{ij}^k)_{n \times m}$ 为一个 $n \times m$ 布尔矩阵。

$$q_{ij}^k = \begin{cases} 1, & (x_i, g_j, c_k) \in Y \\ 0, & (x_i, g_j, c_k) \notin Y \end{cases}$$

因此, $q_{ij}^k = 1$ 当且仅当 $(x_i, g_j, c_k) \in Y$ ,即对象 $x_i$ 在条件 $c_k$ 下具有属性 $g_j$ ,称 $Q$ 为三元背景 $(K_1, K_2, K_3, Y)$ 的关系矩阵。

设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, B \subseteq A$ ,则由 $B$ 确定的特征向量为 $\lambda_B = (\lambda_B(a_1), \lambda_B(a_2), \dots, \lambda_B(a_n))$ ,其中:

$$\lambda_B(a_i) = \begin{cases} 1, & a_i \in B \\ 0, & a_i \notin B \end{cases}$$

并称 $B$ 为特征向量 $\lambda_B$ 对应的原集合。

**定理 1** 设 $(K_1, K_2, K_3, Y)$ 为三元背景, $Q = (Q^1 : Q^2 : \dots$

: $Q'$ )为其关系矩阵,则 $\forall x_i \in K_1, \forall g_j \in K_2, \forall c_k \in K_3$ 有:

$$(1) \lambda_{(\{x_i\} \times \{c_k\})'} = \lambda_{\{x_i\}} Q^k;$$

$$(2) \lambda_{(\{g_j\} \times \{c_k\})'} = \lambda_{\{g_j\}} (Q^k)^T;$$

$$(3) \lambda_{(\{x_i\} \times \{g_j\})'}(c_k) = \lambda_{\{x_i\}} Q^k (\lambda_{\{g_j\}})^T.$$

证明:(1) 由于 $\forall g_j \in K_2, \lambda_{(\{x_i\} \times \{c_k\})'}(g_j) = 1 \Leftrightarrow g_j \in (\{x_i\} \times \{c_k\})^*$ ,又因为 $g_j \in (\{x_i\} \times \{c_k\})^* \Leftrightarrow (x_i, g_j, c_k) \in Y$ 。再结合矩阵 $Q^k$ 的定义知, $(x_i, g_j, c_k) \in Y \Leftrightarrow q_{ij}^k = 1$ 。因此, $\forall g_j \in K_2, \lambda_{(\{x_i\} \times \{c_k\})'}(g_j) = 1 \Leftrightarrow q_{ij}^k = 1$ ,故 $\lambda_{(\{x_i\} \times \{c_k\})'} = \lambda_{\{x_i\}} Q^k$ 。

类似地,可以证明结论(2)成立。

(3) 由于 $\forall c_k \in K_3, \lambda_{(\{x_i\} \times \{g_j\})'}(c_k) = 1 \Leftrightarrow c_k \in$

$(\{x_i\} \times \{g_j\})^*$ ,又因为 $c_k \in (\{x_i\} \times \{g_j\})^* \Leftrightarrow (x_i, g_j, c_k) \in Y \Leftrightarrow q_{ij}^k = 1$ ,所以 $\forall c_k \in K_3, \lambda_{(\{x_i\} \times \{g_j\})'}(c_k) = 1 \Leftrightarrow q_{ij}^k = 1$ ,即 $\lambda_{(\{x_i\} \times \{g_j\})'} = (q_{ij}^1, q_{ij}^2, \dots, q_{ij}^t)$ 。故 $\lambda_{(\{x_i\} \times \{g_j\})'}(c_k) = \lambda_{\{x_i\}} Q^k (\lambda_{\{g_j\}})^T$ 。证毕。

定理1说明 $\lambda_{(\{x_i\} \times \{c_k\})'}$ 为 $Q^k$ 的第 $i$ 个行向量,因此该向量对应的原集合为 $(\{x_i\} \times \{c_k\})^*$ 。 $\lambda_{(\{g_j\} \times \{c_k\})'}$ 为 $Q^k$ 的第 $j$ 个列向量, $\lambda_{(\{x_i\} \times \{g_j\})'} = (q_{ij}^1, q_{ij}^2, \dots, q_{ij}^t)$ ,其中 $q_{ij}^k$ 为矩阵 $Q^k$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列的元素。下面通过例子1详细阐述定理1。

例1 表1列出了一个三元背景 $(K_1, K_2, K_3, Y)$ ,其中 $K_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, K_2 = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}, K_3 = \{c_1, c_2, c_3\}$ 。

表1 三元背景 $(K_1, K_2, K_3, Y)$   
Table 1 Triadic context  $(K_1, K_2, K_3, Y)$

	$c_1$						$c_2$						$c_3$					
	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$
$x_1$	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
$x_2$	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
$x_3$	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1

则表1所列的三元背景对应的关系矩阵记为 $Q = (Q^1 : Q^2 : Q^3)$ ,即:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & : & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & : & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & : & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由定理1中的(1)可得:

$$\lambda_{(\{x_1\} \times \{c_1\})'} = \lambda_{\{x_1\}} Q^1 = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1)$$

