



# 计算机科学

COMPUTER SCIENCE

## 基于群稀疏的约束平滑秩近似的高光谱图像去噪

张历洪, 叶军

引用本文

张历洪, 叶军. [基于群稀疏的约束平滑秩近似的高光谱图像去噪](#)[J]. 计算机科学, 2023, 50(6): 209-215.

ZHANG Lihong, YE Jun. [Hyperspectral Image Denoising Based on Group Sparse and Constraint Smooth Rank Approximation](#) [J]. Computer Science, 2023, 50(6): 209-215.

---

## 相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

**Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)**

### [基于Swin Transformer和三维残差多层融合网络的高光谱图像分类](#)

Hyperspectral Image Classification Based on Swin Transformer and 3D Residual Multilayer Fusion Network

计算机科学, 2023, 50(5): 155-160. <https://doi.org/10.11896/jsjx.220400035>

### [基于深度多尺度卷积稀疏编码的图像去噪算法](#)

Image Denoising Algorithm Based on Deep Multi-scale Convolution Sparse Coding

计算机科学, 2023, 50(4): 133-140. <https://doi.org/10.11896/jsjx.220100090>

### [基于TK能量算子和包络融合的心音分割算法](#)

Heart Sound Segmentation Algorithm Based on TK Energy Operator and Envelope Fusion

计算机科学, 2022, 49(11A): 210900135-6. <https://doi.org/10.11896/jsjx.210900135>

### [基于采样控制和输入饱和的不确定复杂网络同步研究](#)

Synchronization of Uncertain Complex Networks with Sampled-data and Input Saturation

计算机科学, 2021, 48(11A): 481-484. <https://doi.org/10.11896/jsjx.210100063>

### [基于鲁棒低秩张量恢复的高光谱图像去噪](#)

Hyperspectral Image Denoising Based on Robust Low Rank Tensor Restoration

计算机科学, 2021, 48(11A): 303-307. <https://doi.org/10.11896/jsjx.210200103>

# 基于群稀疏的约束平滑秩近似的高光谱图像去噪

张历洪 叶 军

南京邮电大学理学院 南京 210023

(zlh221034@163.com)

**摘要** 高光谱图像(Hyperspectral Image, HSI)在采集过程中会产生多种类型的噪声,噪声数量越多,HSI的有效信息就越少。为了更有效地从大量混合噪声中恢复 HSI 的有效消息,文中提出了一种基于群稀疏正则化的约束平滑秩近似 HSI 恢复方法。其中,群稀疏正则化被定义为基于加权 $\ell_{2,1}$ 范数的空谱全变分,该正则化在利用空谱维信息的同时也考虑到了 HSI 内部的群稀疏性,增强了模型对混合噪声的去除效果及空谱维的光滑性。此外,文中采用约束的平滑函数来近似秩函数,以更好地利用 HSI 的低秩属性并提高了算法效率。该优化问题采用基于交替方向乘子的迭代算法进行求解。两种加噪情况的模拟数据实验和一项基于真实数据的实验的结果表明,相比 5 种目前主流的方法,所提方法在目视效果和评价指标上都有明显提升。

**关键词:** 高光谱图像;去噪;群稀疏;秩近似;ADMM

中图分类号 TP751

## Hyperspectral Image Denoising Based on Group Sparse and Constraint Smooth Rank Approximation

ZHANG Lihong and YE Jun

School of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China

**Abstract** In the process of hyperspectral image(HSI) acquisition, there will produce many kinds of noise, and the more the number of noise, the less effective information HSI has. In order to recover HSI's effective messages more effectively from a large number of mixed noises, a constrained smoothing rank approximation for HSI recovery method based on group sparse regularization is proposed in this paper. Among them, the group sparse regularization is defined as the spacial-spectral total variation (SSTV) which based on weighted  $\ell_{2,1}$ -norm. This regularization not only utilizes the information of spacial-spectral dimension, but also considers the group sparsity inside HSI, which enhances the model's removal effect of mixed noise and the smoothness of spacial-spectral dimension. In addition, the constrained smoothing function is used to approximate the rank function, which makes better use of the low-rank property of HSI and improves the efficiency of the algorithm. The optimization problem is solved by iterative algorithm based on alternating direction multiplier. The results of two simulated data experiments and one real data experiment show that compared with the five current mainstream methods, the proposed method has obvious improvement in visual effect and evaluation index.

**Keywords** Hyperspectral images, Denoising, Group sparse, Rank approximation, ADMM

### 1 引言

随着遥感技术的迅速发展,高光谱图像技术在林业、城市规划、地物勘探方面发挥了重要作用<sup>[1]</sup>。高光谱图像在采集过程中不仅获得了地物信息,也能获得其光谱信息,做到了图像与光谱的结合。然而,高光谱图像在成像过程中会受到各种噪声的干扰,包括高斯噪声、椒盐噪声、条纹和死线等,这对高光谱的应用产生了障碍,因此 HSI 去噪是 HSI 分类<sup>[2]</sup>等应用中的重要环节。

传统的 HSI 去噪模式是独立地去除 HSI 每一个波段的噪声,如基于相似性的匹配方法 BM3D<sup>[3]</sup>等。将 HSI 每一个

波段看作一个独立的二维图像进行去噪的方法固然可行,但忽略了不同波段之间的相关性,因此上述方法对 HSI 整体的去噪效果非常差。近年来,HSI 独特的低秩先验信息被广泛研究,Wright 等<sup>[4]</sup>提出了一种鲁棒主成分分析(Robust Principal Component Analysis, RPCA)方法,结合核范数和 $\ell_1$ 范数,成功地从被损坏的观测数据中估计出了干净的数据。之后,Zhang 等<sup>[5]</sup>将三维 HSI 立方体重新排列成二维矩阵表示,采用 RPCA 模型和分块的思想,提出了一种低秩矩阵恢复(Low-Rank Matrix Recovery, LRMR)方法,用于 HSI 去噪,取得了比逐波段去噪更好的效果。但上述 RPCA 模型采用的是核范数近似替换秩函数,核范数仅仅只对较大的奇异值

到稿日期:2022-03-24 返修日期:2022-09-06

基金项目:国家自然科学基金(61971234);南京邮电大学校内基金(NY220209)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61971234) and Intramural Fund of Nanjing University of Posts and Telecommunications(NY220209).

