计算机科学
COMPUTER SCIENCE

不协调广义决策多尺度序信息系统的最优尺度选择与规则提取

杨烨, 吴伟志, 张嘉茹

引用本文

杨烨, 吴伟志, 张嘉茹.不协调广义决策多尺度序信息系统的最优尺度选择与规则提取[J]. 计算机科学, 2023, 50(6): 131-141.

YANG Ye, WU Weizhi, ZHANG Jiaru. Optimal Scale Selection and Rule Acquisition in Inconsistent Generalized Decision Multi-scale Ordered Information Systems [J]. Computer Science, 2023, 50(6): 131-141.

计算机科学 COMPUTER SCIENCE

http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.220800149

不协调广义决策多尺度序信息系统的最优尺度选择与规则提取

杨 烨[1] 吴伟志[1,2] 张嘉茹[1]

1 浙江海洋大学信息工程学院 浙江 舟山 316022

2 浙江省海洋大数据挖掘与应用重点实验室(浙江海洋大学) 浙江 舟山 316022

(1523562213@qq.com)

摘 要 粒计算模拟人类思考问题的模式,在大数据挖掘和知识发现方面有独特优势。针对不协调的广义决策多尺度序信息系统的知识获取问题,利用证据理论来研究不协调的广义决策多尺度序信息系统的最优尺度选择与规则提取。首先,将优势关系引入决策多尺度信息系统中,并介绍广义决策多尺度序信息系统的相关概念;其次,通过引入不协调广义决策多尺度序信息系统的尺度组合概念,给出不同尺度组合下信息粒和集合的下近似与上近似的表示及其相互关系,并进一步定义了几种针对不同决策的不协调广义决策多尺度序信息系统的最优尺度组合概念,讨论了它们之间的关系;最后,给出了基于广义优势决策函数的辨识矩阵属性约简与规则提取方法。

关键词:证据理论;多尺度序信息系统;尺度选择;粗糙集;粒计算

中图法分类号 TP182

Optimal Scale Selection and Rule Acquisition in Inconsistent Generalized Decision Multi-scale Ordered Information Systems

YANG Ye[1],WU Weizhi[1,2] and ZHANG Jiaru[1]

1 School of Information Engineering,Zhejiang Ocean University,Zhoushan,Zhejiang 316022,China

2 Key Laboratory of Oceanographic Big Data Mining and Application of Zhejiang Province(Zhejiang Ocean University),Zhoushan,Zhejiang 316022,China

Abstract Granular computing imitates human being's thinking. It shows great promise as a new way for data mining and knowledge discovery in the context of big data. To solve the problem of knowledge acquisition in inconsistent generalized decision multi-scale ordered information systems,by employing evidence theory,the optimal scale combination and rule extraction in inconsistent generalized decision multi-scale ordered information systems are studied. Dominance relations are first introduced into decision multi-scale information systems,and some basic concepts in decision multi-scale ordered information systems are introduced. With reference to the notion of scale combinations in inconsistent generalized decision multi-scale ordered information systems,representations of information granules as well as lower and upper approximations of sets under different scale combinations are presented and their relationships are examined. With different scales of decisions,several types of optimal scale combinations in inconsistent generalized decision multi-scale ordered information systems are further defined and their relationships are clarified. Finally,a method of discernibility matrix attribute reduction and rule acquisition based on generalized dominance decision functions are explored.

Keywords Evidence theory,Multi-scale ordered information systems,Scale selection,Rough sets,Granular computing

1 引言

作为一种新兴的知识表示和知识发现计算范式,粒计算[1](Granular Computing,GrC)主要是以"粒"为计算单位,模仿人类思考的逻辑模型,进行数据挖掘和大规模复杂信息处理等任务[2-4]。除对粒的构造、表示和解释之外,粒计算的研究还包括粒度选择和 IF-THEN 规则提取等。如今,粒计算已成为人工智能理论和应用发展的重要研究领域[5-10]。

Pawlak 提出的粗糙集理论是一种处理不协调和不精确信息的数学工具[11]。作为一种软计算方法,粗糙集理论无需额外的信息,就可以分析隐藏在信息系统中有用的知识和潜在的规则[12-14]。然而,经典 Pawlak 粗糙集模型是基于等价关系的,这使得它在实际应用时具有一定的局限性。因此,一方面,在经典 Pawlak 粗糙集模型之上,将等价关系拓展到非等价关系,得到了推广的粗糙集模型[15-16]。而另一方面,在实际生活中,有些属性值是具有优先顺序的,例如等级和分数,具有

到稿日期:2022-08-15 返修日期:2022-11-28

基金项目:国家自然科学基金(61976194,62076221)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61976194,62076221).

通信作者:吴伟志(wuwz@zjou.edu.cn)

这种偏好顺序关系的数据可以用序信息系统来表示。序信息系统主要用于处理多准则决策、信用和风险评估、可行性研究和预测等问题[17]。基于优势关系的粗糙集方法(Dominance-based Rough Set Approach,DRSA)是 Greco 等提出的[18-21],用优势关系取代等价关系来描述属性值的偏好顺序。随后,DRSA 的研究得到了相关领域专家的进一步关注[22-25]。另外,Zhang 等定义了广义优势粗糙集并研究了其在直觉模糊信息系统中的属性约简问题[26]。Hu 等基于动态优势的多粒度粗糙集方法,研究了带有序结构的数据的知识获取问题[27]。

基于粗糙集理论的数据表示形式大多是属性-值模型(称为信息系统或信息表),在经典粗糙集模型中,几乎所有信息表中的每一个对象在一个属性下只取唯一的值。但是,在实际生活中,人们可能要面对同一个对象在同一属性下根据不同观测粒度或者尺度取不同值的数据类型的决策问题。针对这种情况,Wu 等[28]提出了一种新的粗糙集数据分析模型,其也被称为 Wu-Leung 模型,相应数据的表示形式称为多尺度信息系统。在该模型中,每个对象在同一个属性下随着尺度的变化取不同的值。在 Wu-Leung 模型中,选择合适的尺度用于决策是一个重要的研究课题。在该模型提出不久后,Wu 等就在文献[29]中定义了几种最优尺度的概念并讨论了它们之间的强弱关系。经典 Wu-Leung 模型的一个基本假设是所有属性具有相同的尺度个数,并且在数据分析时取同一层尺度。为了提高 Wu-Leung 模型的泛化能力,Li 等通过引入尺度组合的概念,提出了广义多尺度信息系统的知识获取模型[30]。Wu 等又进一步讨论了广义多尺度决策表的尺度选择问题,定义了 7 种最优尺度选择概念并给出了它们之间的强弱关系[31]。Li 等提出的广义多尺度决策表的决策属性是单尺度的,在实际应用中,同一对象的决策属性也可能根据不同尺度取不同的值。为此,Huang 等[32]提出了决策也是多尺度的广义多尺度信息系统的概念(简称为广义决策多尺度信息系统),并给出了协调广义决策多尺度信息系统的最优尺度选择方法。

证据理论[33]是另一种处理不确定信息的数学工具。该理论是在 mass 函数的基础上,利用 mass 函数生成的信任结构,导出一对对偶的信任函数和似然函数。已经证实,证据理论与粗糙集理论之间有着密切的关系。Yao 等[34]对有限论域中由非等价关系产生的粗糙集近似与证据理论中的信任函数之间的关系做了系统的讨论,证明有限论域中的任何一个信任函数一定存在一个粗糙近似空间,使得由该近似空间导出的信任函数恰好就是给定的信任函数。最近,Zheng 等[35]用证据理论中的信任函数与似然函数刻画了 Wu-Leung 模型下多尺度序信息系统的最优尺度特征。但是,广义决策多尺度序信息系统的知识获取迄今未见讨论。本文结合文献[32]、文献[35]和文献[36]的思路,主要研究在不协调广义决策多尺度序信息系统上的尺度选择、属性约简、规则提取问题。

本文第 2 节主要介绍了关于序信息系统、决策多尺度序信息系统和证据理论的预备知识;第 3 节提出了广义决策多尺度序信息系统的定义和相关知识;第 4 节在不协调广义决策多尺度序信息系统中定义了几种针对不同决策的最优尺度组合概念,给出了不同最优尺度概念之间的关系;第 5 节在最优尺度的基础上,基于广义优势决策函数和辨识矩阵对广义决策多尺度序信息系统进行约简和规则提取;最后总结全文并展望未来。

2 基本知识

设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$ 为一个非空有限论域,记 $\mathscr{P}(U)$ 为 U 的幂集。对于 $X\subseteq U$,记 $\sim X$ 为 X 关于 U 的补集,即 $\sim X=U-X=\{x\in U\mid x\notin X\}$。

定义 1[11] 称二元组 $S=(U,A)$ 为一个信息系统,其中 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$ 是一个非空有限对象集,称为论域;$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 是非空有限属性集,对于任意 $a\in A$,有 $a:U\rightarrow V_a$,即 $a(x)\in V_a$,$x\in U$,其中 $V_a=\{a(x)\mid x\in U\}$ 为 a 的值域。

对于给定的信息系统 $S=(U,A)$,$B\subseteq A$,记:

$$R_B=\{(x,y)\in U\times U\mid \forall a\in B,a(x)=a(y)\}$$

易见,R_B 是自反、对称和传递的,即它是 U 上的一个等价关系。记:

$$[x]_B=\{y\in U\mid (x,y)\in R_B\}$$

$[x]_B$ 称为 x 关于 B 的等价类。记 U/R_B 为 R_B 导出的划分,即:

$$U/R_B=\{[x]_B\mid x\in U\}$$

对于 $X\subseteq U$,$B\subseteq A$,X 关于 R_B 的下近似和上近似分别记为 $\underline{R_B}(X)$ 与 $\overline{R_B}(X)$,定义如下:

$$\underline{R_B}(X)=\{x\in U\mid [x]_B\subseteq X\}$$

$$\overline{R_B}(X)=\{x\in U\mid [x]_B\cap X\neq\emptyset\}$$

2.1 序信息系统及其导出的粗糙近似

定义 2[37] 称二元组 $(L,\leqslant)$ 是一个全序集,其中 L 是一个非空集合,$\leqslant$ 是 L 上的一个二元关系,满足以下条件:

(1) 自反性:$\forall x\in L,x\leqslant x$;

(2) 传递性:$\forall x,y,z\in L,x\leqslant y,y\leqslant z$ 蕴含 $x\leqslant z$;

(3) $\leqslant$ 是线性序:$\forall x,y\in L$,或者 $x\leqslant y$,或者 $y\leqslant x$。

定义 3 在信息系统 (U,A) 中,若属性 a 的值域 V_a 是全序集,即 V_a 是按照优先级递减或者递增排序的,则称属性 a 是一个标准或准则。若 $a\in A$ 是一个准则,V_a 是按照优势关系 $\geqslant_a$ 排序的,则 $y\geqslant_a x$ 意味着关于准则 a,y 至少和 x 具有一样的优势,或者说 y 支配 x。对于属性子集 $B\subseteq A$,$y\geqslant_B x$ 表示对于任意 $a\in B$,都有 $y\geqslant_a x$,即对于 B 中的所有属性,y 都至少和 x 具有一样的优势。

对于优势关系 $\geqslant_a$,有两种情况:1) 递减,即 $y\geqslant_a x\Leftrightarrow a(y)\leqslant a(x)$;2) 递增,即 $y\geqslant_a x\Leftrightarrow a(y)\geqslant a(x)$。由于两种情况的特殊关系,本文主要讨论按照优先级递增排序的情况,即情况 2)。

定义 4[38] 设 $S=(U,A)$ 为信息系统,若对任意属性 $a_i\in A$,a_i 都是准则,则称 (U,A) 为序信息系统。

在序信息系统中,对任意的 $B\subseteq A$,定义 U 上的二元关系:

$$R_B^{\geqslant}=\{(y,x)\in U\times U\mid a(y)\geqslant a(x),\forall a\in B\}$$

称 $R_B^{\geqslant}$ 为序信息系统 (U,A) 由属性集 B 导出的优势关系。

若记:

$$[x]_B^{\geqslant}=\{y\in U\mid a(y)\geqslant a(x),\forall a\in B\}=\{y\in U\mid (y,x)\in R_B^{\geqslant}\}$$

$$U/R_B^{\geqslant}=\{[x]_B^{\geqslant}\mid x\in U\}$$

则称$[x]_B^{\geqslant}$为对象x的优势类，$U/R_B^{\geqslant}$为由B导出的优势类所构成的U上的一个覆盖集，即$[x]_B^{\geqslant}\neq\emptyset$，$\bigcup_{x\in U}[x]_B^{\geqslant}=U$。

对任意$X\subseteq U$，$B\subseteq A$，定义X关于优势关系$R_B^{\geqslant}$的下近似和上近似如下：

$$\underline{R_B^{\geqslant}}(X)=\{x\in U\mid[x]_B^{\geqslant}\subseteq X\}$$

$$\overline{R_B^{\geqslant}}(X)=\{x\in U\mid[x]_B^{\geqslant}\cap X\neq\emptyset\}$$

定义5[20]　称$(U,C\cup\{d\})$为一个序决策系统，其中(U,C)为序信息系统，d为决策属性，它也是一个准则。

记$R_d^{\geqslant}$为决策属性d导出的优势关系，即：

$$R_d^{\geqslant}=\{(y,x)\in U\times U\mid d(y)\geqslant d(x)\}$$

并且令：

$$[x]_d^{\geqslant}=\{y\in U\mid d(y)\geqslant d(x)\}=\{y\in U\mid(y,x)\in R_d^{\geqslant}\},x\in U$$

$$U/R_d^{\geqslant}=\{[x]_d^{\geqslant}\mid x\in U\}$$

则称$[x]_d^{\geqslant}$为对象x关于优势关系$R_d^{\geqslant}$的优势类，$U/R_d^{\geqslant}$为决策属性导出的全体优势类。

对于序决策系统$S=(U,C\cup\{d\})$，若$R_C^{\geqslant}\subseteq R_d^{\geqslant}$，则称$S$是协调的，否则称$S$是不协调的。

2.2　决策多尺度信息系统

定义6[32]　称三元组$S=(U,C\cup\{d\})$为一个具有多尺度决策的广义多尺度信息系统，简称广义决策多尺度信息系统。其中，$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$为一个非空有限对象集，称为论域；$C=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$为一个非空有限条件属性集，每个属性都是多尺度属性；d为决策属性，它也是一个多尺度属性。

若对于任意$j\in\{1,2,\cdots,m\}$，属性a_j有I_j个尺度，决策属性d有n个尺度，则一个决策多尺度信息系统S可以表示为：

$$S=(U,C\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

其中，$a_j^k:U\to V_j^k$是满射，V_j^k是条件属性a_j在第k个尺度下的值域，对于$j=1,2,\cdots,m$，$1\leqslant k\leqslant I_j-1$，存在一个满射$g_j^{k,k+1}:V_j^k\to V_j^{k+1}$使得$a_j^{k+1}=g_j^{k,k+1}\circ a_j^k$，即：

$$a_j^{k+1}(x)=g_j^{k,k+1}(a_j^k(x)),x\in U$$

称$g_j^{k,k+1}$为条件属性的信息粒度变换。$d^t:U\to V_d^t$是满射，V_d^t是决策属性d在第t个尺度下的值域。对于$1\leqslant t\leqslant n-1$，存在一个满射$h_d^{t,t+1}:V_d^t\to V_d^{t+1}$使得$d^{t+1}=h_d^{t,t+1}\circ d^t$，即：

$$d^{t+1}(x)=h_d^{t,t+1}(d^t(x)),x\in U$$

称$h_d^{t,t+1}$为决策属性的信息粒度变换。

对于$1\leqslant t\leqslant n$，记：

$$S^t=(U,C\cup\{d^t\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\})$$

则S^t为具有决策d^t的广义多尺度决策系统。

定义7　设：

$$S=(U,C\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

为一个广义决策多尺度信息系统。若条件属性a_j取第$i_j(1\leqslant i_j\leqslant I_j)$个尺度，$j=1,2,\cdots,m$，则称$K=(i_1,i_2,\cdots,i_m)$为条件属性的一个尺度组合。进一步，若决策属性$d$取第$t(1\leqslant t\leqslant n)$个尺度，则称$Q=(i_1,i_2,\cdots,i_m,t)$为系统$S$的一个尺度选择。记$S=(U,C\cup\{d\})$的条件属性集的尺度组合全体为$\mathscr{K}$，记$S=(U,C\cup\{d\})$的尺度选择全体为$\mathscr{Q}$，则每一个$t\in\{1,2,\cdots,n\}$和系统$S=(U,C\cup\{d\})$的每个尺度组合$K=(i_1,i_2,\cdots,i_m)\in\mathscr{K}$对应一个单尺度决策表$(U,C^K\cup\{d^t\})$，其中$C^K=\{a_1^{i_1},a_2^{i_2},\cdots,a_m^{i_m}\}$。

定义8　对于广义决策多尺度信息系统$S=(U,C\cup\{d\})$，设$K_1=(i_1^1,i_2^1,\cdots,i_m^1)$，$K_2=(i_1^2,i_2^2,\cdots,i_m^2)\in\mathscr{K}$，若对$\forall j\in\{1,2,\cdots,m\}$，都有$i_j^1\leqslant i_j^2$，则称尺度组合$K_1$比$K_2$细，或$K_2$比$K_1$粗，记作$K_1\leqslant K_2$；若$K_1\leqslant K_2$，且$\exists j\in\{1,2,\cdots,m\}$，使得$i_j^1<i_j^2$，则称尺度组合$K_1$严格细于$K_2$，或$K_2$严格粗于$K_1$，记作$K_1\prec K_2$。对于$S$的两个尺度选择$Q_1=(i_1^1,i_2^1,\cdots,i_m^1,t_1)$，$Q_2=(i_1^2,i_2^2,\cdots,i_m^2,t_2)\in\mathscr{Q}$，若对$\forall j\in\{1,2,\cdots,m\}$，都有$i_j^1\leqslant i_j^2$，$t_2\leqslant t_1$，则称尺度选择$Q_1$比$Q_2$细，或$Q_2$比$Q_1$粗，记作$Q_1\leqslant Q_2$；若$Q_1\leqslant Q_2$且$t_2<t_1$或$\exists j\in\{1,2,\cdots,m\}$使得$i_j^1<i_j^2$，则称尺度选择$Q_1$严格细于$Q_2$，或$Q_2$严格粗于$Q_1$，记作$Q_1\prec Q_2$。

2.3　证据理论

定义9[33]　设U为非空有限论域，对于集函数$m:\mathscr{P}(U)\to[0,1]$，若它满足以下公理：

(1)$m(\emptyset)=0$；

(2)$\sum_{X\subseteq U}m(X)=1$。

则称m为U上的一个mass函数或一个基本概率指派。

对于$X\in\mathscr{P}(U)$，若$m(X)>0$，则称X是m的一个焦元，记$\mathscr{M}$为m的所有焦元所构成的集合，则序对$(\mathscr{M},m)$称为U上的一个信任结构。