显然 $\lambda_{(\{x_1\} \times \{c_1\})'}$ 为 $Q^1$ 的第1行,因此 $(\{x_1\} \times \{c_1\})^* = \{g_1, g_2, g_5, g_6\}$ 。

又因为

$$\lambda_{(\{g_3\} \times \{c_2\})'} = \lambda_{\{g_3\}} (Q^2)^T \\ = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \\ = (0 \ 0 \ 1)$$

所以, $\lambda_{(\{g_3\} \times \{c_2\})'}$ 为 $Q^2$ 的第3行。故, $(\{g_3\} \times \{c_2\})^* = \{x_1\}$ 。

由于

$$\lambda_{(\{x_1\} \times \{g_2\})'}(c_1) = \lambda_{\{x_1\}} Q^1 (\lambda_{\{g_2\}})^T \\ = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = 1$$

所以, $\lambda_{(\{x_1\} \times \{g_2\})'}(c_1)$ 为 $Q^1$ 的第1行第2列的元素。

又由

$$\lambda_{(\{x_1\} \times \{g_2\})'}(c_2) = \lambda_{\{x_1\}} Q^2 (\lambda_{\{g_2\}})^T \\ = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \\ = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T = 1$$

显然, $\lambda_{(\{x_1\} \times \{g_2\})'}(c_2)$ 为 $Q^2$ 的第1行第2列的元素。

由于

$$\lambda_{(\{x_1\} \times \{g_2\})'}(c_3) = \lambda_{\{x_1\}} Q^3 (\lambda_{\{g_2\}})^T \\ = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \\ = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T = 1$$

显然, $\lambda_{(\{x_1\} \times \{g_2\})'}(c_3)$ 为 $Q^3$ 的第1行第2列的元素。所以, $\lambda_{(\{x_1\} \times \{g_2\})'} = (1 \ 1 \ 1)$ ,即 $(\{x_1\} \times \{g_2\})^* = K_3$ 。

定理2 设 $(K_1, K_2, K_3, Y)$ 为三元背景, $Q = (Q^1 : Q^2 : \dots : Q^t)$ 为其关系矩阵,则有:

$$(1) \lambda_{[(\{x_i\} \times \{c_k\})' \times \{c_k\}]'} = \lambda_{\{x_i\}} (\sim [Q^k (\sim Q^k)^T])$$

$$(2) \lambda_{[(\{g_j\} \times \{c_k\})' \times \{c_k\}]'} = \lambda_{\{g_j\}} (\sim [(Q^k)^T (\sim Q^k)])$$

证明:(1) 记 $W^k = \sim [Q^k (\sim Q^k)^T] = (\omega_{il})_{n \times n}$ ,则 $\omega_{il} =$

$1 - \bigvee_{j=1}^m [q_{ij}^k \wedge (1 - q_{ij}^k)]$ 。由于 $\lambda_{[(\{x_i\} \times \{c_k\})' \times \{c_k\}]'}(x_l) = 1 \Leftrightarrow x_l \in [(\{x_i\} \times \{c_k\})^* \times \{c_k\}]^*$ ,这等价于 $\forall g_j \in (\{x_i\} \times \{c_k\})^*$ ,有 $(x_l, g_j, c_k) \in Y$ ,即 $(x_i, g_j, c_k) \in Y \Rightarrow (x_l, g_j, c_k) \in Y$ 。于是, $\lambda_{[(\{x_i\} \times \{c_k\})' \times \{c_k\}]'}(x_l) = 1 \Leftrightarrow q_{ij}^k = 1 \Rightarrow q_{ij}^k = 1, 1 \leq j \leq m$ ,这等价于 $\bigvee_{j=1}^m [q_{ij}^k \wedge (1 - q_{ij}^k)] = 0$ ,即 $1 - \bigvee_{j=1}^m [q_{ij}^k \wedge (1 - q_{ij}^k)] = 1$ 。因此, $\lambda_{[(\{x_i\} \times \{c_k\})' \times \{c_k\}]'} = \lambda_{\{x_i\}} (\sim [Q^k (\sim Q^k)^T])$ 。

类似地可以证明结论(2)成立。证毕。

定理2说明 $\lambda_{[(\{x_i\} \times \{c_k\})' \times \{c_k\}]'}$ 为 $\sim [Q^k (\sim Q^k)^T]$ 的第 $i$ 个行向量, $\lambda_{[(\{g_j\} \times \{c_k\})' \times \{c_k\}]'}$ 为 $\sim [(\sim Q^k)^T Q^k]$ 的第 $j$ 个列向量。

定理3 设 $(K_1, K_2, K_3, Y)$ 为三元背景, $Q = (Q^1 : Q^2 : \dots : Q^t)$ 为其关系矩阵。 $\forall X \subseteq K_1, \forall B \subseteq K_2$ ,则有:

$$(1) \lambda_{(X \times \{c_k\})'} = \sim [\lambda_X (\sim Q^k)];$$

$$(2) \lambda_{(B \times \{c_k\})'} = \sim [\lambda_B (\sim Q^k)^T].$$

证明:(1) 令 $\alpha = \sim [\lambda_X (\sim Q^k)] = (\alpha_j)_{1 \times m}$ ,则 $\forall g_j \in K_2$ 有, $\lambda_{(X \times \{c_k\})'}(g_j) = 1 \Leftrightarrow g_j \in (X \times \{c_k\})^*$ ,这等价于:

$\forall x_i \in K_1$ ,若 $x_i \in X$ ,则有 $(x_i, g_j, c_k) \in Y \Leftrightarrow \forall x_i \in K_1$ ,若

$\lambda_X(x_i) = 1$ ,则有 $q_{ij}^k = 1 \Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^n [\lambda_X(x_i) \wedge (1 - q_{ij}^k)] = 0 \Leftrightarrow 1 -$

$$\bigvee_{i=1}^n [\lambda_X(x_i) \wedge (1 - q_{ij}^k)] = 1 \Leftrightarrow \alpha_j = 1$$

即,  $\lambda_{(X \times \{c_k\})^*} = \sim[\lambda_X(\sim \mathbf{Q}^k)]$ .

类似地可以证明结论(2)。证毕。

对比定理 1 和定理 3 知, 定理 1 是定理 3 的特殊情况。事实上, 若  $X$  为单点集, 不妨设  $X = \{x_i\}$ , 由定理 3 中的(1)可得:

$$\lambda_{(X \times \{c_k\})^*} = \sim[\lambda_X(\sim \mathbf{Q}^k)] = \sim[\lambda_{\{x_i\}}(\sim \mathbf{Q}^k)]$$

又因为  $\lambda_{\{x_i\}}(\sim \mathbf{Q}^k)$  为  $\sim \mathbf{Q}^k$  的第  $i$  个行向量, 所以  $\sim[\lambda_{\{x_i\}}(\sim \mathbf{Q}^k)] = \lambda_{\{x_i\}} \mathbf{Q}^k$ 。类似地, 当  $B = \{g_j\}$  为单点集时, 由定理 3 中的(2)可得:

$$\begin{aligned} \lambda_{(B \times \{c_k\})^*} &= \sim[\lambda_B(\sim \mathbf{Q}^k)^T] = \sim[\lambda_{\{g_j\}}(\sim \mathbf{Q}^k)^T] \\ &= \lambda_{\{g_j\}}(\mathbf{Q}^k)^T \end{aligned}$$

故, 定理 1 是定理 3 的特殊情况。

**定理 4** 设  $(K_1, K_2, K_3, Y)$  为三元背景,  $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}^1 : \mathbf{Q}^2 : \dots : \mathbf{Q}^t)$  为其关系矩阵,  $\forall X \subseteq K_1, \forall B \subseteq K_2, \forall C \subseteq K_3$ , 则有:

(1)  $\forall c_k \in K_3, \lambda_{(X \times B)^*}(c_k) = \sim[\lambda_X(\sim \mathbf{Q}^k)(\lambda_B)^T]$ ;

(2)  $\forall g_j \in K_2, \lambda_{(X \times C)^*}(g_j) = \sim[P_j(\lambda_C)^T]$ , 其中  $P_j = (p_j^1, p_j^2, \dots, p_j^t), p_j^k = \lambda_X(\sim \mathbf{Q}^k)(\lambda_{\{g_j\}})^T$ ;

(3)  $\forall x_i \in K_1, \lambda_{(B \times C)^*}(x_i) = \sim[O_i(\lambda_C)^T]$ , 其中  $O_i = (o_i^1, o_i^2, \dots, o_i^t), o_i^k = \lambda_{\{x_i\}}(\sim \mathbf{Q}^k)(\lambda_B)^T$ 。

证明: (1)  $\forall c_k \in K_3, \lambda_{(X \times B)^*}(c_k) = 1$  等价于  $\forall x_i \in X, \forall g_j \in B, (x_i, g_j, c_k) \in Y$ 。于是  $\forall x_i \in K_1, \forall g_j \in K_2$ , 若  $\lambda_X(x_i) = 1, \lambda_B(g_j) = 1$ , 则

$$\begin{aligned} q_{ij}^k &= 1 \\ \Leftrightarrow \bigvee_{j=1}^m \bigvee_{i=1}^n [\lambda_B(g_j) \wedge \lambda_X(x_i) \wedge (1 - q_{ij}^k)] &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - \bigvee_{j=1}^m \bigvee_{i=1}^n [\lambda_B(g_j) \wedge \lambda_X(x_i) \wedge (1 - q_{ij}^k)] &= 1 \\ \Leftrightarrow \sim[\lambda_X(\sim \mathbf{Q}^k)(\lambda_B)^T] &= 1 \end{aligned}$$

类似地可以证明结论(2)和结论(3)。证毕。

由定理 4 知,

$$\lambda_{(X \times B)^*} = \{\lambda_{(X \times B)^*}(c_1), \lambda_{(X \times B)^*}(c_2), \dots, \lambda_{(X \times B)^*}(c_t)\}$$

其中,  $\lambda_{(X \times B)^*}(c_k) = \sim[\lambda_X(\sim \mathbf{Q}^k)(\lambda_B)^T], \forall c_k \in K_3$ 。