通信作者:叶军(yj8422092@163.com)

较为敏感,这种处理会使得 HSI 在恢复过程中丢失不少细节信息<sup>[6-7]</sup>,在噪声级别较强时,恢复效果较差。

针对秩函数的近似替换问题,Xie 等<sup>[6]</sup>引入了基于低秩矩阵近似的迭代正则化加权 Schatten p 范数来去除噪声,用加权 Schatten p 范数代替核范数,平等地对待了每一个奇异值。Ye 等<sup>[7]</sup>提出了一种平滑近似(Smooth Rank Approximation, SRA)的方法,用平滑函数去近似秩函数,平滑函数拥有秩函数的大部分性质并且其梯度便于计算,该方法在噪声的去除方面取得了比传统 RPCA 模型更好的效果。Zheng 等<sup>[8]</sup>通过将 t-SVD 推广到模 k t-SVD,提出了一种新的用三维张量 log 范数来近似表示的张量纤维秩,以实现更灵活、准确的 HSI 低秩表征。上述方法虽然都更精确地探索了 HSI 的低秩先验信息,但这些方法对于所有奇异值惩罚均较小,这些奇异值都将会以缓慢的速度达到最优,这就导致了这些方法的去噪效率低下。在这种情况下,可以考虑将较小的奇异值直接去掉<sup>[9]</sup>,即添加人工秩约束来提高去噪效率。另一方面,HSI 普遍存在大量的混合噪声<sup>[10]</sup>,上述方法都只考虑了单个正则化,在噪声种类和等级增加的情况下,都无法准确地估计出干净数据。

考虑到上述问题,多种正则化相结合的方法成为了现在主流的研究方向。Zhang 等<sup>[11]</sup>提出了一种基于空谱全变分的局部低秩矩阵恢复模型(Spatial-spectral Total Variation Regularized Local Low-rank Matrix Recovery, LLRSSTV),该模型在局部低秩矩阵恢复的框架下引入 SSTV 正则化,在去除混合噪声方面有较好的表现。Ye 等<sup>[12]</sup>将 HSI 映射到低秩子空间,然后在该框架中引入 SSTV 正则化,提出了一种基于空谱全变分正则化的子空间低秩表示(Subspace Low-rank Representation Combined With Spatial-spectral Total Variation Regularization, SLRRSSTV)模型,提升了对混合噪声的去除效果。但上述方法都是采用核范数近似替换秩函数,使得较大的奇异值会受到较大的放缩,导致不精确的估计,并且文献<sup>[11-12]</sup>都没有考虑到 HSI 内部的群相关性,因此其恢复图像的空谱维的光滑性也会降低。对于如何考虑 HSI 内部的群相关性问题,Wang 等<sup>[13]</sup>提出了一种基于加权群稀疏正则化的低秩张量分解模型(Weighted Group Sparsity Regularized Low-rank Tensor Decomposition, LRTDGS),该模型考虑了 HSI 空间维度的群稀疏性,在去除混合噪声的同时,保证了空间维度的光滑性。Zheng 等<sup>[14]</sup>提出了一种基于双因子正则化的低秩张量分解(Double Factor Regularized Low-Rank Tensor Factorization, LRTF-DFR)模型,该模型在低秩张量分解的框架下分别探索空间因子和光谱因子的群稀疏性和连续性,提高了 HSI 整体的光滑度。上述方法虽然都取得了令人印象深刻的效果,但它们都只考虑了空间维度的群稀疏性,导致其恢复结果的光谱维的光滑度下降。

根据上述分析,本文提出了一种新的基于群稀疏正则化的约束平滑秩近似的 HSI 恢复方法。该方法考虑了两个方面的问题。一方面,采用约束平滑秩近似去解决核范数所带来的问题,它可以精确地探索 HSI 的内在低秩结构,约束项的加入可以极大提高去噪效率。另一方面,本文考虑了 HSI 的空谱平滑性和内部的群稀疏性,在约束平滑秩近似模型中

加入了新的群稀疏正则化。群稀疏正则化能够较好地利用空间和光谱维内部的相关性,提升混合噪声的去除效果以及保证空谱维的光滑性。本文对高斯噪声、椒盐噪声、死线和条纹 4 种类型的混合噪声去除进行了实验。简而言之,本文的贡献如下:

(1)提出了一种约束的秩函数近似框架,该框架可以更加有效地探索 HSI 的内在结构和低秩先验信息,并极大提高了去噪效率。

(2)考虑了 HSI 内部的群稀疏性,在约束秩函数近似框架中加入了一种新的群稀疏正则化,即基于加权  $\ell_{2,1}$  范数的 SSTV 正则化,该正则化不仅能够有效地去除混合噪声,还提高了光谱维的光滑性。

(3)采用 ADMM 方法求解本文模型,推导了交替迭代规则,形成了相应的算法。在模拟和真实 HSI 上进行了实验,结果表明,与主流的去噪方法相比,本文模型在混合噪声去除、空谱光滑性恢复方面都有优秀的表现。

## 2 预备工作

### 2.1 低秩矩阵恢复方法

基于 LRMR 的 HSI 去噪技术是基于鲁棒主成分分析(RPCA)原理的。RPCA 由 Wright 等<sup>[4]</sup>提出,设  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  是高度损坏的观测数据,可将其分解为干净的数据  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  与误差稀疏矩阵  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  的和,即  $\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{Y}$  和  $\mathbf{S}$  未知。该问题可概括为:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Y}, \mathbf{S}} \text{rank}(\mathbf{Y}) + \lambda \|\mathbf{S}\|_0 \\ \text{s. t. } \|\mathbf{X} - \mathbf{Y} - \mathbf{S}\|_F^2 \leq \epsilon \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $\text{rank}(\cdot)$  表示秩函数;  $\|\cdot\|_0$  表示  $\ell_0$  范数,即非零元素的个数;  $\lambda$  为正则化参数。RPCA 问题研究的是如何从损坏的数据  $X$  中估计出干净的数据  $Y$ 。由于式(1)为 NP-hard 问题,不易于求解,但 Wright 等也设计了一种方法来求解该问题,即采用核范数和  $\ell_1$  范数分别代替秩函数和  $\ell_0$  范数。后面人们将高斯噪声项  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  也纳入 RPCA 问题,最后形成如下模型:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Y}, \mathbf{S}} \|\mathbf{Y}\|_* + \lambda \|\mathbf{S}\|_1 + \frac{\eta}{2} \|\mathbf{E}\|_F^2 \\ \text{s. t. } \mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{S} + \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $\|\cdot\|_*$  表示核范数,定义为矩阵所有奇异值之和,它是秩函数的最紧凸松弛;  $\lambda$  和  $\eta$  为正则化参数;  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_F$  分别表示  $\ell_1$  范数和 Frobenius 范数。