定义10[33]　设$(\mathscr{M},m)$是U上的一个信任结构，称集函数$Bel:\mathscr{P}(U)\to[0,1]$为$U$上的一个信任函数，若：

$$Bel(X)=\sum_{Y\subseteq X}m(Y),\forall X\in\mathscr{P}(U)$$

称集函数$Pl:\mathscr{P}(U)\to[0,1]$为$U$上的一个似然函数，若：

$$Pl(X)=\sum_{Y\cap X\neq\emptyset}m(Y),\forall X\in\mathscr{P}(U)$$

由同一信任结构导出的信任函数和似然函数是对偶的，即：$\forall X\in\mathscr{P}(U)$，

$$Bel(X)=1-Pl(\sim X)$$

$$Pl(X)=1-Bel(\sim X)$$

定理1[39]　设$S=(U,A)$为一个信息系统，对于$\forall X\subseteq U$，$B\subseteq A$，记$P(X)=\frac{|X|}{|U|}$，$|X|$是X的基数，令：

$$Bel_B(X)=P(\underline{R_B}(X))$$

$$Pl_B(X)=P(\overline{R_B}(X))$$

则Bel_B，$Pl_B:\mathscr{P}(U)\to[0,1]$为$U$上的一对对偶的信任函数与似然函数，对应的mass函数如下：

$$m_B(X)=\begin{cases}P(X), & X\in U/R_B\\ 0, & X\notin U/R_B\end{cases}$$

3　不协调广义决策多尺度序信息系统

本节引入广义决策多尺度序信息系统的一些基本概念及其性质。

定义11　设$(L_1,\leqslant_1)$和$(L_2,\leqslant_2)$为两个全序集，映射$g:(L_1,\leqslant_1)\to(L_2,\leqslant_2)$称为保序的，若$\forall l,s\in L_1$，则有：

$$l\leqslant_1 s\Rightarrow g(l)\leqslant_2 g(s)$$

定义12　设：

$$S=(U,C\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

为一个广义决策多尺度信息系统，若对于$Q_1=(1,1,\cdots,1,1)\in\mathcal{Q}$，$S^{Q_1}=(U,C^{K_1}\cup\{d^1\})$为一个序决策系统，且对每一个条件属性$a_j(j\in\{1,2,\cdots,m\})$和每一个尺度$k\in\{1,2,\cdots,I_j-1\}$，条件属性$a_j(j\in\{1,2,\cdots,m\})$的信息粒度变换$g_j^{k,k+1}(k\in\{1,2,\cdots,I_j-1\})$都是保序的，对于决策属性$d$和每一个尺度$t\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，决策属性$d$的信息粒度变换$h_d^{t,t+1}(t\in\{1,2,\cdots,n-1\})$也都是保序的，则称$S$为一个决策多尺度序信息系统。

由上述定义不难发现，只要$(U,C^{K_1}\cup\{d^1\})$是序决策系统，且条件属性信息粒度变换函数和决策属性信息粒度变换函数都是保序的，则对于每一个$t\in\{1,2,\cdots,n\}$和系统$S=(U,C\cup\{d\})$的每个尺度组合$K=(i_1,i_2,\cdots,i_m)\in\mathcal{K}$，其对应的决策系统$(U,C^K\cup\{d^t\})$是一个序决策系统。为了方便起见，对于不同的属性和不同的尺度，属性值域上的全序关系统一用同一个符号$\geqslant$表示。

定义13 设：

$$S=(U,C\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

为一个广义决策多尺度序信息系统，对于$K=(i_1,i_2,\cdots,i_m)\in\mathcal{K}$，$\forall x\in U$，定义优势关系和优势类如下：

$$R_{C^K}^{\geqslant}=\{(y,x)\in U\times U\mid a_j^{i_j}(y)\geqslant a_j^{i_j}(x),\forall a_j^{i_j}\in C^K\}$$

$$[x]_{C^K}^{\geqslant}=\{y\in U\mid a_j^{i_j}(y)\geqslant a_j^{i_j}(x),\forall a_j^{i_j}\in C^K\}=\{y\in U\mid (y,x)\in R_{C^K}^{\geqslant}\}$$

$$U/R_{C^K}^{\geqslant}=\{[x]_{C^K}^{\geqslant}\mid x\in U\}$$

对于$\forall X\in\mathcal{P}(U)$，$X$关于优势关系$R_{C^K}^{\geqslant}$的下近似和上近似的定义如下：

$$\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X)=\{x\in U\mid [x]_{C^K}^{\geqslant}\subseteq X\}$$

$$\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X)=\{x\in U\mid [x]_{C^K}^{\geqslant}\cap X\neq\emptyset\}$$

由定义13容易得到如下命题。

命题1 设：

$$S=(U,C\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

为一个广义决策多尺度序信息系统，$K=(i_1,i_2,\cdots,i_m)\in\mathcal{K}$，则：$\forall X,Y\in\mathcal{P}(U)$。

(1)$\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X)=\sim\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(\sim X)$，$\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X)=\sim\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}(\sim X)$；

(2)$\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}(\emptyset)=\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(\emptyset)=\emptyset$，$\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}(U)=\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(U)=U$；

(3)$\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X\cap Y)=\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X)\cap\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}(Y)$，$\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X\cup Y)=\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X)\cup\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(Y)$；

(4)$\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X\cup Y)\supseteq\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X)\cup\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}(Y)$，$\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X\cap Y)\subseteq\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X)\cap\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(Y)$；

(5)$\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X)\subseteq X\subseteq\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X)$；

(6)若$X\subseteq Y$，则$\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X)\subseteq\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}(Y)$，$\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X)\subseteq\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(Y)$；

(7)$\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X)=\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}(\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X))$，$\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X)=\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X))$；

(8)若$K'\in\mathcal{K}$，$K\leqslant K'$，则$\underline{R_{C^{K'}}^{\geqslant}}(X)\subseteq\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X)$，$\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X)\subseteq\overline{R_{C^{K'}}^{\geqslant}}(X)$。

定义14 设：

$$S=(U,C\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

为一个广义决策多尺度序信息系统，对$\forall X\in\mathcal{P}(U)$，$K=(i_1,i_2,\cdots,i_m)\in\mathcal{K}$，$t\in\{1,2,\cdots,n\}$，$\forall x\in U$，记：

$$R_{d^t}^{\geqslant}=\{(y,x)\in U\times U\mid d^t(y)\geqslant d^t(x)\}$$

$$[x]_{d^t}^{\geqslant}=\{y\in U\mid d^t(y)\geqslant d^t(x)\}=\{y\in U\mid (y,x)\in R_{d^t}^{\geqslant}\}$$

$$U/R_{d^t}^{\geqslant}=\{[x]_{d^t}^{\geqslant}\mid x\in U\}$$

称$R_{d^t}^{\geqslant}$为由第t个尺度下决策d^t导出的优势关系，$[x]_{d^t}^{\geqslant}$为对象x关于优势关系$R_{d^t}^{\geqslant}$的优势类，$U/R_{d^t}^{\geqslant}$为$R_{d^t}^{\geqslant}$导出的全体优势类。

对于$\forall x\in U$，则可分别得到$[x]_{d^t}^{\geqslant}$关于条件属性C^K的下近似和上近似如下：

$$\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})=\{y\in U\mid [y]_{C^K}^{\geqslant}\subseteq[x]_{d^t}^{\geqslant}\}$$

$$\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})=\{y\in U\mid [y]_{C^K}^{\geqslant}\cap[x]_{d^t}^{\geqslant}\neq\emptyset\}$$

由定义14容易得到如下命题。

命题2 设：

$$S=(U,C\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

为一个广义决策多尺度序信息系统，$t\in\{1,2,\cdots,n\}$，$\forall x\in U$，$K=(i_1,i_2,\cdots,i_m)$，$K_1=(i_1^1,i_2^1,\cdots,i_m^1)$，$K_2=(i_1^2,i_2^2,\cdots,i_m^2)\in\mathcal{K}$，$K_1\leqslant K_2$，则以下性质成立：

(1)$\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})\subseteq[x]_{d^t}^{\geqslant}\subseteq\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})$；

(2)$\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})=\sim\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(\sim[x]_{d^t}^{\geqslant})$；

(3)$\underline{R_{C^{K_2}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})\subseteq\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，$\overline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})\subseteq\overline{R_{C^{K_2}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})$；

(4)$\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})\subseteq\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^{t+1}}^{\geqslant})$，$\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})\subseteq\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^{t+1}}^{\geqslant})$，$t\in\{1,2,\cdots,n-1\}$。

定义15 设：

$$S=(U,C\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

为一个广义决策多尺度序信息系统，且$K=(i_1,i_2,\cdots,i_m)\in\mathcal{K}$，$K_1=(1,1,\cdots,1)\in\mathcal{K}$是条件属性的最细尺度组合，对于$t\in\{1,2,\cdots,n\}$，若$R_{C^{K_1}}^{\geqslant}\subseteq R_{d^t}^{\geqslant}$，则称具有决策$d^t$的广义决策多尺度序信息系统：

$$S^t=(U,C\cup\{d^t\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\})$$

是协调的，否则称S^t是不协调的。特别地，若$R_{C^{K_1}}^{\geqslant}\subseteq R_{d^n}^{\geqslant}$，则称$S$是协调的，否则称$S$是不协调的。

类似于文献[40-41]，可以得到如下定理。

定理2 设：

$$S=(U,C\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

为一个不协调的广义决策多尺度序信息系统，$K=(i_1,i_2,\cdots,i_m)\in\mathcal{K}$，$\forall X\in\mathcal{P}(U)$，记：

$$Bel_{C^K}^{\geqslant}(X)=P(\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X))=\frac{|\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X)|}{|U|}$$

$$Pl_{C^K}^{\geqslant}(X)=P(\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X))=\frac{|\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}(X)|}{|U|}$$

则$Bel_{C^K}^{\geqslant}$和$Pl_{C^K}^{\geqslant}$为U上的一对信任函数和似然函数，对应的mass函数为：

$$m_{C^K}^{\geqslant}(X)=\begin{cases}\dfrac{|h_{C^K}^{\geqslant}(X)|}{|U|}, & X\in U/R_{C^K}^{\geqslant}\\ 0, & X\notin U/R_{C^K}^{\geqslant}\end{cases}$$