$\forall X \subseteq K_1, \forall C \subseteq K_3$ , 根据定理 4 可得, 由  $X$  和  $C$  生成三元概念  $(A_1, A_2, A_3)$  的流程图如图 1 所示。具体步骤如下:

步骤 1 计算三元概念的内涵  $(X \times C)^*$ 。

由  $\forall g_j \in K_2, \lambda_{(X \times C)^*}(g_j) = \sim[P_j(\lambda_C)^T]$ , 其中  $P_j = (p_j^1, p_j^2, \dots, p_j^t), p_j^k = \lambda_X(\sim \mathbf{Q}^k)(\lambda_{\{g_j\}})^T$ , 得  $(X \times C)^*$ , 将其记为  $A_2$ 。

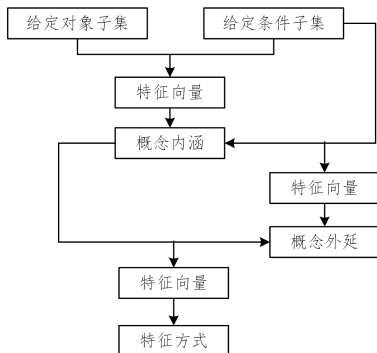


图 1 三元概念流程图

Fig. 1 Flow chart of triadic concept

步骤 2 计算三元概念的外延  $(A_2 \times C)^*$ 。

由  $\forall x_i \in K_1, \lambda_{(A_2 \times C)^*}(x_i) = \sim[O_i(\lambda_C)^T]$ , 其中  $O_i = (o_i^1, o_i^2, \dots, o_i^t), o_i^k = \lambda_{\{x_i\}}(\sim \mathbf{Q}^k)(\lambda_{A_2})^T$ , 得  $(A_2 \times C)^*$ , 将其记为  $A_1$ 。

步骤 3 计算三元概念的外延  $(A_1 \times A_2)^*$ 。

由  $\forall c_k \in K_3, \lambda_{(A_1 \times A_2)^*}(c_k) = \sim[\lambda_{A_1}(\sim \mathbf{Q}^k)(\lambda_{A_2})^T]$  得  $(A_1 \times A_2)^*$ , 将其记为  $A_3$ 。

下面通过例子给出三元概念的布尔表示法, 并阐述由一个对象子集和一个条件子集生成三元概念的过程。

例 2 在表 1 所列的三元背景中取  $X_1 \in \{x_1\}, C_1 = \{c_1\}$ , 则由定理 1 中的(1)知,  $\lambda_{(X_1 \times C_1)^*}$  为  $\mathbf{Q}^1$  的第一行, 故  $\lambda_{(X_1 \times C_1)^*} = (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1)$ , 于是  $(X_1 \times C_1)^* = \{g_1, g_2, g_5, g_6\}$ , 将其记为  $A_2$ 。由定理 3 中的(2)可得:

$$\begin{aligned} \lambda_{(A_2 \times C_1)^*} &= \sim[\lambda_{A_2}(\sim \mathbf{Q}^1)^T] \\ &= \sim \begin{bmatrix} (0 \ 0 \ 1) \\ (0 \ 1 \ 0) \\ (1 \ 1 \ 0) \\ (1 \ 0 \ 0) \\ (0 \ 1 \ 1) \\ (0 \ 0 \ 1) \end{bmatrix} \\ &= (1 \ 0 \ 0) \end{aligned}$$

从而  $(A_2 \times C_1)^* = \{x_1\}$ , 将其记为  $A_1$ 。

又因为显然有  $\lambda_{(A_1 \times A_2)^*}(c_1) = 1$ , 且由定理 4(1)可得:

$$\begin{aligned} \lambda_{(A_1 \times A_2)^*}(c_2) &= \sim[\lambda_{A_1}(\sim \mathbf{Q}^2)(\lambda_{A_2})^T] \\ &= \sim \begin{bmatrix} (1) \\ (1) \\ (0) \\ (0) \\ (1) \\ (1) \end{bmatrix} (1 \ 0 \ 0) (0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{(A_1 \times A_2)^*}(c_3) = \sim[\lambda_{A_1}(\sim \mathbf{Q}^3)(\lambda_{A_2})^T]$$

$$= \sim \begin{bmatrix} (1) \\ (1) \\ (0) \\ (0) \\ (1) \\ (1) \end{bmatrix} (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \\ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \end{pmatrix} = 0$$

故  $(A_1 \times A_2)^* = \{c_1\}$ , 所以由  $X_1 \in \{x_1\}, C_1 = \{c_1\}$  生成的三元概念为  $(\{x_1\}, \{g_1, g_2, g_5, g_6\}, \{c_1\})$ 。

若取  $X_2 \in \{x_1, x_3\}, C_2 = \{c_1, c_3\}$ , 则由定理 4 中的(2)可得:

$$\begin{aligned} p_1^1 &= \lambda_{X_2}(\sim \mathbf{Q}^1)(\lambda_{\{g_1\}})^T \\ &= (1 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} (0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0) \\ (0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0) \\ (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1) \\ (0) \\ (0) \\ (0) \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