### 2.2 平滑函数近似模型

针对传统低秩矩阵逼近模型中核范数替换秩函数误差较大并且无法平等对待每一个奇异值的问题, Ye 等<sup>[7]</sup>提出了平滑函数近似表示秩函数的方法,让误差可以由参数控制,提高了去噪效果。具体模型如下:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Y}, \mathbf{S}} F(\mathbf{Y}) + \lambda \|\mathbf{S}\|_1 + \frac{\eta}{2} \|\mathbf{E}\|_F^2 \\ \text{s. t. } \mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{S} + \mathbf{E} \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $F(\cdot)$  为平滑函数,可以被定义为:

$$F(\mathbf{Y}) = f(\sigma(\mathbf{Y})) = \sum_i h_\alpha(\sigma_i(\mathbf{Y})) = \sum_i \frac{(1+\alpha)\sigma_i}{\alpha + \sigma_i} \quad (4)$$

其中,  $\alpha$  为可调节参数,  $\sigma_i(\mathbf{Y})$  是数字矩阵  $\mathbf{Y}$  的递减的第  $i$  个奇异值向量。

### 2.3 群稀疏正则化

为了利用空谱维的信息来达到去除混合噪声以及保证空谱维光滑性的目的, Chang 等<sup>[15]</sup> 提出了自适应的空间-光谱全变分(SSTV)正则化。针对高光谱立方体  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{m \times n \times p}$ ,  $p$  表示该 HSI 的波段数, SSTV 正则化可以表示为:

$$\|\mathcal{M}\|_{\text{SSTV}} = \|D_1 \mathcal{M}\|_1 + \|D_2 \mathcal{M}\|_1 + \rho \|D_3 \mathcal{M}\|_1 \quad (5)$$

其中,  $\rho$  表示光谱维权重,  $D_i (i=1, 2, 3)$  表示一维线性算子, 定义如下:

$$\begin{cases} D_1 \mathcal{M} = \mathcal{M}(x+1, y, z) - \mathcal{M}(x, y, z) \\ D_2 \mathcal{M} = \mathcal{M}(x, y+1, z) - \mathcal{M}(x, y, z) \\ D_3 \mathcal{M} = \mathcal{M}(x, y, z+1) - \mathcal{M}(x, y, z) \end{cases} \quad (6)$$

本文进一步考虑了空间维和光谱维差分图像的群稀疏性, 提出了一个新的群稀疏正则化, 即基于加权  $\ell_{2,1}$  范数的 SSTV 正则化, 其具体表述为:

$$\|\mathcal{M}\|_{\text{SSTV-}\ell_{2,1}} = \|\mathbf{W}_1 \odot D_1 \mathcal{M}\|_{2,1} + \|\mathbf{W}_2 \odot D_2 \mathcal{M}\|_{2,1} + \rho \|\mathbf{W}_3 \odot D_3 \mathcal{M}\|_{2,1} \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{W}_i (i=1, 2, 3)$  表示权重张量, 作用是进一步促进  $\mathcal{M}$  的群稀疏性;  $\odot$  表示 component-wise multiplication;  $\|\mathcal{M}\|_{2,1}$  表示  $\ell_{2,1}$  范数, 其具体表述为  $\|\mathcal{M}\|_{2,1} = \sum_{m,n} |\mathcal{M}(m,n,:)|_2$ , 其中  $|\cdot|_2$  为向量 2 范数。

## 3 基于群稀疏正则化的约束平滑秩近似模型

### 3.1 模型描述

本文综合考虑了低秩正则化与群稀疏正则化相结合的方法。一方面, 采用约束平滑秩近似方法去解决核范数所带来的问题, 它可以更精确地探索 HSI 的内在低秩结构。约束项的加入可以在保证恢复图像质量的前提下极大提高去噪效率。另一方面, 传统的稀疏正则化没有考虑到 HSI 内在的组联系性, 而本文进一步考虑了 HSI 内部的群稀疏性, 在约束平滑秩近似模型中加入了新的群稀疏正则化。群稀疏正则化能够较好地利用空间和光谱维内部的相关性, 来提升混合噪声的去除效果以及保证空谱维的光滑性。根据上述分析, 本文提出了一个新的基于群稀疏正则化的约束平滑秩近似 (Constraint Smooth Rank Approximation and Group Sparse, CSRAGS) 模型, 模型的详细表述如下:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathcal{Y}} F(\mathbf{Y}) + \lambda \|\mathbf{S}\|_1 + \tau \|\mathbf{Y}\|_{\text{CS}} \\ \text{s. t. } \mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{S}, \text{rank}(\mathbf{Y}) \leq r \end{aligned} \quad (8)$$

其中,  $F(\cdot)$  为平滑函数,  $\|\cdot\|_{\text{CS}}$  表示  $\|\cdot\|_{\text{SSTV-}\ell_{2,1}}$ 。根据文献[7]中选取平滑函数的条件, 本文选取高斯函数来近似秩函数。

$$h_\alpha(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\alpha}\right) \quad (9)$$

其中,  $\alpha > 0$  为可调节参数。相应的  $F(\mathbf{Y})$  表示为:

$$F(\mathbf{Y}) = \sum_i (1 - \exp(-\sigma_i/\delta)) \quad (10)$$

其中,  $\sigma_i$  是矩阵  $\mathbf{Y}$  的递减的第  $i$  个奇异值。

### 3.2 基于 ADMM 的求解算法

对于式(8), 本文采用交替方向乘子法<sup>[16]</sup> (ADMM) 进行求解。首先引入辅助变量  $\mathcal{Y}, \mathcal{J}_j (j=1, 2, 3) \in \mathbb{R}^{m \times n \times p}$ ,

