命题逻辑中的*L*-型冗余性质

刘凌荣, 陈树伟, 姜世攀

计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.220600013

命题逻辑中的 L-型冗余性质

刘凌荣　陈树伟　姜世攀
1 西南交通大学数学学院　成都 611756
2 系统可信性自动验证国家地方联合工程实验室　成都 611756
(13509752194@163.com)

摘　要　在命题逻辑 SAT 求解过程中,子句集简化技术是重要的一个环节。冗余性质所对应的子句消去方法可以准确识别并删除冗余子句。无论是在预处理阶段还是 SAT 求解过程中,子句消去方法嵌入到 SAT 求解器均可加快求解器的求解效率。现有的高效子句消去方法大多基于封锁子句冗余性质和蕴涵模归结子句冗余性质扩展而来,为检查子句 C 是否冗余,只需要考虑子句 C 是否满足冗余条件。提出一种 L-型冗余性质,它是封锁冗余性质、包含冗余性质、蕴涵模归结冗余性质的推广,将冗余子句判断条件由单个文字的归结式拓展到文字集合的组合。然后,针对 L-型冗余性质,分析 L-型冗余子句具有的性质,并将 L-型冗余子句与已有的冗余子句的高效性进行比较,说明所提出的 L-型冗余性质的高效性。

关键词:命题逻辑;子句消去方法;L-型冗余性质
中图法分类号　TP181

L-type Redundancy Property in Propositional Logic

LIU Lingrong, CHEN Shuwei and JIANG Shipan
1 School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China
2 National-Local Joint Engineering Laboratory of System Credibility Automatic Verification, Chengdu 611756, China

Abstract　The technique of clause set simplification is a crucial part in the process of propositional logic SAT solving. The clause elimination methods corresponding to the redundancy property can accurately identify and delete redundant clauses. Either in the pre-processing stage or in the process of SAT solving, the embedded clause elimination methods in the SAT solver accelerate the solving efficiency of the solver. A large number of efficient clause elimination methods are extended based on the redundancy properties of blocked clauses and implication module resolution clauses. In order to check whether clause C is redundant, we need only to consider whether clause C satisfies the redundancy conditions. The proposed L-type redundancy is an extension of the blocked redundancy property, subsumption redundancy property and implication module resolution redundancy. It extends the judgement condition of redundant clause from the resolution of single literal to the combination of the set of literals. According to the properties of L-type redundancy, this paper analyzes the properties of L-type redundancy clause, and applies comparison analysis on the efficiency of L-type redundancy clauses and other existed redundant clauses, so as to illustrate the efficiency of L-type redundancy clauses.

Keywords　Propositional logic, Clause elimination method, L-type redundancy property

1　引言

自动推理是人工智能领域的重要研究问题之一,子句集可满足性判定一直是计算机科学中的热点问题。在子句集可满足性判断过程中,冗余子句是普遍存在的,冗余子句的删除有助于简化子句集,加速求解器求解。在早期自动推理研究中,子句集中主要的预处理策略有恒真[1]消去(Tautology Elimination, TE)、包含[2]消去(Subsumption Elimination, SE)、单文字规则[1]、纯文字规则[1]等。这些简化策略的出现加速了命题逻辑子句集的可满足性判定,推动了自动推理学科的发展。2010 年,Javisalo 提出了著名的封锁子句消去[3](Blocked Cause Elimination, BCE)方法,该方法被嵌入到求解器预处理器中,极大地提高了求解器的求解能力和效率。在 2015 年 SAT 竞赛中,以封锁子句分解技术为核心的 abcd-SAT 求解器[4]获得了 SAT 求解冠军。2010 年,Heule 等提出了隐藏文字[5]和不对称文字[5]概念,并将隐藏和不对称文字与恒真和包含冗余性质相结合,提出了多种保持逻辑等价的冗余性质 P。其冗余性质 P 如表 1 所列[5]。

表 1　基于逻辑等价的子句消去方法

Table 1　Clause elimination methods based on logic equivalence

子句 C 在子句集 F 中的冗余性质 P	判定方法
T	子句 C 在子句集 F 中为恒真式
HT	子句 $HLA(F,C)$ 为恒真式
AT	子句 $ALA(F,C)$ 为恒真式
S	子句 C 被 $F\backslash\{C\}$ 所包含
HS	子句 $HLA(F,C)$ 被 $F\backslash\{C\}$ 所包含
AS	子句 $ALA(F,C)$ 被 $F\backslash\{C\}$ 所包含