类似地, 计算得  $p_1^2 = 0, p_1^3 = 1$ , 于是:

$$\lambda_{(X_2 \times C_2)^*}(g_1) = \sim[P_1(\lambda_{C_2})^T] = \sim \begin{bmatrix} (1) \\ (0) \\ (1) \end{bmatrix} (1 \ 0 \ 1) = 0$$

同样地可得:

$\lambda_{(X_2 \times C_2)}(g_2) = 1, \lambda_{(X_2 \times C_2)}(g_3) = 0, \lambda_{(X_2 \times C_2)}(g_4) = 0,$   
 $\lambda_{(X_2 \times C_2)}(g_5) = 0, \lambda_{(X_2 \times C_2)}(g_6) = 0,$  从而有  $\lambda_{(X_2 \times C_2)} =$   
 $(0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ , 所以  $(X_2 \times C_2)^* = \{g_2\}$ 。

再根据定理 4 中的(3)可得:

$$o_1^1 = \lambda_{(x_1)}(\sim Q^1)(\lambda_{(g_2)})^T$$

$$= (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

类似地可计算  $o_1^2 = 0, o_1^3 = 0,$  故

$$\lambda_{(\{g_2\} \times C_2)}(x_1) = \sim [O_1 (\lambda_{C_2})^T] = \sim [(0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}] = 1$$

同样地, 可计算  $\lambda_{(\{g_2\} \times C_2)}(x_2) = 0, \lambda_{(\{g_2\} \times C_2)}(x_3) = 1,$  从而  $\lambda_{(\{g_2\} \times C_2)} = (1 \ 0 \ 1)$ , 所以  $(\{g_2\} \times C_2)^* = \{x_1, x_3\}$ 。

最后由定理 4 中的(1)可得:

$$\lambda_{(\{x_1, x_3\} \times \{g_2\})}(c_1) = \sim [\lambda_{(x_1, x_3)}(\sim Q^1)(\lambda_{(g_2)})^T]$$

$$= \sim \left[ (1 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 1$$

同理可得:

$$\lambda_{(\{x_1, x_3\} \times \{g_2\})}(c_2) = 1, \lambda_{(\{x_1, x_3\} \times \{g_2\})}(c_3) = 1$$

即  $\lambda_{(\{x_1, x_3\} \times \{g_2\})} = (1 \ 1 \ 1)$ , 所以  $(\{x_1, x_3\} \times \{g_2\})^* = K_3$ , 故由  $X_2 \in \{x_1, x_3\}, C_2 = \{c_1, c_3\}$  生成的三元概念为  $(\{x_1, x_3\}, \{g_2\}, K_2)$ 。

根据定理 4 可计算表 1 所列的三元背景的所有三元概念构成的集合:

$$\mathfrak{S} = \{(\emptyset, K_2, K_3), (K_1, \emptyset, K_3), (K_1, K_2, \emptyset), (\{x_1\}, \{g_1, g_2, g_5, g_6\}, \{c_1\}), (\{x_1\}, \{g_2, g_6\}, \{c_1, c_3\}), (\{x_1\}, \{g_1, g_2, g_5\}, \{c_1, c_2\}), (\{x_1\}, \{g_2, g_3, g_6\}, \{c_3\}), (\{x_2\}, \{g_1, g_4, g_6\}, \{c_1\}), (\{x_2\}, \{g_4, g_6\}, \{c_1, c_2\}), (\{x_2\}, \{g_1, g_3, g_5\}, \{c_3\}), (\{x_2\}, \{g_1\}, \{c_1, c_3\}), (\{x_3\}, \{g_2, g_3, g_4\}, \{c_1, c_2\}), (\{x_3\}, \{g_2, g_4\}, K_3), (\{x_3\}, \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}, \{c_2\}), (\{x_3\}, \{g_1, g_2, g_4\}, \{c_2, c_3\}), (\{x_1, x_2\}, \{g_1, g_6\}, \{c_1\}), (\{x_3\}, \{g_1, g_2, g_4, g_6\}, \{c_3\}), (\{x_1, x_2\}, \{g_3\}, \{c_3\}), (\{x_2, x_3\}, \{g_4\}, \{c_1, c_2\}), (\{x_1, x_3\}, \{g_2\}, K_3), (\{x_1, x_3\}, \{g_2, g_6\}, \{c_3\}), (\{x_1, x_3\}, \{g_1, g_2, g_5\}, \{c_2\}), (\{x_2, x_3\}, \{g_1\}, \{c_3\})\}$$

### 5 三元概念构造方法的布尔矩阵表示

本节将三元背景上的诱导算子替换为相应的布尔矩阵运算, 给出构造三元概念的枚举法<sup>[9]</sup>和基于对象-条件三元概念构造三元概念的方法<sup>[44]</sup>的布尔矩阵表示。

#### 5.1 枚举法的布尔矩阵表示

设  $(K_1, K_2, K_3, Y)$  是一个三元背景,  $X_i \subseteq K_i, X_k \subseteq K_k, \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , 定义  $b_{ik}(X_i, X_k) := (A_1, A_2, A_3), i \neq k$

其中  $A_j := (X_i \times X_k)^{(j)}, A_i := (A_j \times X_k)^{(i)}, A_k := (A_i \times A_j)^{(k)}$ 。