该模型可描述为:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathcal{Y}, \mathcal{J}_j} F(\mathbf{Y}) + \lambda \|\mathbf{S}\|_1 + \tau \left( \sum_{i=1}^2 \|W_i \odot \mathcal{J}_i\|_{2,1} + \rho \|W_3 \odot \mathcal{J}_3\|_{2,1} \right) \\ \text{s. t. } \mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{S}, \mathcal{T}(\mathbf{Y}) = \mathcal{Y}, D_j \mathcal{Y} = \mathcal{J}_j \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $\mathcal{T}$  表示变换:  $\mathbb{R}^{m \times n \times p} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n \times p}$  且  $\text{rank}(\mathbf{Y}) \leq r$ 。式(11)对应的拉格朗日函数为:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathcal{Y}, \mathcal{J}_j) = F(\mathbf{Y}) + \lambda \|\mathbf{S}\|_1 + \tau \left( \sum_{i=1}^2 \|W_i \odot \mathcal{J}_i\|_{2,1} + \rho \|W_3 \odot \mathcal{J}_3\|_{2,1} \right) + \langle \mathbf{A}_1, \mathbf{Y} + \mathbf{S} - \mathbf{X} \rangle + \langle \mathbf{A}_2, \mathcal{T}(\mathbf{Y}) - \mathcal{Y} \rangle + \langle \mathcal{A}_j, D_j \mathcal{Y} - \mathcal{J}_j \rangle + \frac{\mu}{2} (\|\mathbf{Y} + \mathbf{S} - \mathbf{X}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathcal{T}(\mathbf{Y}) - \mathcal{Y}\|_{\text{F}}^2 + \sum_{j=1}^3 D_j \mathcal{Y} - \mathcal{J}_j \|_{\text{F}}^2) \end{aligned} \quad (12)$$

其中,  $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $\mathbf{A}_2, \mathcal{A}_j (j=1, 2, 3) \in \mathbb{R}^{m \times n \times p}$  是拉格朗日乘子,  $\mu$  是惩罚参数。

对于变量  $\mathbf{Y}, \mathbf{S}$  的更新, 本文采用与文献[7]一致的 DC 方法<sup>[17]</sup> 和 ST 算子进行求解, 在此不再赘述。式(11)中的剩余变量的迭代更新如下:

(1) 更新变量  $\mathcal{Y}$

固定变量  $\mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathcal{J}_j, \mathcal{Y}^{k+1}$  可以被表示为:

$$\mathcal{Y}^{k+1} = \arg \min_{\mathcal{Y}} \sum_{j=1}^3 \frac{\mu}{2} \left\| D_j \mathcal{Y}^k - \mathcal{J}_j^k + \frac{\mathcal{A}_j^k}{\mu} \right\|_{\text{F}}^2 + \left\| \mathcal{T}(\mathbf{Y}^{k+1}) - \mathcal{Y}^k + \frac{\mathbf{A}_2^k}{\mu} \right\|_{\text{F}}^2 \quad (13)$$

式(12)的解可以通过等式(13)获得:

$$\left( \sum_{j=1}^3 D_j^T D_j + I \right) \mathcal{Y}^k = \sum_{j=1}^3 D_j^T \left( \mathcal{J}_j^k - \frac{\mathcal{A}_j^k}{\mu} \right) + \mathcal{T}(\mathbf{Y}^{k+1}) + \frac{\mathbf{A}_2^k}{\mu} \quad (14)$$

式(13)可以利用快速傅里叶变换进行求解:

$$\mathcal{Y}^{k+1} = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\mathcal{F} \left( \sum_{j=1}^3 D_j^T \left( \mathcal{J}_j^k - \frac{\mathcal{A}_j^k}{\mu} \right) + \mathcal{T}(\mathbf{Y}^{k+1}) + \frac{\mathbf{A}_2^k}{\mu} \right)}{1 + \sum_{j=1}^3 |\mathcal{F}(D_j)|^2} \right) \quad (15)$$

其中,  $\mathcal{F}(\cdot)$  表示快速傅里叶变换算子,  $\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$  代表逆变换。

(2) 更新变量  $\mathcal{J}_j (j=1, 2, 3)$

固定变量  $\mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathcal{Y}, \mathcal{J}_j^{k+1}$  可以被表示为:

$$\mathcal{J}_j^{k+1} = \arg \min_{\mathcal{J}_j} \tau \left( \sum_{i=1}^2 \|W_i \odot \mathcal{J}_i^k\|_{2,1} + \rho \|W_3 \odot \mathcal{J}_3^k\|_{2,1} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{\mu}{2} \left\| D_j \mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{J}_j^k + \frac{\mathcal{A}_j^k}{\mu} \right\|_{\text{F}}^2 \quad (16)$$

式(16)可以使用 shrink 算子<sup>[14]</sup> 来求解:

$$\begin{cases} \mathcal{J}_1^{k+1}(m, n, :) = \text{shrink}_{2,1} \left( \widehat{\mathcal{J}}_1^k(m, n, :), |W_1(m, n)| \cdot \frac{\tau}{\mu} \right) \\ \mathcal{J}_2^{k+1}(m, n, :) = \text{shrink}_{2,1} \left( \widehat{\mathcal{J}}_2^k(m, n, :), |W_2(m, n)| \cdot \frac{\tau}{\mu} \right) \\ \mathcal{J}_3^{k+1}(m, n, :) = \text{shrink}_{2,1} \left( \widehat{\mathcal{J}}_3^k(m, n, :), |W_3(m, n)| \cdot \frac{\rho\tau}{\mu} \right) \end{cases} \quad (17)$$

### 算法 1 CSRAGS 求解算法

输入: 含噪的 HSI  $\mathbf{X}$ , 参数  $\lambda, \tau, \rho, r$

输出: 干净的 HSI  $\mathbf{Y}$

初始化:  $\mathbf{Y}^0 = \mathbf{X}, \mathbf{S}^0 = \mathbf{E}^0 = 0, \mathcal{Y}^0 = \mathcal{J}_j^0 = 0, \mathbf{A}_1 = 0, \mathbf{A}_2 = \mathcal{A}_j = 0, \mu = 0.05, j=1, 2, 3.$

1. 根据文献[7], 更新  $\mathbf{Y}, \mathbf{S}$

2. 根据式(15)和式(17), 更新  $\mathcal{Y}, \mathcal{J}_j (j=1, 2, 3)$

3. 根据式(18),更新 $\mathbf{A}_i(i=1,2,3)$
4. 更新惩罚因子: $\mu=1.2 \cdot \mu$
5. 迭代终止条件: $\|\mathbf{Y}+\mathbf{S}-\mathbf{X}\|_F^2/\|\mathbf{Y}\|_F^2 < 10^{-4}$