其中，$h_{C^K}^{\geqslant}(X)=\{x\in U\mid[x]_{C^K}^{\geqslant}=X\}$。

对于$t\in\{1,2,\cdots,n\}$，$\forall x\in U$，则决策优势类$[x]_{d^t}^{\geqslant}$关于$R_{C^K}^{\geqslant}$的信任度和似然度为：

$$Bel_{C^K}^{\geqslant}([x]_{d^t}^{\geqslant})=P(\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant}))=\frac{|\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})|}{|U|}$$

$$Pl_{C^K}^{\geqslant}([x]_{d^t}^{\geqslant})=P(\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant}))=\frac{|\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})|}{|U|}$$

推论1　设：

$$S=(U,C\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

为一个不协调的广义决策多尺度序信息系统，对于$\forall X\in\mathscr{P}(U)$，若$K_1=(i_1^1,i_2^1,\cdots,i_m^1)$，$K_2=(i_1^2,i_2^2,\cdots,i_m^2)\in\mathscr{K}$，且$K_1\leqslant K_2$，则信任函数和似然函数满足以下性质：

$$Bel_{C^{K_2}}^{\geqslant}(X)\leqslant Bel_{C^{K_1}}^{\geqslant}(X)\leqslant\frac{|X|}{|U|}\leqslant Pl_{C^{K_1}}^{\geqslant}(X)\leqslant Pl_{C^{K_2}}^{\geqslant}(X)$$

4　不协调广义决策多尺度序信息系统的尺度选择

尺度选择是多尺度信息系统中知识获取的一个关键步骤。对于决策多尺度信息系统，应该根据不同的决策需求，取不同的最优尺度组合。本节通过引入广义决策函数来讨论不协调广义决策多尺度序信息系统在不同决策尺度下的最优尺度选择问题。

定义16　设：

$$S=(U,C\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

为一个不协调的广义决策多尺度序信息系统，对于$K=(i_1,i_2,\cdots,i_m)\in\mathscr{K}$，$t\in\{1,2,\cdots,n\}$，记：

$$(\partial^t)_{C^K}^{\geqslant}(x)=\{d^t(y)\mid y\in[x]_{C^K}^{\geqslant}\},x\in U$$

为S中对象x在尺度组合$K=(i_1,i_2,\cdots,i_m)$下的广义决策值。

定义17　设：

$$S=(U,C\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

为一个不协调的广义决策多尺度序信息系统，$t\in\{1,2,\cdots,n\}$，$K_1=(1,1,\cdots,1)$，$K=(i_1,i_2,\cdots,i_m)\in\mathscr{K}$，$Q_1=(K,t)\in\mathscr{Q}$，$t\in\{1,2,\cdots,n\}$，若对于$\forall x\in U$，有$(\partial^t)_{C^K}^{\geqslant}(x)=(\partial^t)_{C^{K_1}}^{\geqslant}(x)$，则称尺度组合$K$关于$S^t$是广义决策协调的。若$K$关于$S^t$是广义决策协调的，且对于任意$K'\in\mathscr{K}$，满足$K\prec K'$，$K'$关于$S^t$不是广义决策协调的，则称$K$是$S^t$的一个广义决策最优尺度组合。

定理3　设：

$$S=(U,C\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

为一个不协调的广义决策多尺度序信息系统，$K_1=(1,1,\cdots,1)\in\mathscr{K}$，$K,K'\in\mathscr{K}$，$t\in\{1,2,\cdots,n\}$，对于决策属性$d^t$，若$K\leqslant K'$，且$K'$关于$S^t$是广义决策协调的，则$K$关于$S^t$也是广义决策协调的。

证明：由于K'关于S^t是广义决策协调的，即$(\partial^t)_{C^{K'}}^{\geqslant}(x)=(\partial^t)_{C^{K_1}}^{\geqslant}(x)$，从而$(\partial^t)_{C^{K'}}^{\geqslant}(x)\subseteq(\partial^t)_{C^{K_1}}^{\geqslant}(x)$。又由于$K\leqslant K'$，于是有$(\partial^t)_{C^K}^{\geqslant}(x)\subseteq(\partial^t)_{C^{K'}}^{\geqslant}(x)$，这样就得到了$(\partial^t)_{C^K}^{\geqslant}(x)\subseteq(\partial^t)_{C^{K_1}}^{\geqslant}(x)$。另外，显然$K_1\leqslant K$，从而$(\partial^t)_{C^{K_1}}^{\geqslant}(x)\subseteq(\partial^t)_{C^K}^{\geqslant}(x)$，故$(\partial^t)_{C^K}^{\geqslant}(x)=(\partial^t)_{C^{K_1}}^{\geqslant}(x)$，即$K$关于$S^t$也是广义决策协调的。

定义18　设：

$$S=(U,C\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

为一个不协调的广义决策多尺度序信息系统，$K_1=(1,1,\cdots,1)$，$t\in\{1,2,\cdots,n\}$，若对于$K\in\mathscr{K}$，有：

(1)若$\forall x\in U$，$\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})=\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，则称$K$关于$S^t$是下近似协调的；若$K$关于$S^t$是下近似协调的，且对于任意$K'\in\mathscr{K}$，满足$K\prec K'$，存在$x\in U$使得$\underline{R_{C^{K'}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})\neq\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，即$K'$关于$S^t$不是下近似协调的，则称$K$为$S^t$的一个下近似最优尺度组合。

(2)若$\forall x\in U$，$\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})=\overline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，则称$K$关于$S^t$是上近似协调的；若$K$关于$S^t$是上近似协调的，且对于任意$K'\in\mathscr{K}$，满足$K\prec K'$，存在$x\in U$使得$\overline{R_{C^{K'}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})\neq\overline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，即$K'$关于$S^t$不是上近似协调的，则称$K$为$S^t$的一个上近似最优尺度组合。

定义19　设：

$$S=(U,C\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

为一个不协调的广义决策多尺度序信息系统，$K_1=(1,1,\cdots,1)\in\mathscr{K}$，$t\in\{1,2,\cdots,n\}$，若对于$K\in\mathscr{K}$，有：

(1)若$\forall x\in U$，有$Bel_{C^K}^{\geqslant}([x]_{d^t}^{\geqslant})=Bel_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，则称$K$关于$S^t$是信任协调的；若$K$关于$S^t$是信任协调的，且对于任意$K'\in\mathscr{K}$，满足$K\prec K'$，存在$x\in U$，使得$Bel_{C^{K'}}^{\geqslant}([x]_{d^t}^{\geqslant})\neq Bel_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，即$K'$关于$S^t$不是信任协调的，则称$K$为$S^t$的一个信任最优尺度组合。

(2)若$\forall x\in U$，有$Pl_{C^K}^{\geqslant}([x]_{d^t}^{\geqslant})=Pl_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，则称$K$关于$S^t$是似然协调的；若$K$关于$S^t$是似然协调的，任意$K'\in\mathscr{K}$，满足$K\prec K'$，存在$x\in U$使得$Pl_{C^{K'}}^{\geqslant}([x]_{d^t}^{\geqslant})\neq Pl_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，即$K'$关于$S^t$不是似然协调的，则称$K$为$S^t$的一个似然最优尺度组合。

定理4　设：

$$S=(U,C\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

为一个不协调的广义决策多尺度序信息系统，$t\in\{1,2,\cdots,$

$n\}$，$K\in\mathscr{K}$，则：

(1)K关于S^t是下近似协调的，当且仅当K关于S^t是信任协调的；

(2)K是S^t的一个下近似最优尺度组合，当且仅当K是S^t的一个信任最优尺度组合；

(3)K关于S^t是上近似协调的，当且仅当K关于S^t是似然协调的；

(4)K是S^t的一个上近似最优尺度组合，当且仅当K是S^t的一个似然最优尺度组合。

证明：(1)(⇒)若K关于S^t是下近似协调，则对任意$x\in U$，$\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})=\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，于是$P(\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant}))=P(\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant}))$，从而$Bel_{C^K}^{\geqslant}([x]_{d^t}^{\geqslant})=Bel_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，即$K$关于$S^t$是信任协调的。

(⇐)若K关于S^t是信任协调的，则对任意$x\in U$，$Bel_{C^K}^{\geqslant}([x]_{d^t}^{\geqslant})=Bel_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，从而有$P(\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant}))=P(\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant}))$，即$\frac{|\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})|}{|U|}=\frac{|\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})|}{|U|}$，由$\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})\subseteq\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，可得对任意$x\in U$，$\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})=\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，即$K$关于$S^t$是下近似协调的。

(2)由定义18、定义19和结论(1)即得。

(3)(⇒)若K关于S^t是上近似协调的，则对于任意$x\in U$，$\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})=\overline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，于是$P(\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant}))=P(\overline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant}))$，从而$Pl_{C^K}^{\geqslant}([x]_{d^t}^{\geqslant})=Pl_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，即$K$关于$S^t$是似然协调的。

(⇐)若K关于S^t是似然协调的，则对于任意$x\in U$，$Pl_{C^K}^{\geqslant}([x]_{d^t}^{\geqslant})=Pl_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，从而有$P(\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant}))=P(\overline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant}))$，即$\frac{|\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})|}{|U|}=\frac{|\overline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})|}{|U|}$，由$\overline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})\subseteq\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})$可得，对任意$x\in U$，$\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})=\overline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，即$K$关于$S^t$是上近似协调的。

(4)由定义18、定义19和结论(3)即得。

定理5 设：

$$S=(U,C\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

为一个不协调的广义决策多尺度序信息系统，$K_1=(1,1,\cdots,1)\in\mathscr{K}$，$t\in\{1,2,\cdots,n\}$，$K\in\mathscr{K}$，若$K$关于$S$是广义决策协调的，则：