2010 年,Heule 将封锁子句推广到隐藏封锁子句[5](Hid-

基金项目:国家自然科学基金(61976130)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61976130).
通信作者:陈树伟(swchen@swjtu.edu.cn)

den Blocked Clause，HBC）、不对称封锁子句[5]（Asymmetric Blocked Clause，ABC）、覆盖[6]子句（Covered Clause，CC）、隐藏覆盖[6]子句（Hidden Covered Clause，HCC）及不对称覆盖[6]子句（Asymmetric Covered Clause，ACC）。2012 年，Javisalo 等[7]将归结原理（Resolution Principle）前置后，发现基于子句 C 的归结式具有文献[5]中的性质 P，则称子句 C 在子句集中具有性质 RP，删除具有性质 RP 的子句不会影响子句集的可满足性；并且，若简化子句集是可满足的，那么总是可以通过简化子句集的可满足例找到原子句集的可满足例。其 RP 冗余性质如表 2[7]所列。

表 2 将归结原则前置所得到可满足性等价的冗余性质

Table 2 Redundancy properties of satisfiability equivalence obtained by resolution lookahead

子句 C 在子句集中的冗余性 RP	判定方法
RT＝BC	C 的所有 l-归结式为恒真式
RHT	C 的所有 l-归结式 R_i，$HLA(F,R_i)$ 为恒真式
RAT	C 的所有 l-归结式 R_i，$ALA(F,R_i)$ 为恒真式
RS	C 的所有 l-归结式被 $F\backslash\{C\}$ 所包含
RHS	C 的所有 l-归结式 R_i，$HLA(F,R_i)$ 被 $F\backslash\{C\}$ 包含
RAS	C 的所有 l-归结式 R_i，$ALA(F,R_i)$ 被 $F\backslash\{C\}$ 包含

在 RP 冗余性质中，RAT（Resolution Asymmetric Tautology）冗余性质对应的子句消去方法 RATE（Resolution Asymmetric Tautology Elimination）能够删除具有多种冗余性质的子句，所以 RATE 子句消去方法广泛存在于求解器中作为预处理的一部分。2016 年，Kiesl[8]将封锁子句进一步推广，提出了集合封锁（Set Blocked Clause，$\mathrm{SET_{BC}}$）子句。2017 年，Heule[9]提出了传播冗余（Propagation Redundant，PR），并基于传播冗余性质提出了 SDCL[10]（Satisfaction-driven Clause Learning）求解框架。2019 年，Ning 等[11]提出了蕴涵模归结理论（Implication Module Resolution Principle，IMR），并根据该理论提出了多种具有组合形式的子句消去方法，这些方法的求解能力和求解效率均好于封锁（BC）子句；同年，将这些子句消去方法提升到一阶逻辑[12]并将蕴涵模归结理论也由单个文字提升到多个文字[13]。L-型冗余子句是基于子句集 F，判断子句 $C(C\in F)$ 中文字集合 $L\subseteq C(L\neq\emptyset)$ 与子句集 $F_{\bar{L}}$ 中所有子句的组合是否满足 L-型冗余条件。本文对 L-型冗余子句的性质进行讨论，分析 L-型冗余性质与已存在的冗余性质间的关系，并将 L-型冗余性质与已有的冗余性质进行高效性比较。