其中, $\widehat{\mathcal{F}}_j^k = D_j \mathcal{Q}^{k+1} + \frac{N_j^k}{\mu}$ ,  $\mathbf{W}_j = \mathcal{F}(\mathbf{W}_j)$  ( $j=1,2,3$ )。shrink 算子的具体定义如下:

$$\text{shrink}_{2,1}(\mathbf{x}, \Delta) = \begin{cases} \frac{\|\mathbf{x}\|_2 - \Delta}{\|\mathbf{x}\|_2} \mathbf{x}, & \text{if } \|\mathbf{x}\|_2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (18)$$

(3)更新拉格朗日乘子:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1^{k+1} = \mathbf{A}_1^k + \mu(\mathbf{Y}^{k+1} + \mathbf{S}^{k+1} - \mathbf{X}) \\ \Lambda_2^{k+1} = \Lambda_2^k + \mu(\mathcal{F}(\mathbf{Y}^{k+1}) - \mathcal{Q}^{k+1}) \\ \mathcal{N}_j^{k+1} = \mathcal{N}_j^k + \mu(D_j \mathcal{Q}^{k+1} - \mathcal{F}_j^{k+1}) \end{cases} \quad (19)$$

因此,结合上述迭代过程,得到算法 1。

### 3.3 算法的计算复杂度分析

假设 HSI 的大小为  $m \times n \times p$ , 算法 1 的计算成本主要在于 4 个变量  $\mathbf{Y}, \mathbf{S}, \mathcal{F}_j, \mathcal{Q}$  的更新。更新变量  $\mathbf{Y}$  的计算成本主要在于矩阵的 SVD 分解, 由于引入了秩约束, 因此该变量的计算复杂度为  $O(mnp r)$ <sup>[7,9]</sup>; 更新变量  $\mathbf{S}$ ,  $\mathcal{F}_j$  时使用的均是软阈值算子, 总的计算复杂度为  $O(4mnp)$ <sup>[14]</sup>; 更新变量  $\mathcal{Q}$  时的计算成本在于快速的傅里叶变换算子  $\mathcal{F}(\cdot)$  和其逆变换, 总的时间复杂度为  $O(mnp \log(mnp))$ <sup>[13]</sup>。综上所述, 算法 1 整体的计算复杂度为  $O(mnp r + 4mnp + mnp \log(mnp))$ , 算法的去噪效果和具体的运行时间将会在第 4 节中的实验部分进行展示。

## 4 实验部分

本节对所提出的 CSRAGS 方法的有效性进行验证, 采用仿真和真实数据集进行实验。选取 5 种主流的 HSI 去噪方法进行对比, 即 LRMR 方法<sup>[2]</sup>、3DLogTNN 方法<sup>[8]</sup>、LLRSSTV 方法<sup>[11]</sup>、LRTDGS 方法<sup>[13]</sup>和 LRTFDFR 方法<sup>[14]</sup>。

(1)LRMR: 基于低秩矩阵恢复方法。首先将三维 HSI 立方体分割成多个块, 然后采用 RPCA 的思想对每个小块进行去噪。

(2)3DLogTNN: 基于张量秩的 HSI 恢复方法。采用 log 簇函数去近似表示张量的纤维秩, 以实现更准确的 HSI 秩表征。

(3)LLRSSTV: 局部低秩与 SSTV 正则化相结合的方法。将三维 HSI 立方体分为多个小块, 采用低秩和 SSTV 正则化相结合的方法对每一个小块进行处理, 最后合并。

(4)LRTDGS: 基于张量分解的方法。采用低秩张量分解的方法来探索 HSI 的低秩结构, 并采用基于  $\ell_{2,1}$  范数的 TV 正则项来探索 HSI 的群稀疏先验, 取得了令人影响深刻的效果。

(5)LRTFDFR: 在低秩张量分解的框架中, 分别探索 HSI 空间因子和光谱因子的群稀疏性和连续性。通过增强光谱因子的连续性来促进 HSI 整体的光滑性。

### 4.1 仿真数据实验

本文采用峰值信噪比(Peak Signal Noise Ratio, PSNR)、结构相似度(Structural Similarity Index Measure, SSIM)和光谱角制图(Spectral Angle Mapper, SAM)(详见文献<sup>[6]</sup>) 3 个指标对实验结果进行定量评价。对所有波段图片的

PSNR 和 SSIM 平均得到 MPSNR 和 MSSIM 指标。评价指标 MPSNR 和 MSSIM 越高并且 SAM 值越低, 说明整体去噪效果越好。

仿真数据实验采用大小为  $145 \times 145 \times 224$  的 AVIRIS Indian Pines(Indian)数据集<sup>1)</sup>, 并考虑两种不同的噪声情况来模拟混合噪声干扰下的真实数据。

Case 1 在 Indian 数据集所有波段的图片上随机加入均值为 0、方差为 0~0.2 的高斯噪声, 以及密度为 0~20% 的椒盐噪声。

Case 2 在 Case 1 的前提下, 随机选取 30 个波段加入 3~10 条像素宽度为 1~3 的死线; 再随机选取 40 个波段(其中 20 个波段为包含死线噪声的波段)加入 40 条条纹。

图 1 和图 2 分别给出了 Case 1 下第 72 波段和 Case 2 下第 127 波段的不同方法的恢复结果, 为了更好地对比视觉效果, 每幅图的相同位置都做了局部放大处理。可以清楚地看出, 在面对高级别的两种混合噪声的情况下, 单正则化的方法 LRMR 和 3DLogTNN 都有较多的高斯噪声残留。在 Case 2 中有更加强烈的混合噪声影响, 基于核范数的低秩正则化方法无法完整地去除混合噪声, 并且 LRTDGS 在面对强混合噪声时表现也很差。在两种情况下, LRTFDFR 方法和本文方法都成功去除了混合噪声, 由于 CSRAGS 方法采用了约束的平滑函数来更精确地探索 HSI 的低秩结构, 使得该方法的恢复结果具有更好的局部光滑度。