(1)K关于S是信任协调的；

(2)K关于S是似然协调的。

证明：(1)由命题2知，对于$\forall x\in U$，有$\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})\subseteq\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，下面证明$\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})\subseteq\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，即对$\forall y\in U$，有$[y]_{C^{K_1}}^{\geqslant}\subseteq[x]_{d^t}^{\geqslant}\Rightarrow[y]_{C^K}^{\geqslant}\subseteq[x]_{d^t}^{\geqslant}$。对于$\forall y\in U$，若$[y]_{C^{K_1}}^{\geqslant}\subseteq[x]_{d^t}^{\geqslant}$，有$(\partial^t)_{C^K}^{\geqslant}(x)=[x]_{d^t}^{\geqslant}$，若$[y]_{C^K}^{\geqslant}\nsubseteq[x]_{d^t}^{\geqslant}$，则存在$z\in[y]_{C^K}^{\geqslant}$，有$d^t(z)\notin[x]_{d^t}^{\geqslant}$，即$(\partial^t)_{C^{K_1}}^{\geqslant}(x)\neq(\partial^t)_{C^K}^{\geqslant}(x)$，矛盾，因此有$\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})\subseteq\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})$成立，因此$\underline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})=\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，由定理4知，$K$关于$S^t$是信任协调的。

(2)对于$x\in U$，若$y\in\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，则$[y]_{C^K}^{\geqslant}\cap[x]_{d^t}^{\geqslant}\neq\varnothing$，任取$z\in[y]_{C^K}^{\geqslant}\cap[x]_{d^t}^{\geqslant}$，则$d^t(z)\in[x]_{d^t}^{\geqslant}$，显然$d^t(z)\in(\partial^t)_{C^K}^{\geqslant}(y)$，又由于$K$关于$S^t$是广义决策协调的，即$(\partial^t)_{C^K}^{\geqslant}(y)=(\partial^t)_{C^{K_1}}^{\geqslant}(y)$，因此$d^t(z)\in(\partial^t)_{C^{K_1}}^{\geqslant}(y)$。从而存在$y'\in[y]_{C^{K_1}}^{\geqslant}$，使得$d^t(y')=d^t(z)$，有$d^t(y')\in[x]_{d^t}^{\geqslant}$，所以$[y]_{C^{K_1}}^{\geqslant}\cap[x]_{d^t}^{\geqslant}\neq\varnothing$，由下近似定义知$y\in\overline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，因此$\overline{R_{C^K}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})=\overline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^t}^{\geqslant})$，由定理4知，$K$关于$S^t$是似然协调的。

定义20 设：

$$S=(U,C\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

为一个不协调的广义决策多尺度序信息系统，$K_1=(1,1,\cdots,1)\in K$，则对$t\in\{1,2,\cdots,n\}$，S^t的信任和与似然和分别定义为：

$$M^t=\sum_{D\in U/R_{d^t}^{\geqslant}}Bel_{C^{K_1}}^{\geqslant}(D)$$

$$N^t=\sum_{D\in U/R_{d^t}^{\geqslant}}Pl_{C^{K_1}}^{\geqslant}(D)$$

定理6 设：

$$S=(U,C\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

为一个不协调的广义决策多尺度序信息系统，$K_1=(1,1,\cdots,1)\in\mathscr{K}$，$K\in\mathscr{K}$，$t\in\{1,2,\cdots,n\}$，若$K$关于$S^t$是广义决策协调的，则：

(1) $\sum_{D\in U/R_{d^t}^{\geqslant}}Bel_{C^K}^{\geqslant}(D)=M^t$；

(2) $\sum_{D\in U/R_{d^t}^{\geqslant}}Pl_{C^K}^{\geqslant}(D)=N^t$。

证明：由定理5和定义19即得。

例1 表1为一个广义决策多尺度序信息系统：

$$S=(U,C\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

其中，$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_{12}\}$是12个对象。$C=\{a_1,a_2\}$是2个条件属性，每个属性具有3个尺度，在2个属性的第1个尺度下，数值型值域$V_{a_1^1}=V_{a_2^1}=\{3,4,\cdots,9\}$上的全序关系取自然序，如$8<9$；在第2个尺度下，值域$V_{a_1^2}=V_{a_2^2}=\{B,C,D,E,F\}$（五级制）上的全序关系为：$F<E<D<C<B$；第3个尺度下，值域$V_{a_1^3}=V_{a_2^3}=\{N,M,K\}$（三级制）上的全序关系为$K<M<N$。$D=\{d^1,d^2\}$是决策属性$d$的2个决策尺度，在第1个尺度下，数值型值域$V_{d^1}=\{4,5,6,\cdots,9\}$上的全序关系取自然序，在2个尺度下，值域$V_{d^2}=\{B,C,D,E\}$（四级制）上的全序关系为：$E<D<C<B$，因此系统$S$有18个尺度选择，这些尺度选择形成的格结构如图1所示。

不同尺度下的序信息粒度变换如表1所列，即：

当$j=1,2$时，有：

$$g_j^{1,2}(a_j^1(x))=\begin{cases}B, & a_j^1(x)=9\\ C, & a_j^1(x)=7,8\\ D, & a_j^1(x)=5,6\\ E, & a_j^1(x)=4\\ F, & a_j^1(x)=3\end{cases}$$

$$g_j^{2,3}(a_j^2(x))=\begin{cases}N, & a_j^2(x)=B,C\\ M, & a_j^2(x)=D\\ K, & a_j^2(x)=E,F\end{cases}$$

对于$\{d^1,d^2\}$的粒度变换公式为：

$$h^{1,2}(d^1(x))=\begin{cases}B, & d^1(x)=9\\ C, & d^1(x)=7,8\\ D, & d^1(x)=5,6\\ E, & d^1(x)=4\end{cases}$$

表 1　一个广义决策多尺度序信息系统

Table 1　A generalized decision multi-scale ordered information system

U	a_1			a_2			d	
	a_1^1	a_1^2	a_1^3	a_2^1	a_2^2	a_2^3	d^1	d^2
x_1	9	B	N	7	C	N	8	C
x_2	9	B	N	5	D	M	7	C
x_3	7	C	N	9	B	N	9	B
x_4	3	F	K	6	D	M	4	E
x_5	6	D	M	8	C	N	7	C
x_6	5	D	M	7	C	N	9	B
x_7	8	C	N	9	B	N	9	B
x_8	7	C	N	8	C	N	8	C
x_9	6	D	M	3	F	K	4	E
x_{10}	4	E	K	7	C	N	6	D
x_{11}	5	D	M	6	D	M	5	D
x_{12}	9	B	N	8	C	N	9	B

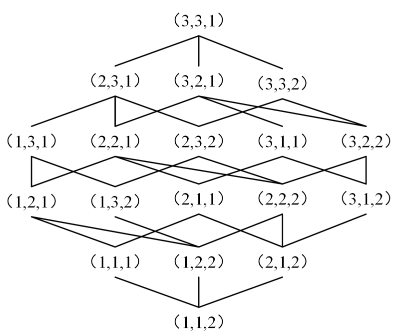

图 1　尺度选择的格结构

Fig. 1　Lattice structure of scale selections

(1)判断 S 是否是协调的；(2)求出 S 的广义决策协调最优尺度组合；(3)确定 S 的上、下近似协调最优尺度组合和信任、似然协调最优尺度组合。

(1)$K_1=(1,1)$，则$C^{K_1}=\{a_1^1,a_2^1\}$。

$[x_1]_{C^{K_1}}^{\geqslant}=\{x_1,x_{12}\}$

$[x_2]_{C^{K_1}}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_{12}\}$

$[x_3]_{C^{K_1}}^{\geqslant}=\{x_3,x_7\}$

$[x_4]_{C^{K_1}}^{\geqslant}=\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{10},x_{11},x_{12}\}$

$[x_5]_{C^{K_1}}^{\geqslant}=\{x_3,x_5,x_7,x_8,x_{12}\}$

$[x_6]_{C^{K_1}}^{\geqslant}=\{x_1,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{12}\}$

$[x_7]_{C^{K_1}}^{\geqslant}=\{x_7\}$

$[x_8]_{C^{K_1}}^{\geqslant}=\{x_3,x_7,x_8,x_{12}\}$

$[x_9]_{C^{K_1}}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_7,x_8,x_9,x_{12}\}$

$[x_{10}]_{C^{K_1}}^{\geqslant}=\{x_1,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{10},x_{12}\}$

$[x_{11}]_{C^{K_1}}^{\geqslant}=\{x_1,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{11},x_{12}\}$

$[x_{12}]_{C^{K_1}}^{\geqslant}=\{x_{12}\}$

对于d^2，有：

$[x_1]_{d^2}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{12}\}$
$=[x_2]_{d^2}^{\geqslant}=[x_5]_{d^2}^{\geqslant}=[x_8]_{d^2}^{\geqslant}$

$[x_3]_{d^2}^{\geqslant}=\{x_3,x_6,x_7,x_{12}\}$
$=[x_6]_{d^2}^{\geqslant}=[x_7]_{d^2}^{\geqslant}=[x_{12}]_{d^2}^{\geqslant}$

$[x_4]_{d^2}^{\geqslant}=U=[x_9]_{d^2}^{\geqslant}$

$[x_{10}]_{d^2}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{10},x_{11},x_{12}\}$
$=[x_{11}]_{d^2}^{\geqslant}$

易得出$U/R_{C^{K_1}}^{\geqslant}\not\subseteq U/R_{d^2}^{\geqslant}$，因此 S 是不协调的。

(2)对于$C^{K_1}=\{a_1^1,a_2^1\}$，$C^{K_2}=\{a_1^1,a_2^2\}$，$C^{K_3}=\{a_1^2,a_2^1\}$，有关于$\{d^t\,|\,t=1,2\}$的广义决策值，如表 2 所列。