2 预备知识

在命题逻辑子句集中，称原子及其否定为文字，子句是由若干文字的析取构成，子句集是由若干子句合取构成。文字常用字母 l 表示，子句常用字母 C 表示，子句集常用字母 F 表示。对于文字集合 L，$\bar{L}=\{\bar{l}\mid l\in L\}$。对于一个子句集 F 和文字集合 L，F_L 表示由 F 中至少含有文字集合 L 中的一个文字的子句构成的子句集，即 $F_L=\{C\mid C\in F, C\cap L\neq\emptyset\}$。真值解释是将文字映射到 $\{0,1\}$ 上的函数，文字 l 在解释 I 下为真，则有 $I(l)=1$；同时文字 $\bar{l}$ 在解释 I 下为假，即 $I(\bar{l})=0$。若子句 C 中存在文字 $l(l\in C)$ 在解释 I 下为真，则称解释 I 满足子句 C；否则，称子句 C 在解释 I 下为假（子句 C 中所有文字在解释 I 下均为假）。子句集 F 是可满足的，当且仅当存在解释 I 满足子句集 F 中的所有子句。若子句集 F 的任意可满足解释均满足子句 C，则称子句集 F 语义蕴涵子句 C（记 $F\vDash C$）。若存在子句消去方法 S_1 和 S_2，对任意相同子句集 F 分别使用子句消去方法 S_1 和 S_2 得到简化子句集 $S_1(F)$ 和 $S_2(F)$，若 $S_1(F)\subseteq S_2(F)$，则称子句消去方法 S_1 至少与 S_2 一样有效；若存在子句 $C\in S_2(F)$ 但 $C\notin S_1(F)$，即 $S_1(F)\subset S_2(F)$，称子句消去方法 S_1 比 S_2 更加高效[6]。

定义 1[5] 命题逻辑子句集中，不对称文字添加子句 $ALA(F,C)$ 是一个不断重复以下步骤得到的子句：若文字 $l_1,l_2,\cdots,l_k\in C$，存在子句 $(l_1\vee l_2\vee\cdots\vee l_k\vee l)\in F\backslash\{C\}$，则可将文字 $\bar{l}$ 添加到子句 C 上，即 $C:=C\cup\{\bar{l}\}$，此时称 $\bar{l}$ 为子句 C 的不对称文字（Asymmetric Literal）。

例 1 考虑命题逻辑子句集 $F=(a\vee b\vee c)\wedge(a\vee b\vee d)\wedge(a\vee\bar{d}\vee e)$，则对子句 $a\vee b\vee c$ 进行不对称文字添加 $ALA(F,a\vee b\vee c)=a\vee b\vee c\vee\bar{d}\vee\bar{e}$。

定理 1[11] 在命题逻辑子句集中，若文字 l 为子句 C 的不对称文字，则 $F\backslash\{C\}\mid=(C\equiv C\vee l)$。

该定理说明子句集 F 与子句集 $(F\backslash\{C\})\cup\{C\vee l\}$ 保持逻辑等价，即对子句集中的子句添加不对称文字的过程始终保持子句集逻辑等价。

定义 2[11] 在命题逻辑子句集中，设子句 $C=l\vee C_1$，子句 $D=\bar{l}\vee D_1$，称子句 $C_1\cup D_1$ 为子句 C 和 D 的 l-归结式。

定义 3[7] 在命题逻辑子句集中，设有子句集 F 和 F'，若 F' 是 F 的子集且它们同时可满足或同时不可满足，则称子句集 F 与 F' 可满足性等价。

定义 4[7] 在命题逻辑子句集中，若子句集 F 与 $F\backslash\{C\}$ 可满足性等价，则称子句 C 是冗余的。

例 2 设子句集 $F=\{a\vee b,\bar{a}\vee\bar{b}\}$。子句 $C=a\vee b$ 是冗余子句，子句集 F 和子句集 $F'=\{\bar{a}\vee\bar{b}\}$ 可满足性等价（因为子句集 F' 为子句集 F 的子集且 F' 与 F 都可满足，但 F' 与 F 并不是逻辑等价）。

定义 5[11] 在命题逻辑子句集中，如果子句 C 中文字 l $(l\in C)$，与子句集 $F\backslash\{C\}$ 中所有含有文字 $\bar{l}$ 的子句进行归结，得到的所有 l-归结式都被 $F\backslash\{C\}$ 蕴涵，则称子句 C 为子句集 F 中基于文字 l 的蕴涵模归结子句，子句 C 在子句集 F 中满足蕴涵模归结原则（Implication Modulo Resolution，IMR）。

例 3 在命题逻辑子句集中，考虑子句集 $F=\{l\vee a,\bar{l}\vee b,c\vee a,\bar{c}\vee b\}$ 和子句 $C=l\vee a$。基于子句 C 和文字 l，子句 C 只能与子句 $\bar{l}\vee b$ 归结，所得归结式为 $a\vee b$，因为在子句集 $F\backslash\{C\}$ 中存在子句 $c\vee a$ 和 $\bar{c}\vee b$ 的归结式为 $a\vee b$，所以子句 C 的所有 l-归结式被子句集 $F\backslash\{C\}$ 蕴涵，故子句 C 满足蕴涵模归结原则。