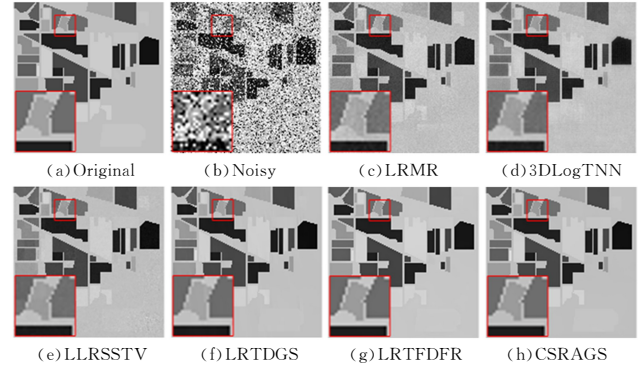


图 1 Case 1 下 Indian 数据集第 72 波段实验数据的对比  
Fig. 1 Comparison of experimental results at the 72th band of Indian data set in Case 1

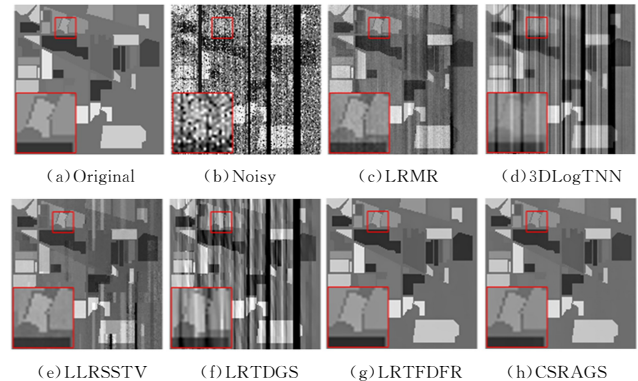


图 2 Case 2 下 Indian 数据集第 127 波段实验数据的对比  
Fig. 2 Comparison of experimental results at the 127th band of Indian data set in Case 2

<sup>1)</sup> [http://www.ehu.es/ccwintco/index.php?title=Hyperspectral\\_Remote\\_Sensing\\_Scenes](http://www.ehu.es/ccwintco/index.php?title=Hyperspectral_Remote_Sensing_Scenes)

为了进一步突出本文方法的优势,表 1 列出了各种方法的 3 个定量评价指标值和两种情况下的平均运行时间。图 3 给出了各种方法的每个波段图片的 PSNR 值和 SSIM 值的变化曲线。可以看出,本文方法在定量评价指标上

明显优于现有的主流方法,并且在噪声较强的波段也能有较好的效果。在运行时间方面,模型在加入了人工秩约束后,面对现有的主流去噪方法,在去噪效率上也有明显的优势。

表 1 不同方法恢复结果指标 MPSNR、MSSIM、SAM 和平均运行时间 Mean time

Case	Indexes	Noise	LRMR	3DLogTNN	LLRSSTV	LRTDGS	LRTDFDR	CSRAGS
Case1	MPSNR	14.9392	34.6924	33.5482	37.2384	41.6859	42.5351	45.9214
	MSSIM	0.2373	0.9061	0.9223	0.9680	0.9946	0.9973	0.9975
	SAM	20.9663	1.9063	1.9280	1.1432	0.7592	0.8492	0.8434
Case2	MPSNR	14.4466	32.7215	29.6476	34.5245	36.2060	41.4039	44.6884
	MSSIM	0.2262	0.8776	0.8092	0.9476	0.9549	0.9967	0.9980
	SAM	22.1401	3.1049	7.2023	2.5308	2.8465	1.1261	1.0357
Mean time/s		—	101	230	201	158	75	89

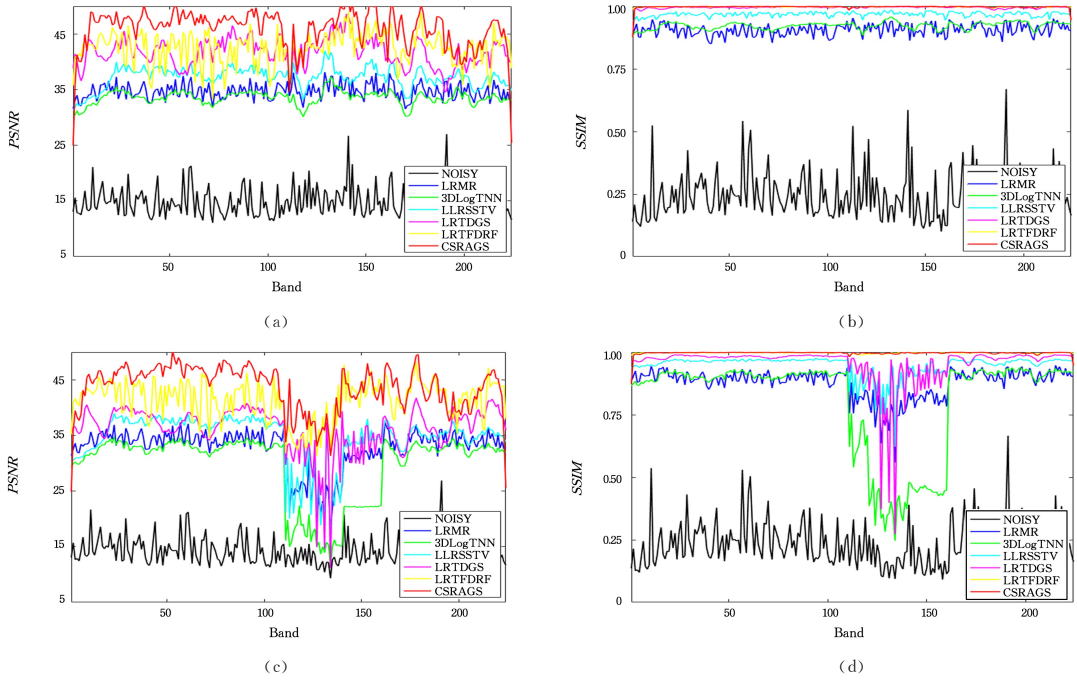


图 3 Case 2 下不同方法的 PSNR 和 SSIM 的对比图

Fig. 3 Comparison of PSNR and SSIM values of different methods in case 2

## 4.2 真实数据集实验

真实数据集实验选用大小为  $200 \times 200 \times 166$  的 urban 数据集<sup>1)</sup>。该数据集主要被死线噪声和条纹破坏,地物