表 2　对象与广义决策值关系表

Table 2　Relationships between objects and generalized decision values

U	$(\partial^t)_{C^{K_1}}^{\geqslant}$		$(\partial^t)_{C^{K_2}}^{\geqslant}$		$(\partial^t)_{C^{K_3}}^{\geqslant}$	
	$(\partial^1)C^{K_1}$	$(\partial^2)C^{K_1}$	$(\partial^1)C^{K_2}$	$(\partial^2)C^{K_2}$	$(\partial^1)C^{K_3}$	$(\partial^2)C^{K_3}$
x_1	{8,9}	$\{B,C\}$	{8,9}	$\{B,C\}$	{8,9}	$\{B,C\}$
x_2	{7,8,9}	$\{B,C\}$	{7,8,9}	$\{B,C\}$	{7,8,9}	$\{B,C\}$
x_3	{9}	$\{B\}$	{9}	$\{B\}$	{9}	$\{B\}$
x_4	{4,5,6,7,8,9}	$\{B,C,D,E\}$	{4,5,6,7,8,9}	$\{B,C,D,E\}$	{4,5,6,7,8,9}	$\{B,C,D,E\}$
x_5	{7,8,9}	$\{B,C\}$	{7,8,9}	$\{B,C\}$	{7,8,9}	$\{B,C\}$
x_6	{7,8,9}	$\{B,C\}$	{7,8,9}	$\{B,C\}$	{7,8,9}	$\{B,C\}$
x_7	{9}	$\{B\}$	{9}	$\{B\}$	{9}	$\{B\}$
x_8	{8,9}	$\{B,C\}$	{8,9}	$\{B,C\}$	{8,9}	$\{B,C\}$
x_9	{4,7,8,9}	$\{B,C,E\}$	{4,7,8,9}	$\{B,C,E\}$	{4,5,7,8,9}	$\{B,C,D,E\}$
x_{10}	{6,7,8,9}	$\{B,C,D\}$	{6,7,8,9}	$\{B,C,D\}$	{6,7,8,9}	$\{B,C,D\}$
x_{11}	{5,7,8,9}	$\{B,C,D\}$	{5,7,8,9}	$\{B,C,D\}$	{5,7,8,9}	$\{B,C,D\}$
x_{12}	{9}	$\{B\}$	{8,9}	$\{B,C\}$	{9}	$\{B\}$

可以得出$(\partial^1)_{C^{K_1}}^{\geqslant}=(\partial^1)_{C^{K_1}}^{\geqslant}$，$(\partial^2)_{C^{K_1}}^{\geqslant}=(\partial^2)_{C^{K_1}}^{\geqslant}$，因此$S^1$的广义决策协调最优尺度组合为(1,1)。

(3)1)求 S 在不同决策下的下近似协调最优尺度组合。

当 $t=1$ 时：

$K_1=(1,1)$，则$C^{K_1}=\{a_1^1,a_2^1\}$，有：

$\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x_1]_{d^1}^{\geqslant})=\{x_1,x_3,x_7,x_8,x_{12}\}=\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x_8]_{d^1}^{\geqslant})$

$\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x_2]_{d^1}^{\geqslant})=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{12}\}=\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x_5]_{d^1}^{\geqslant})$

$\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x_3]_{d^1}^{\geqslant})=\{x_3,x_7,x_{12}\}=\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x_6]_{d^1}^{\geqslant})=\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x_7]_{d^1}^{\geqslant})=\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x_{12}]_{d^1}^{\geqslant})$

$\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x_4]_{d^1}^{\geqslant})=U=\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x_9]_{d^1}^{\geqslant})$

$\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x_{10}]_{d^1}^{\geqslant})=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{10},x_{12}\}$

$\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x_{11}]_{d^1}^{\geqslant})=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{10},x_{11},x_{12}\}$

对于$C^{K_2}=\{a_1^1,a_2^2\}$，$C^{K_3}=\{a_1^2,a_2^1\}$，都有$\underline{R_{C^{K_2}}^{\geqslant}}([x]_{d^1}^{\geqslant})\neq\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^1}^{\geqslant})$，$\underline{R_{C^{K_3}}^{\geqslant}}([x]_{d^1}^{\geqslant})\neq\underline{R_{C^{K_1}}^{\geqslant}}([x]_{d^1}^{\geqslant})$。

当 $t=2$ 时：

$K_1=(1,1)$，则 $C^{K_1}=\{a_1^1,a_2^1\}$，有：

$\underline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_1]_{d^2}^{\geqslant})=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{12}\}=\underline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_2]_{d^2}^{\geqslant})=\underline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_5]_{d^2}^{\geqslant})=\underline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_8]_{d^2}^{\geqslant})$

$\underline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_3]_{d^2}^{\geqslant})=\{x_3,x_7,x_{12}\}=\underline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_6]_{d^2}^{\geqslant})=\underline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_7]_{d^2}^{\geqslant})=\underline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_{12}]_{d^2}^{\geqslant})$

$\underline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_4]_{d^2}^{\geqslant})=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12}\}=U=\underline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_9]_{d^1}^{\geqslant})$

$\underline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_{10}]_{d^2}^{\geqslant})=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{10},x_{11},x_{12}\}=\underline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_{11}]_{d^2}^{\geqslant})$

对于 $C^{K_2}=\{a_1^1,a_2^2\}$，有 $\underline{R}_{C^{K_2}}^{\geqslant}([x]_{d^2}^{\geqslant})\neq\underline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x]_{d^2}^{\geqslant})$；对于 $C^{K_3}=\{a_1^2,a_2^1\}$，有 $\underline{R}_{C^{K_3}}^{\geqslant}([x]_{d^2}^{\geqslant})=\underline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x]_{d^2}^{\geqslant})$；对于 $C^{K_4}=\{a_1^2,a_2^2\}$，有 $\underline{R}_{C^{K_4}}^{\geqslant}([x]_{d^2}^{\geqslant})\neq\underline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x]_{d^2}^{\geqslant})$。

从而对于 $t=1$，(1,1)是 S^1 的下近似最优尺度组合；对于 $t=2$，(2,1)是 S^2 的下近似最优尺度组合。

2)求 S 在不同决策下的上近似协调最优尺度组合。

当 $t=1$ 时：

$K_1=(1,1)$，则 $C^{K_1}=\{a_1^1,a_2^1\}$，有：

$\overline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_1]_{d^1}^{\geqslant})=U=\overline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_8]_{d^1}^{\geqslant})$

$\overline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_2]_{d^1}^{\geqslant})=U=\overline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_5]_{d^1}^{\geqslant})$

$$\begin{aligned}\overline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_3]_{d^1}^{\geqslant})=U&=\overline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_6]_{d^1}^{\geqslant})=\overline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_7]_{d^1}^{\geqslant})\\&=\overline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_{12}]_{d^1}^{\geqslant})\end{aligned}$$

$\overline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_4]_{d^1}^{\geqslant})=U=\overline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_9]_{d^1}^{\geqslant})$

$\overline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_{10}]_{d^1}^{\geqslant})=U$

$\overline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x_{11}]_{d^1}^{\geqslant})=U$

经计算，对于 $K_9=(3,3)$，即 $C^{K_9}=\{a_1^3,a_2^3\}$，有 $\overline{R}_{C^{K_9}}^{\geqslant}([x]_{d^1}^{\geqslant})=\overline{R}_{C^{K_1}}^{\geqslant}([x]_{d^1}^{\geqslant})$，因此(3,3)是 S^1 的上近似最优尺度组合。

3)求 S 在不同决策下的信任最优尺度组合。

当 $t=1$ 时：

$$\sum_{D\in U/R_{d^1}^{\geqslant}} Bel_{C^{K_1}}^{\geqslant}(D)=\frac{5+8+3+12+9+10}{12}=\frac{47}{12}$$

$$\sum_{D\in U/R_{d^1}^{\geqslant}} Bel_{C^{K_2}}^{\geqslant}(D)=\frac{4+8+2+12+9+10}{12}=\frac{45}{12}<\frac{47}{12}$$

$$\sum_{D\in U/R_{d^1}^{\geqslant}} Bel_{C^{K_3}}^{\geqslant}(D)=\frac{5+7+3+12+9+10}{12}=\frac{46}{12}<\frac{47}{12}$$

当 $t=2$ 时：

$$\sum_{D\in U/R_{d^2}^{\geqslant}} Bel_{C^{K_1}}^{\geqslant}(D)=\frac{8+3+12+10}{12}=\frac{33}{12}$$

$$\sum_{D\in U/R_{d^2}^{\geqslant}} Bel_{C^{K_2}}^{\geqslant}(D)=\frac{8+2+12+10}{12}=\frac{32}{12}<\frac{33}{12}$$

$$\sum_{D\in U/R_{d^2}^{\geqslant}} Bel_{C^{K_3}}^{\geqslant}(D)=\frac{8+3+12+10}{12}=\frac{33}{12}$$

$$\sum_{D\in U/R_{d^2}^{\geqslant}} Bel_{C^{K_4}}^{\geqslant}(D)=\frac{8+2+12+10}{12}=\frac{32}{12}<\frac{33}{12}$$

由以上计算可见，对于 $t=1$，只有(1,1)是关于 S^1 是信任协调的；对于 $t=2$，(1,1)与(2,1)关于 S^2 是信任协调的。因此，(1,1)是 S^1 唯一的信任最优尺度组合，(2,1)是 S^2 唯一的信任最优尺度组合。

4)求似然最优尺度组合。

已知(3,3)是 S^1 的上近似最优尺度组合，只需验证 $t=1$ 和 $K_9=(3,3)$ 时是似然协调的。

$$\sum_{D\in U/R_{d^1}^{\geqslant}} Pl_{C^{K_1}}^{\geqslant}(D)=1+1+1+1+1+1=6$$

$$\sum_{D\in U/R_{d^1}^{\geqslant}} Pl_{C^{K_9}}^{\geqslant}(D)=1+1+1+1+1+1=6$$

因此，(3,3)是 S^1 的似然最优尺度组合。

在不协调广义决策多尺度序信息系统中，一般的协调定义已经不再适用，为此引入广义决策协调来研究不协调广义决策多尺度的尺度选择问题，利用证据理论来研究不协调情况下，广义决策协调、下近似协调、上近似协调、信任协调以及似然协调之间的关系。根据本节的研究，可得出由广义决策协调可推出下近似协调与上近似协调，反之不然。下近似协调与信任协调等价，上近似协调与似然协调等价。