定理 2[11] 在命题逻辑子句集中，满足蕴涵模归结原则（IMR）的子句是冗余的。

定义 6[8] 设子句 C 和子句集 F 满足 $C\in F$，存在子句 C 的非空文字集合 L，若对任意子句 $D\in F_{\bar{L}}$，满足 $(C\backslash L)\cup\bar{L}\cup D$ 为恒真式（$\bar{L}$ 表示 L 中所有文字取非的析取），则称子句 C 为子句集 F 中的集合封锁（Set Blocked，$\mathrm{SET_{BC}}$）子句。

定理 3[8] 在命题逻辑子句集中，$\mathrm{SET_{BC}}$ 子句是冗余的。

在例 2 中，取子句 $C=a\vee b$ 和文字集合 $L=\{a\}$，在子句

集 $F_{\bar{L}}$ 中只有含有子句 $D=\bar{a}\vee\bar{b}$ 且满足 $(C\backslash L)\cup\bar{L}\cup D=b\vee\bar{a}\vee\bar{b}$ 为恒真子句，所以子句 C 为 F 中的 $\mathrm{SET_{BC}}$。

定理 4[8]　在命题逻辑子句集中，AT 子句不一定是 $\mathrm{SET_{BC}}$ 子句，并且 $\mathrm{SET_{BC}}$ 不一定是 AT 子句。

例 4　考虑子句集

$F=\{\bar{a}\vee x,\bar{b}\vee x,\bar{c}\vee x,a\vee b,a\vee b\vee c\}$，对于子句 $C=a\vee b\vee c$，显然子句 C 是不对称恒真子句。因为通过子句 $a\vee b$ 可以添加不对称文字 $\bar{a}$ 或 $\bar{b}$。现假设子句 C 是集合封锁 ($\mathrm{SET_{BC}}$) 子句，即存在文字集合 $L\subseteq C$，对于 $F_{\bar{L}}$ 中任意子句 C' 均满足 $(C\backslash L)\cup\bar{L}\cup C'$ 为恒真子句。因为 $L\subseteq C$ 非空，$(\bar{v}\vee x)\cap\bar{L}\neq\emptyset$，对于 $v\in\{a,b,c\}$。令 $C'=\bar{v}\vee x$，对于 $v\in L$，$(C\backslash L)=x$，显然 $\bar{v}\notin(C\backslash L)$ 且 $\bar{v}\notin\bar{L}$，所以 $(C\backslash L)\cup\bar{L}\cup C'$ 不是恒真子句。因此，子句 C 不是集合封锁子句。反过来，如例 2 中的子句集 F 和子句 $C=a\vee b$，当选取文字集合 $L=\{a\}$ 或 $L=\{b\}$ 时，子句 C 相对于子句集 F 均满足集合封锁子句条件，但子句 C 在子句集 F 中不是不对称恒真子句。

定义 7[14]　在命题逻辑子句集 F 中，若子句 $C(C\in F)$ 中存在非空文字集合 L，使得子句 $C=L\cup C_1$，对于任意子句 $D=\bar{S}\cup D_1$，其中 $S\subseteq L$(S 非空)，称 $\bar{L}\cup D_1$($\bar{L}$ 表示 L 中的文字取非进行析取)为子句 C 的 $\bar{L}$-式，称 $C_1\cup D_1$ 为子句 C 的 L-式，若满足下列条件：

(1)若子句 C 的 $\bar{L}$-式是恒真式或 L-式也是恒真式，则称子句 C 为子句集 F 中的 L-集合封锁（L-Set blocked，L-$\mathrm{SET_{BC}}$）子句。

(2)若子句 C 的 $\bar{L}$-式是恒真式或 L-式被子句集 $F\backslash\{C\}$ 包含，则称子句 C 在子句集 F 中为 L-集合包含（*L-Set Subsumption*，L-$\mathrm{SET_S}$）子句。