**命题 1**<sup>[9]</sup> 设  $(K_1, K_2, K_3, Y)$  是一个三元背景,  $X_i \subseteq K_i, X_k \subseteq K_k, \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , 则有  $b_{ik}(X_i, X_k) = (A_1, A_2, A_3) \in \mathfrak{S}(K_1, K_2, K_3, Y)$ 。

$\forall (B_1, B_2, B_3) \in \mathfrak{S}(K_1, K_2, K_3, Y)$ , 若  $X_i \subseteq B_i, X_k \subseteq B_k$ , 则  $B_j \subseteq A_j$ , 且当  $B_j = A_j$  时,  $A_i \supseteq B_i, A_k \subseteq B_k$ 。

由命题 1 知,

$$\mathfrak{S}(K_1, K_2, K_3, Y) = \{b_{ik}(X_i, X_k) \mid X_i \subseteq K_i, X_k \subseteq K_k, \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}\}$$

下面基于枚举法和布尔矩阵表示给出构造三元概念的步骤。

**步骤 1**  $\forall X \in K_1, \forall C \in K_3$ , 计算  $\lambda_{(X \times C)^*}$ , 其中  $\forall g_j \in K_2, \lambda_{(X \times C)^*}(g_j) = \sim P_j (\lambda_C)^T$ 。

**步骤 2** 由  $\lambda_{(X \times C)^*}$  计算  $(X \times C)^*$ , 并将其记为  $A_2$ 。

**步骤 3** 计算  $(A_2 \times C)^*$ , 其中  $\forall x_i \in K_1, \lambda_{(A_2 \times C)^*}(x_i) = \sim [O_i (\lambda_C)^T]$ 。

**步骤 4** 由  $(A_2 \times C)^*$  计算  $(A_2 \times C)^*$ , 并将其记为  $A_1$ 。

**步骤 5** 计算  $\lambda_{(A_1 \times A_2)^*}$ , 其中  $\forall c_k \in K_3, \lambda_{(A_1 \times A_2)^*}(c_k) = \sim [\lambda_{A_1} (\sim Q^k) (\lambda_{A_2})^T]$ 。

**步骤 6** 由  $\lambda_{(A_1 \times A_2)^*}$  计算  $(A_1 \times A_2)^*$ , 并将其记为  $A_3$ 。

根据以上步骤可计算所有的三元概念  $(A_1, A_2, A_3)$ 。

#### 5.2 基于对象-条件三元概念构造法的布尔矩阵表示

三元背景  $(K_1, K_2, K_3, Y), \forall (x_i, c_k) \in K_1 \times K_3$ , 文献 [44] 定义了对象-条件三元概念  $b_{13}(x_i, c_k) = (OC_1, OC_2, OC_3)$ , 其中,  $OC_2 = (\{x_i\} \times \{c_k\})^*, OC_1 = (OC_2 \times \{c_k\})^*, OC_3 = (\{OC_1 \times OC_2\})^*$ 。对任意的三元概念  $(A_1, A_2, A_3)$ , 若  $A_1 \neq \emptyset, A_3 \neq \emptyset$ , 则  $(A_1, A_2, A_3) = \bigvee_{OC} \{b_{13}(x, c) \mid (x, c) \in A_1 \times A_3\}$ , 其中  $A_2 = \bigcap \{(\{x\} \times \{c\})^* \mid (x, c) \in A \times C\}, A_3 = \bigcap \{(\{x\} \times A_2)^* \mid x \in A\}, A_1 = (A_2 \times A_3)^*$ 。

利用该运算提出一种基于对象-条件三元概念生成三元概念的方法。

下面给出基于对象-条件三元概念生成三元概念的布尔矩阵表示流程图, 如图 2 所示, 其具体步骤如下。

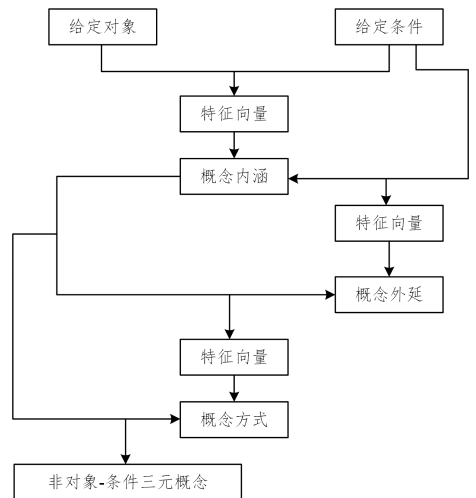


图 2 基于对象-条件三元概念的布尔矩阵表示流程图

Fig. 2 Flow chart of Boolean matrix representation method based on object-condition triadic concept

步骤1  $\forall c_k \in K_3$ , 由  $\lambda_{(\{x_i\} \times \{c_k\})^*} = \lambda_{\{x_i\}} \mathbf{Q}^k$  计算对象-条件三元概念的内涵  $(x_i \times c_k)^* = OC_2$ , 再由  $\lambda_{((x_i \times c_k)^* \times \{c_k\})^*} = \sim[\lambda_{(x_i \times c_k)^*} (\sim \mathbf{Q}^k)^T]$  计算该对象-条件三元概念的外延  $((x_i \times c_k)^* \times \{c_k\})^* = OC_1$ .