5 不协调广义决策多尺度序信息系统的约简与规则提取

知识约简是粗糙集理论的核心问题之一，本节讨论不协调广义决策多尺度序信息系统的规则提取问题，分为属性约简和规则提取两大步骤。下文在不协调决策多尺度序信息系统的最优尺度组合(一个最优尺度选择对应于一个传统的单尺度序决策系统)的基础上，根据文献[36]所给出的优势关系粗糙集方法，给出针对不同决策的隐含在系统中的决策规则集。

5.1 广义优势函数

定义 21 设：

$$\begin{aligned}S&=(U,C\cup\{d\})\\&=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})\end{aligned}$$

为一个不协调广义决策多尺度序信息系统，对于属性集 $B\subseteq C$，$K=(i_1,i_2,\cdots,i_m)\in\mathscr{K}$，$t\in\{1,2,\cdots,n\}$，定义函数 $(\eta^t)_{B^K}^{\geqslant}:U\rightarrow V_{d^t}$ 为：

$$(\eta^t)_{B^K}^{\geqslant}(x)=\min_{y\in[x]_{B^K}^{\geqslant}} d^t(y),x\in U$$

称 $(\eta^t)_{B^K}^{\geqslant}(x)$ 为序决策系统 $(U,C^K\cup\{d^t\})$ 中的对象 x 在属性子集 B 下的广义优势决策。

命题 3 对于不协调广义决策多尺度序信息系统 S，A，$B\subseteq C$，$K=(i_1,i_2,\cdots,i_m)\in\mathscr{K}$，$t\in\{1,2,\cdots,n\}$，则当 $A\subseteq B$ 时，对 $\forall x\in U$，有 $(\eta^t)_{A^K}^{\geqslant}(x)\leqslant(\eta^t)_{B^K}^{\geqslant}(x)$。

定义 22 设：

$$\begin{aligned}S&=(U,C\cup D)\\&=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})\end{aligned}$$

为一个不协调广义决策多尺度序信息系统，对于 $B\subseteq C$，$K=(i_1,i_2,\cdots,i_m)\in\mathscr{K}$，$t\in\{1,2,\cdots,n\}$，若对 $\forall x\in U$，有 $(\eta^t)_{B^K}^{\geqslant}(x)=(\eta^t)_{C^K}^{\geqslant}(x)$，且对 $\forall A\subset B$，$\exists x\in U$，使得 $(\eta^t)_{A^K}^{\geqslant}(x)\neq(\eta^t)_{C^K}^{\geqslant}(x)$，则称属性集 B 是不协调序决策系统 $(U,C^K\cup\{d^t\})$ 的一个约简，记作 $\mathrm{Red}(C^K)$。

5.2 广义优势函数的辨识矩阵与辨识函数

定义 23 设：

$$S=(U,C\cup D)=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

为一个不协调广义决策多尺度序信息系统,$\forall x,y\in U$,$K=(i_1,i_2,\cdots,i_m)\in\mathscr{K}$,$t\in\{1,2,\cdots,n\}$,记 $GD=\{(y,x)\mid d^t(y)\geqslant(\eta_{C^K}^t)^{\geqslant}(x)\}$,定义序决策系统$(U,C^K\cup\{d^t\})$中对象 x,y 的广义优势决策辨识属性集如下:

$$GD_{C^K}(x,y)=\begin{cases}\{a_j^k\in C^K\mid y\notin[x]_{a_j^k}^{\geqslant}\}, & (y,x)\notin GD\\ \emptyset, & (y,x)\in GD\end{cases}$$

其中,$GD_{C^K}(x,y)$是能够确定对象 y 是否优于对象 x 的属性集,称 $\boldsymbol{GD}_{C^K}=\{GD_{C^K}(x,y)\mid x,y\in U\}$为不协调序决策系统$(U,C^K\cup\{d^t\})$的辨识矩阵。

由单尺度序决策系统的结果可得以下定理。

定理 7　设:

$$S=(U,C\cup D)=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j;j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d^t\mid t=1,2,\cdots,n\})$$

为一个不协调广义决策多尺度序信息系统,$B\subseteq C$,$K=(i_1,i_2,\cdots,i_m)\in\mathscr{K}$,$t\in\{1,2,\cdots,n\}$,则 $\forall x,y\in U$,$B\cap GD_{C^K}(x,y)\neq\emptyset(GD_{C^K}(x,y)\neq\emptyset)$,当且仅当$(\eta^t)_{B^K}^{\geqslant}=(\eta^t)_{C^K}^{\geqslant}$。

记:

$$\Delta^{\geqslant}(K,t)=\bigwedge_{(x,y)\in U\times U}\bigvee GD_{C^K}(x,y)$$

称$\Delta^{\geqslant}(K,t)$是序决策系统$(U,C^K\cup\{d^t\})$的辨识函数,将$\Delta^{\geqslant}(K,t)$所给出的合取式转化为极小析取范式,则这个极小析取范式中的每一个合取式中的属性集就是序决策系统$(U,C^K\cup\{d^t\})$的一个约简。

5.3　广义优势决策函数的规则提取

根据序决策系统中的每一个约简,可以得到蕴含在系统中的规则集。下文直接类似于文献[36],根据表 1 列出的不协调广义决策多尺度序信息系统,以决策属性为第一个尺度 $t=1$所对应的多尺度序决策表为例,给出相应的约简和序决策规则集。

由于对应于 $t=1$ 的最优尺度组合为(1,1),它对应一个序决策系统$(U,\{a_1^1,a_2^1\}\cup\{d^1\})$,以下计算$(U,\{a_1^1,a_2^1\}\cup\{d^1\})$的约简并给出序决策规则集。

例 2　(接例 1)

(1)计算表 1 中全体对象在条件属性集 $A=\{a_1^1,a_2^1\}$下的优势类:

$[x_1]_A^{\geqslant}=\{x_1,x_{12}\}$

$[x_2]_A^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_{12}\}$

$[x_3]_A^{\geqslant}=\{x_3,x_7\}$

$[x_4]_A^{\geqslant}=\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{10},x_{11},x_{12}\}$

$[x_5]_A^{\geqslant}=\{x_3,x_5,x_7,x_8,x_{12}\}$

$[x_6]_A^{\geqslant}=\{x_1,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{12}\}$

$[x_7]_A^{\geqslant}=\{x_7\}$

$[x_8]_A^{\geqslant}=\{x_3,x_7,x_8,x_{12}\}$

$[x_9]_A^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_7,x_8,x_9,x_{12}\}$

$[x_{10}]_A^{\geqslant}=\{x_1,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{10},x_{12}\}$

$[x_{11}]_A^{\geqslant}=\{x_1,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{11},x_{12}\}$

$[x_{12}]_A^{\geqslant}=\{x_{12}\}$

(2)计算每个对象的广义优势决策函数值:

$\eta_A^{\geqslant}(x_1)=\eta_A^{\geqslant}(x_8)=8$,

$\eta_A^{\geqslant}(x_2)=\eta_A^{\geqslant}(x_5)=\eta_A^{\geqslant}(x_6)=7$,

$\eta_A^{\geqslant}(x_3)=\eta_A^{\geqslant}(x_7)=\eta_A^{\geqslant}(x_{12})=9$,

$\eta_A^{\geqslant}(x_4)=\eta_A^{\geqslant}(x_9)=4$,$\eta_A^{\geqslant}(x_{10})=6$,

$\eta_A^{\geqslant}(x_{11})=5$

(3)求表 1 中不协调广义决策多尺度序信息系统在最优尺度组合(1,1)下决策表$(U,\{a_1^1,a_2^1\}\cup\{d^1\})$的全部约简。首先,对于对象$x_1$,由步骤(2)知$\eta_A^{\geqslant}(x_1)=8$,则 $GD=\{(x_1,x_1),(x_3,x_1),(x_6,x_1),(x_7,x_1),(x_8,x_1),(x_{12},x_1)\}$,即$GD_A(x_1,x_1)$,$GD_A(x_3,x_1)$,$GD_A(x_6,x_1)$,$GD_A(x_7,x_1)$,$GD_A(x_8,x_1)$,$GD_A(x_{12},x_1)$均为 $\emptyset$;当 $y=x_2$时,由$x_2\notin[x_1]_{a_j^k}^{\geqslant}$可得辨识属性为$a_2^1$,依次按步骤进行,则可建立不协调广义序决策系统的辨识矩阵,具体结果如表 3 所列。

表 3　不协调广义序决策系统的辨识矩阵

Table 3　Discernibility matrix of inconsistent generalized ordered decision system

x/y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
x_1	$\emptyset$	a_2^1	$\emptyset$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	a_1^1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	a_1^1	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\emptyset$
x_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	a_1^1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	a_1^1	a_1^1	$\emptyset$
x_3	a_2^1	a_2^1	$\emptyset$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	a_2^1	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\emptyset$
x_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
x_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	a_2^1	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\emptyset$
x_6	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	a_2^1	a_1^1	a_2^1	$\emptyset$
x_7	a_2^1	a_2^1	$\emptyset$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\emptyset$
x_8	$\emptyset$	a_2^1	$\emptyset$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	a_1^1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\emptyset$
x_9	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
x_{10}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	a_2^1	$\emptyset$	a_2^1	$\emptyset$
x_{11}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	a_1^1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	a_2^1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
x_{12}	a_2^1	a_2^1	$\emptyset$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	a_1^1	$\emptyset$	$\emptyset$	a_1^1	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\{a_1^1,a_2^1\}$	$\emptyset$