信息的破坏较为严重。

各方法对真实数据集 urban 第 139 波段的去噪效果如图 4 所示。

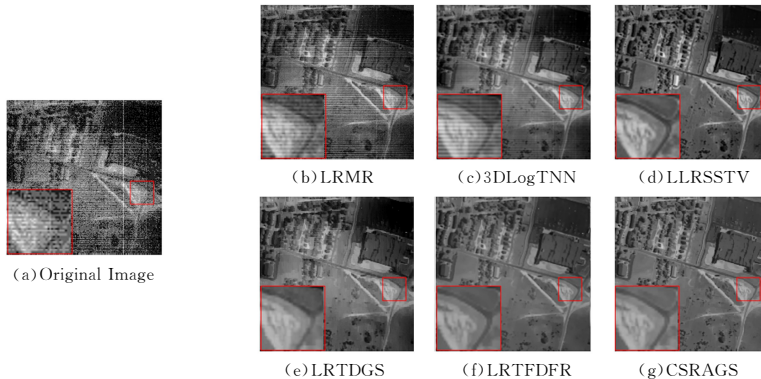


图 4 urban 数据集第 139 波段去噪效果的对比

Fig. 4 Denoising results at the 139th band of urban data set

<sup>1)</sup> <https://opus.nci.org.au/>

观察图 4 可知,基于单低秩正则化的方法都无法较好地去除图中的条纹噪声。LRTDGS 方法虽然成功去除了大量的噪声,但是可以从局部放大图片中看出该方法恢复结果的局部光滑度较差,而 LLRSSTV、LRTFDFR 和本文方法不仅完整地去除了噪声,还保证了图片的局部光滑度。

### 4.3 收敛性和参数分析

本文采取实验的方式来证明所提方法的收敛性。图 5 给出了模拟数据集 Indian Case2 在 CSRAGS 方法下 MPSNR 和 MSSIM 随迭代次数的增加而变化的情况。分析图 5 可以看出,随着迭代次数的增加,两个量化指标 MPSNR 和 MSSIM 有明显地增长趋势并在迭代 40 步之后都逐渐趋于稳定,这说明 CSRAGS 方法具有非常好的收敛性。

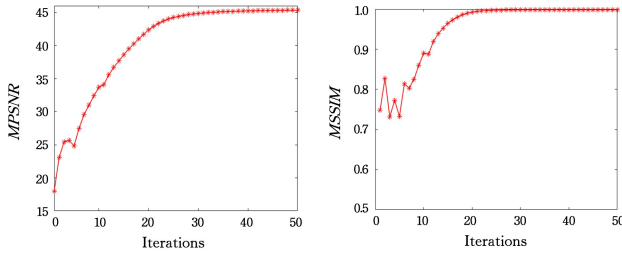


图 5 MPSNR 和 MSSIM 随迭代次数的变化

Fig. 5 MPSNR and MSSIM values versus the number of iteration

为了判断各参数对实验结果的影响,本文对 4 个参数  $\lambda$ ,  $\tau$ ,  $r$ ,  $\rho$  进行了实验分析,具体结果如下。

(1)对参数  $\lambda$ ,  $\tau$  的分析。根据文献[4]对参数  $\lambda$  的研究,即对于一个大小为  $m \times n$  的图像,可设置  $\lambda = \rho / \sqrt{m \times n}$ ,  $\rho$  为可调节参数,范围为  $1 \sim 50$ 。在该参数分析实验中,设定参数  $\rho$  的范围为  $[1, 5, 10, 15, 20, 25]$ ,设定参数  $\tau$  的范围为  $[0.01, 0.03, 0.05, 0.07, 0.09, 0.1]$ 。图 6 给出了在上述参数配比下模拟数据集 Indian Case2 的指标 MPSNR 和 MSSIM 的变化情况,可以看出 CSRAGS 方法对于两个主要参数都具有较强的鲁棒性。

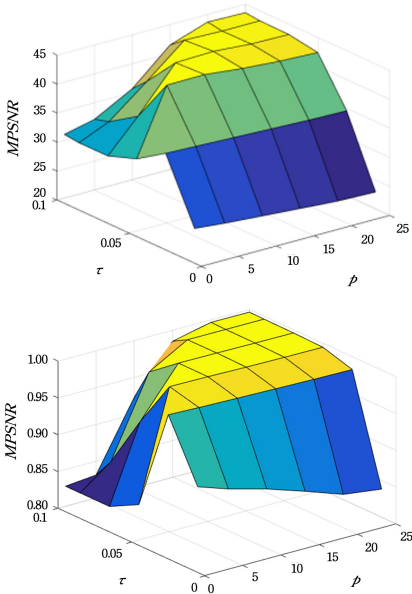


图 6 MPSNR 和 MSSIM 随参数  $\rho$ ,  $\tau$  的变化

Fig. 6 MPSNR and MSSIM values versus parameters  $\rho$ ,  $\tau$

(2)对参数  $r$  的分析。虽然可以采用算法对秩  $r$  进行估计,但是在噪声过强时往往会导致错误的估计<sup>[18]</sup>,本文采取人工实验调整的方法来确定参数  $r$  的最优设置。秩约束设置过大会导致算法执行效率变低,同时也会影响去噪效果。本文在参数分析实验中,设定  $r$  的范围为  $1 \sim 30$ ,步长为 2。图 7 给出了在上述参数设置下模拟数据集 Indian Case2 的指标 MPSNR 和 MSSIM 的变化情况。

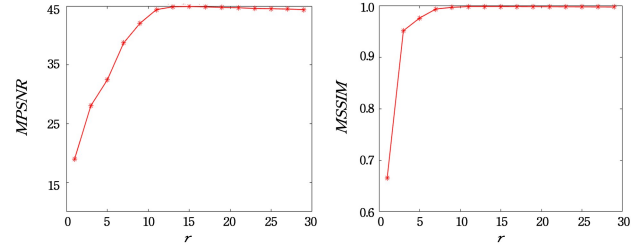


图 7 MPSNR 和 MSSIM 随秩  $r$  的变化

Fig. 7 MPSNR and MSSIM values versus rank  $r$

(3)参数  $\rho$  的分析。通过研究可以发现,光谱维差分图像的稀疏分布同空间差分图像的稀疏分布是完全不同的<sup>[19]</sup>,因此传统的将参数  $\rho$  默认为 1 不是最优的选择。本文设定  $\rho$  的范围为  $0.1 \sim 2$ ,步长为 0.2,计算在该参数的变化下模拟数据集 Indian Case2 的指标 MPSNR 和 MSSIM 的变化情况,结果如图 8 所示。