步骤2 由  $\forall c_k \in K_3, \lambda_{(OC_1 \times OC_2)^*} (c_k) = \sim[\lambda_{OC_1} (\sim \mathbf{Q}^k) (\lambda_{OC_2})^T]$  计算该对象-条件三元概念的方式  $(OC_1 \times OC_2)^* = OC_3$ .

记  $(K_1, K_2, K_3, Y)$  的所有对象-条件三元概念为  $OC(K_1, K_2, K_3, Y)$ .

步骤3  $\forall (A, C) \subseteq K_1 \times K_3, A \neq \emptyset, C \neq \emptyset$ , 若不存在  $(A_1, A_2, A_3) \in OC(K_1, K_2, K_3, Y)$  使得  $(A, C) = (A_1, A_2)$ , 则由  $\bigvee_{OC} \{b_{13}(x_i, c_k) \mid (x_i, c_k) \in A \times C\}$  生成三元概念。

**结束语** 本文将布尔矩阵方法引入到三元形式概念分析, 定义了三元背景和诱导算子的布尔矩阵表示方法, 并利用布尔矩阵运算给出了计算三元概念的步骤。在此基础上, 以文献[19]和文献[44]提出的构造三元概念的方法为例, 分别给出了这两种构造方法的布尔矩阵表示。在本文的基础上还可以考虑利用布尔矩阵理论研究三元概念约简以及决策获取等相关问题。

## 参考文献

- [1] WILLE R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts [G] // *Ordered Sets*. Dordrecht, Reidel, 1982; 445-470.
- [2] GANTER B, WILLE R. *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations* [M] // Berlin: Springer, 1999; 17-61.
- [3] ZHANG Q X. The judgment method of consistent sets in decision formal context based on Boolean matrix [J]. *Journal of Zhangzhou Normal University (Natural Sciences)*, 2012, 25(1): 22-25.
- [4] LI T J, WANG X, XU Y H. Boolean computation approach of formal concepts [J]. *Journal of Nanjing University (Natural Sciences)*, 2013, 49(5): 553-560.
- [5] SHI H, WEI L. Boolean expression of object (property)-oriented concept lattice [J]. *Journal of Nanjing University (Natural Sciences)*, 2015, 51(2): 415-420.
- [6] SHAO M W, LIU M, GUO L. Vector-based attribute reduction method for formal contexts [J]. *Fundamenta Informaticae*, 2013, 126(4): 397-414.
- [7] SHI H. Boolean expression and attribute reduction of object (property)-oriented concept lattice [D]. Xi'an: Northwest University, 2015.
- [8] WANG D L. Attribute reduction for concept lattice with matrix [J]. *Computer Applications*, 2009, 31(6): 28-32.
- [9] WANG D L. Knowledge reduction algorithm based on elementary row transformation of Boolean matrix [J]. *Computer Applications*, 2007(9): 2267-2269.
- [10] WAN Q, MA Y C, YANG X F. The reduction of formal context based on Boolean matrix [J]. *Basic Sciences Journal of Textile Universities*, 2019, 32(1): 67-72.
- [11] ZHANG C L, LI J J, LIN Y D. Matrix-type attribute reduction for inconsistent formal decision context S [J]. *Journal of Frontiers of Computer Science and Technology*, 2020, 14(3): 534-540.
- [12] ZHANG C L. Research on matrix approach to attribute reduction in concept lattice model [D]. Zhangzhou: Minnan Normal University, 2021.
- [13] LIN Y D, LI J J, ZHANG C L. Attribute reductions of fuzzy-crisp concept lattices based on matrix [J]. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2020, 33(1): 21-31.
- [14] HUANG Q. Attribute reduction approach to an ordered information system based on boolean matrix [D]. Xi'an: Northwest University, 2016.
- [15] ZHANG Q X. Attribute reduction method for concept lattice based on Boolean matrices [D]. Zhangzhou: Zhangzhou Normal University, 2012.
- [16] TRNECKA M, VYJIDACEK R. Revisiting the GreCon algorithm for Boolean matrix factorization [C] // *Proceedings of the 15th International Conference on Concept Lattices and Their Applications*. 2020; 59-70.
- [17] TRNECKA M, TRNECKOVA M. Data reduction for boolean matrix factorization algorithms based on formal concept analysis [J]. *Knowledge-Based Systems*, 2018, 158: 75-80.
- [18] LEHMANN F, WILLE R. A triadic approach to formal concept analysis [C] // *Proceeding of the 3rd International Conference on Conceptual Structures Applications, Implementation and Theory*. Berlin: Springer, 1995; 32-43.
- [19] WILLE R. The basic theorem of triadic concept analysis [J]. *Order*, 1995, 12(2): 149-158.
- [20] BIEDERMANN K. Triadic Galois connections [G] // *General Algebra and Applications in Discrete Mathematics*. Aachen: Shaker Verlag, 1997; 23-33.
- [21] BIEDERMANN K. An equational theory for trilattices [J]. *Algebra Universalis*, 1999, 42(4): 253-268.
- [22] GROH B, WILLE R. Lattices of triadic concept graphs [C] // *Proceeding of the 8th International Conference on Conceptual Structures*. Berlin: Springer, 2000; 332-341.
- [23] BIEDERMANN K. How triadic diagrams represent conceptual structures [C] // *Proceeding of the 5th International Conference on Conceptual Structures Fulfilling Peirce's Dream*. Berlin: Springer, 1997; 304-317.
- [24] GANTER B, OBIEDKOV S A. Implications in triadic formal contexts [C] // *Proceeding of the 12th International Conference on Conceptual Structures*. Berlin: Springer, 2004; 186-195.
- [25] MISSAOUI R, KWUIDA L. Mining triadic association rules from ternary relations [C] // *Proceeding of the 9th International Conference on Formal Concept Analysis*. Berlin: Springer, 2011; 204-218.
- [26] DAU F, WILLE R. On the modal understanding of triadic context [G] // *Classification and Information Processing at the Turn of the Millennium*. Berlin: Springer, 2000; 83-94.
- [27] JASCHKE R, HOTH O A, SCHMITZ C, et al. TRIAS-an algorithm for mining iceberg trilattices [C] // *Proceeding of the 6th International Conference on Data Mining*. Piscataway, NJ: IEEE, 2006; 907-911.