因此,可得$\Delta^{\geqslant}(1,1,1)=a_1^1\wedge a_2^1$,即属性集$\{a_1^1,a_2^1\}$是不协调广义决策多尺度序信息系统的约简。

(4)提取序决策规则。

根据广义优势决策函数的概念,得到两种序决策规则的类型。

1)确定性序决策规则

$r_1:(a_1^1,\geqslant,9)\wedge(a_2^1,\geqslant,7)\Rightarrow(d^1,\geqslant,8)$(对象$x_1$支持)

$r_2:(a_1^1,\geqslant,9)\wedge(a_2^1,\geqslant,5)\Rightarrow(d^1,\geqslant,7)$(对象$x_2$支持)

$r_3:(a_1^1,\geqslant,7)\wedge(a_2^1,\geqslant,9)\Rightarrow(d^1,\geqslant,9)$(对象$x_3$支持)

$r_4:(a_1^1,\geqslant,3)\wedge(a_2^1,\geqslant,6)\Rightarrow(d^1,\geqslant,4)$(对象$x_4$支持)

$r_5:(a_1^1,\geqslant,6)\wedge(a_2^1,\geqslant,8)\Rightarrow(d^1,\geqslant,7)$(对象$x_5$支持)

$r_6:(a_1^1,\geqslant,8)\wedge(a_2^1,\geqslant,9)\Rightarrow(d^1,\geqslant,9)$(对象$x_7$支持)

$r_7:(a_1^1,\geqslant,7)\wedge(a_2^1,\geqslant,8)\Rightarrow(d^1,\geqslant,8)$(对象$x_8$支持)

$r_8:(a_1^1,\geqslant,6)\wedge(a_2^1,\geqslant,3)\Rightarrow(d^1,\geqslant,4)$(对象$x_9$支持)

$r_9:(a_1^1,\geqslant,4)\wedge(a_2^1,\geqslant,7)\Rightarrow(d^1,\geqslant,6)$(对象$x_{10}$支持)

$r_{10}:(a_1^1,\geqslant,5)\wedge(a_2^1,\geqslant,6)\Rightarrow(d^1,\geqslant,5)$(对象$x_{11}$支持)

$r_{11}:(a_1^1,\geqslant,9)\wedge(a_2^1,\geqslant,8)\Rightarrow(d^1,\geqslant,9)$(对象$x_{12}$支持)

2)可能性序决策规则

$r_{12}:(a_1^1,\geqslant,5)\wedge(a_2^1,\geqslant,7)\rightarrow(d^1,\geqslant,9)$(对象$x_6$支持)

结束语 在实际生活中存在众多的多尺度排序和决策问题。本文针对不协调决策多尺度序信息系统中的规则提取问题,介绍了一种新的多尺度粗糙集数据分析方法。首先引入了不协调决策多尺度序信息系统中针对不同决策的最优尺度组合的概念,并进一步用证据理论中的信任函数和似然函数刻画了不协调决策多尺度序信息系统的最优尺度组合的特征;然后在最优尺度组合基础上,通过定义广义优势决策辨识属性集和辨识矩阵,利用传统优势粗糙集数据分析方法得到系统的属性约简,获得隐藏在系统中的序决策规则。本文给出的结论所针对的决策多尺度序信息系统是完备的,在下一步工作中,一方面可以研究局部最优尺度选择和相关决策规则的提取问题,另一方面可以研究不完备决策多尺度序信息系统等复杂数据类型的最优尺度选择和规则提取问题。

参 考 文 献

[1] LIN T Y. Granular computing: From rough sets and neighborhood systems to information granulation and computing in words[C]//Proceedings of the European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing. 1997.

[2] LIANG J Y, QIAN Y H, LI D Y, et al. Theory and method of granular computing for big data mining[J]. Scientia Sinica Informationis, 2015, 45(11): 1355-1369.

[3] CHEN C L P, ZHANG C Y. Data-intensive applications, challenges, techniques and technologies: A survey on Big Data[J]. Information Sciences, 2014, 275: 314-347.

[4] XU J, WANG G Y, YU H. Review of big data processing based on granular computing[J]. Chinese Journal of Computers, 2015, 38(8): 1497-1517.

[5] CHEN L F, DAI Q, FU Q F. Design and application of extreme learning machine model based on granular Computing[J]. Computer Science, 2018, 45(10): 59-63.

[6] PEDRYCZ W. Granular Computing: Analysis and Design of Intelligent Systems[M]. Boca Raton: CRC Press, 2013.

[7] PEDRYCZ W, SKOWRON A, KREINOVICH V. Handbook of Granular Computing[M]. New York: Wiley, 2008.

[8] PEDRYCZ W, SUCCI G, SILLITTI A, et al. Data description: A general framework of information granules[J]. Knowledge-Based Systems, 2015, 80: 98-108.

[9] WU W Z, LEUNG Y, MI J S. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2009, 21(10): 1461-1474.

[10] YANG X B, SONG X N, CHEN Z H, et al. On multigranulation rough sets in incomplete information system[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2012, 3: 223-232.

[11] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.

[12] PAWLAK Z, SKOWRON A. Rudiments of rough sets[J]. Information Sciences, 2007, 177(1): 3-27.

[13] ACHARJYA D P, ABRAHAM A. Rough computing—A review of abstraction, hybridization and extent of applications[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2020, 96: 103924.

[14] FENG F, LI C X, DAVVAZ B, et al. Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative approach[J]. Soft Computing, 2010, 14(9): 899-911.

[15] LU Y L, LEI Y J, ZHOU W. Generalized intuitionistic fuzzy rough set model[J]. Computer Science, 2017, 44(7): 232-236.

[16] DUBOIS D, PRADE H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets [J]. International Journal of General System, 1990, 17(2/3): 191-209.

[17] GRECO S, MATARAZZO B, SLOWINSKI R. A new rough set approach to evaluation of bankruptcy risk[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998: 121-136.

[18] GRECO S, MATARAZZO B, SLOWINSKI R. Rough approximation of a preference relation by dominance relations[J]. European Journal of Operational Research, 1999, 117(1): 63-83.

[19] GRECO S, MATARAZZO B, SLOWINSKI R. Rough sets theory for multicriteria decision analysis[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 129(1): 1-47.

[20] GRECO S, MATARAZZO B, SLOWINSKI R. Rough approximation by dominance relations[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2002, 17(2): 153-171.

[21] GRECO S, MATARAZZO B, SŁOWINSKI R. Dominance-based rough set approach as a proper way of handling graduality in rough set theory[M]//Transactions on Rough Sets VII. Berlin: Springer, 2007: 36-52.

[22] XU W H. Ordered Information Systems and Rough Sets[M]. Beijing: Science Press, 2013.

[23] SANG B B, XU W H. Assignment reduction of intuitionistic fuzzy ordered decision information system[J]. Computer Science, 2017, 44(6): 75-79.

[24] FANG L H, LIN Y M, WU W Z. Optimal Scale Selection in Random Multi-scale Ordered Decision Systems[J]. Computer Science, 2022, 49(6): 172-179.

[25] QIAN Y H, DANG C Y, LIANG J Y, et al. Set-valued ordered information systems[J]. Information Sciences, 2009, 179(16): 2809-2832.

[26] ZHANG X X, CHEN D G, TSANG E C C. Generalized dominance rough set models for the dominance intuitionistic fuzzy information systems[J]. Information Sciences, 2017, 378: 1-25.

[27] HU C X, ZHANG L. Dynamic dominance-based multi granulation rough sets approaches with evolving ordered data[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2021, 12(1): 17-38.

[28] WU W Z, LEUNG Y. Theory and applications of granular la-

belled partitions in multi-scale decision tables[J]. Information Sciences,2011,181(18):3878-3897.

[29] WU W Z,LEUNG Y. Optimal scale selection for multi-scale decision tables[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2013,54(8):1107-1129.

[30] LI F,HU B Q. A new approach of optimal scale selection to multi-scale decision tables[J]. Information Sciences,2017,381:193-208.

[31] WU W Z,LEUNG Y. A comparison study of optimal scale combination selection in generalized multi-scale decision tables[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics,2020,11:961-972.

[32] HUANG Z H,LI J J,DAI W Z,et al. Generalized multi-scale decision tables with multi-scale decision attributes[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2019,115:194-208.

[33] SHAFER G. A mathematical theory of evidence[M]. Princeton:Princeton University Press,1976.

[34] YAO Y Y,LINGRAS P J. Interpretations of belief functions in the theory of rough sets[J]. Information Sciences,1998,104(1/2):81-106.

[35] ZHENG J W,WU W Z,BAO H,et al. Evidence theory based optimal scale selection for multi-scale ordered decision systems[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics,2022,13(4):1115-1129.

[36] WEI B P,LV Y J,LI J H,et al. Attribute reduction and rule acquisition in incomplete and inconsistent ordered decision systems[J]. Computer Science,2013,40(11):160-164.

[37] WU W Z,GAO C J,LI T J. Ordered granular labeled structures and rough approximations[J]. Journal of Computer Research and Development,2014,51(12):2623-2632.

[38] SHAO M W,ZHANG W X. Dominance relation and rules in an incomplete ordered information system[J]. International Journal of Intelligent Systems,2005,20(1):13-27.

[39] WU W Z. Attribute reduction based on evidence theory in incomplete decision systems[J]. Information Sciences,2008,178(5):1355-1371.

[40] XU W H,ZHANG X Y,ZHONG J M,et al. Attribute reduction in ordered information systems based on evidence theory[J]. Knowledge and Information Systems,2010,25(1):169-184.

[41] DU W S,HU B Q. Attribute reduction in ordered decision tables via evidence theory[J]. Information Sciences,2016,364/365:91-110.

YANG Ye, born in 1999, postgraduate. Her main research interests include rough set and granular computing.

WU Weizhi, born in 1964, Ph.D, professor. His main research interests include rough set, granular computing, data mining and artificial intelligence.

(责任编辑:柯颖)