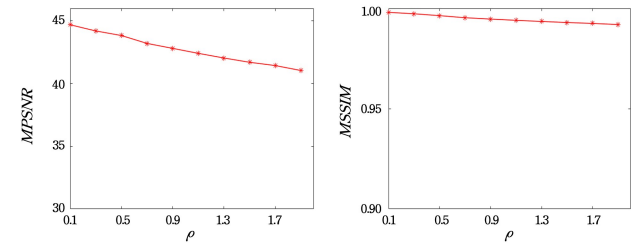


图 8 MPSNR 和 MSSIM 随参数  $\rho$  的变化

Fig. 8 MPSNR and MSSIM values versus parameter  $\rho$

根据上述参数分析和指标变化曲线图,表 2 列出了模拟数据集 Indian Case2 的最佳参数设置。

表 2 Indian Case2 数据集的最优参数设置

Table 2 Optimal parameter setting of Indian Case2 dataset

Data set	$\lambda$	$\tau$	$r$	$\rho$
Indian Case 2	15/145	0.05	13	0.1

**结束语** 本文提出了一种新的群稀疏正则化的约束平滑秩近似的方法,用于高光谱的去噪,并推导出了对应算法的迭代更新规则。该方法在 SRA 模型中引入了新的群稀疏正则化和秩约束,精确地探索了高光谱的内在低秩结构以及充分利用了空谱维内在关联性,提升了模型对混合噪声的去噪效果,尤其是在高频率噪声情况下的恢复效果,并增强了模型对局部细节的恢复效果和光滑度。不同噪声情况下的实验的结果表明,秩约束的引入极大提高了算法的执行效率,并且在评价指标和去噪目视效果上,该方法都明显优于现有的主流方法,这对 HSI 的后续应用有非常重大的现实意义。但本文方法对结构化的死线和非稀疏的条纹<sup>[9]</sup>的去噪效果并不理想。在未来的研究中,我们考虑将此类噪声单独建模并采用合适

的正则化来描述其特征,使得本文模型在面对特殊的噪声情况时也能有不错的表现。

## 参 考 文 献

- [1] XU M, SUN J, ZHOU X, et al. Research on nondestructive identification of grape varieties based on EEMD-DWT and hyperspectral image[J]. *Journal of Food Science*, 2021, 86(5): 2011-2023.
- [2] CHENG C, LI H, PENG J, et al. Hyperspectral image classification via spectral-spatial random patches network[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2021, 14: 4753-4764.
- [3] D ABOV, FOI A, KATKOVNIK V, et al. Image denoising by sparse 3-D transform-domain collaborative filtering[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(8): 2080-2095.
- [4] WRIGHT J, GANESH A, RAO S, et al. Robust principal component analysis: Exact recovery of corrupted low-rank matrices via convex optimization [C] // *Neural Information Processing Systems*. 2009: 2080-2088.
- [5] ZHANG H, HE W, ZHANG L, et al. Hyperspectral image restoration using low-rank matrix recovery[J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2014, 52(8): 4729-4743.
- [6] XIE Y, QU Y, TAO D, et al. Hyperspectral image restoration via iteratively regularized weighted Schatten p-norm minimization[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2016, 54(8): 4642-4659.
- [7] YE H, LI H, YANG B, et al. A novel rank approximation method for mixture noise removal of hyperspectral images[J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2019, 57(7): 4457-4469.
- [8] ZHENG Y, HUANG T, ZHAO X, et al. Mixed noise removal in hyperspectral image via low-fibered-rank regularization [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2020, 58(1): 734-749.
- [9] ZHANG H, CAI J, HE W, et al. Double low-Rank matrix decomposition for hyperspectral image denoising and destriping [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2021, 60: 1-19.
- [10] ZHAO J, TIAN S, GEIS C, et al. Spectral-Spatial classification integrating band selection for hyperspectral imagery with severe noise bands[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2020, 13: 1597-1609.
- [11] HE W, ZHANG H Y, SHEN H F, et al. Hyperspectral image denoising using local low-rank matrix recovery and global spatial-spectral total variation[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2018, 11(3): 713-729.
- [12] YE J, ZHANG X. Hyperspectral image denoising via subspace low-rank representation and spatial-spectral total variation[J]. *Journal of Imaging Science and Technology*, 2020, 64(1): 10507-1-10507-9.
- [13] CHEN Y, HE W, YOKOYA N, et al. Hyperspectral image restoration using weighted group sparsity-regularized low-rank tensor decomposition [J]. *IEEE Transaction Cybernetics*, 2020, 50(8): 3556-3570.
- [14] ZHENG Y, HUANG T, ZHAO X, et al. Double factor regularized low-rank tensor factorization for mixed noise removal in hyperspectral image[J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2020, 58(12): 8450-8464.
- [15] CHANG Y, YAN L, FANG H, et al. Anisotropic spectral-spatial total variation model for multispectral remote sensing image destriping[J]. *IEEE Transaction on Image Processing*, 2015, 24(6): 1852-1866.
- [16] ECKSTEIN J, YAO W. Understanding the convergence of the alternating direction method of multipliers: Theoretical and computational perspectives [J]. *Pacific Journal of Optimization*, 2015, 11(4): 619-644.
- [17] ATO P D, AN L. Convex analysis approach to D. C. Programming; Theory, algorithms and applications[J]. *Acta Mathematica Vietnamica*, 1997, 22(1): 289-356.
- [18] SUN L, JEON B, SOOMRO B, et al. Fast superpixel based subspace low rank learning method for hyperspectral denoising[J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 12031-12043.
- [19] PENG J, XIE Q, ZHAO Q, et al. Enhanced 3DTV regularization and its applications on HSI denoising and compressed sensing [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2020, 29: 7889-7903.



**ZHANG Lihong**, born in 1998, postgraduate. His main research interests include pattern recognition, remote sensing image processing, and machine learning.



**YE Jun**, born in 1981, Ph. D, associate professor. His main interests include pattern recognition, machine learning, and image processing.