- [28] KAVTOUE M, KUZNETSOV S, MACKO J, et al. Minging bi-clusters of similar values with triadic concept analysis[C]//Proceeding of the 8th International Conference on Concept Lattices and Their Applications. Berlin; Springer, 2011: 175-190.
- [29] KAYTOUE M, KUZNETSOV S O, MACKO J, et al. Biclustering meets triadic concept analysis[J]. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 2014, 70(1/2): 55-79.
- [30] BELOHLAVEK R, VYCHODIL V. Optimal factorization of three-way binary data[C]//Proceeding of 2010 IEEE International Conference on Granular Computing. Piscataway, NJ: IEEE, 2010: 61-66.
- [31] GLODEANU C. Factorization methods of binary, triadic, real and fuzzy data[J]. Studia Universitatis Babes-Bolyai Series Informatica, 2011, 56(2): 81-86.
- [32] BELOHLAVEK R, GLODEANU C, VYCHODIL V. Optimal factorization of three-way binary data using triadic concepts[J]. Order, 2013, 30(2): 437-454.
- [33] CYNTHIA G. Tri-ordinal factor analysis[C]//Proceeding of the 11th International Conference on Formal Concept Analysis. Berlin; Springer, 2013: 125-140.
- [34] BELOHLAVEK R, OSICKA P. Triadic concept analysis of data with fuzzy attributes[C]//Proceeding of 2010 IEEE International Conference on Granular Computing. Piscataway, NJ: IEEE, 2010: 661-665.
- [35] BELOHLAVEK R, OSICKA P. Triadic concept lattices of data with graded attributes[J]. International Journal of General System, 2012, 41(2): 93-108.
- [36] KONECNY J, OSICKA P. Triadic concept lattices in the framework of aggregation structures[J]. Information Sciences, 2014, 279(1): 512-527.
- [37] GLODEANU C. Fuzzy-Valued triadic implications [C]//Proceeding of the 7th International Conference on Concept Lattices and Their Applications. 2011: 159-173.
- [38] BELOHLAVEK R, OSICKA P. Triadic fuzzy Galois connections as ordinary connections[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2014, 249: 83-99.
- [39] TANG Y Q, FAN M, LI J H. Cognitive system model and approach to transformation of information granules under triadic formal concept analysis [J]. Journal of Shandong University: Natural Science, 2014, 49(8): 102-106.
- [40] QI J J, WEI L. Simplification of triadic contexts and concept tri-lattices[J]. Computer Science, 2017, 44(9): 53-57.
- [41] WANG X, ZHANG Q, LI J Y, et al. Triadic concept analysis based on rough set theory[J]. Journal of Northwest University: Natural Science Edition, 2017, 52(7): 37-43.
- [42] KUMAR C A, MOULISWARAN S C, LI J H, et al. Role based access control design using triadic concept analysis[J]. Journal of Central South University, 2016, 23(12): 3183-3191.
- [43] LI Z, ZHANG Z, WANG L M. Research text classification algorithm based on triadic concept analysis[J]. Computer Science, 2017, 44(8): 207-215.
- [44] WANG X, JIANG SH, LI J Y, et al. A construction method of triadic concepts[J]. Journal of Computer Research and Development, 2019, 56(4): 844-853.
- [45] WANG X, QUAN Y, LI J Y, et al. Incremental construction method of triadic concepts[J]. Journal of Nanjing University (Natural Sciences), 2022, 58(1): 19-28.



**WANG Xia**, born in 1980, Ph.D, associate professor, is a member of China Computer Federation. Her main research interests include formal concept analysis, rough set theory, and granular computing.



**LI Junyu**, born in 1979, Ph.D, associate professor. His main research interests include formal concept analysis and rough set theory.

(责任编辑:喻黎)