(3)若子句 C 的 $\bar{L}$-式是恒真式或者 L-式被子句集 $F\backslash\{C\}$ 所蕴涵，则称子句 C 在子句集 F 中满足 L-集合蕴涵模归结原则 L-*Set Implication Resolution Clause*，L-$\mathrm{SET_{IMR}}$。

定义 8[14]　在命题逻辑子句集中，如果对子句 C 进行不对称文字添加得到子句 C_2，且子句 C_2 中存在非空文字集合 L，满足 $C_2=L\cup C_2'$。若对于任意子句 $D=\bar{S}\cup D_1$，其中 $S\subseteq L$(S 非空)，称 $\bar{L}\cup D_1$ 为子句 C_2 的 $\bar{L}$-式，称 $C_2'\cup D_1$ 为子句 C_2 的 L-式，若满足下列条件：

(1)若子句 C_2 的 $\bar{L}$-式是恒真式或者 L-式为恒真式，则称子句 C 在子句集 F 中为 L-不对称集合封锁子句 L-Asymmetric Set Blocked，L-$\mathrm{ASET_{BC}}$。

(2)若子句 C_2 的 $\bar{L}$-式是恒真式或 L-式被 $F\backslash\{C\}$ 中子句所包含，则称子句 C 在子句集 F 中为 L-不对称集合包含子句（L-Asymmetric Set Subsumption，L-$\mathrm{ASET_S}$）。

(3)若子句 C_2 的 $\bar{L}$-式是恒真式或者 L-式被 $F\backslash\{C\}$ 蕴涵，则称子句 C 在子句集 F 中满足 L-不对称集合蕴涵模归结原则（L-Asymmetric Set Implication Module Resolution Clause，L-$\mathrm{ASET_{IMR}}$）。

3　*L*-型冗余性质子句的性质比较

本节主要介绍 L-型冗余子句具有的性质，并将 L-型冗余性质与已有的冗余性质进行高效性比较。最后，给出 L-型冗余性质与已有冗余性质的关系图。

定理 5　在命题逻辑子句集中，BC 子句集是 L-$\mathrm{SET_{BC}}$ 子句集的真子集。

证明：需要证明 $BC\subseteq L$-$\mathrm{SET_{BC}}$，现假设存在子句 $C\in F$ 是基于文字 l 的封锁子句，因此满足对任意子句 $D\in F_{\bar{l}}$，那么 $C\cup(D\backslash\{\bar{l}\})$ 是恒真式。所以从如下两个方面分析：

(1)如果子句 C 是恒真式，不妨假设 $C=C'\vee l\vee\bar{l}$，那么取 $L=\{l,\bar{l}\}$，则 $\bar{L}=\{l,\bar{l}\}$ 始终满足 $\bar{L}$-式 $\bar{L}\cup D_1$($D_1=D\backslash\{\bar{l}\}$)为恒真式。

(2)如果子句 C 不是恒真式，由于 C 是封锁子句，因此可以假设子句 C 是基于文字 l 的封锁子句。所以，对任意子句 $D\in F_{\bar{l}}$，满足 $C\cup(D\backslash\{\bar{l}\})$ 是恒真式。取 $L=\{l\}$，由 $C\cup(D\backslash\{\bar{l}\})$ 是恒真式知，该子句中存在文字 $x\neq l$，使得 $\bar{x}\in C\cup(D\backslash\{\bar{l}\})$，因为 $x\neq l$，所以 $\bar{x}\neq\bar{l}$，故 $\bar{x}\in(C\backslash\{l\})\cup(D\backslash\{\bar{l}\})$。所以子句 $(C\backslash\{l\})\cup(D\backslash\{\bar{l}\})$ 是恒真式，由于 $L=\{l\}$，所以满足 L-式 $C_1\cup D_1$ 是恒真式。

由(1)和(2)知，BC 子句是 L-$\mathrm{SET_{BC}}$ 子句的特例。但反之，如果一个子句是 L-$\mathrm{SET_{BC}}$ 子句，那么该子句不一定是 BC 子句。如例 5 所示。

例 5　在命题逻辑子句集 F 中，$F=\{\bar{a}\vee b,\bar{b}\vee a,a\vee b\}$，取子句 $C=a\vee b$，显然子句 C 不是 BC 子句，因为基于文字 a，子句 $(a\vee b)\cup((\bar{a}\vee b)\backslash\{\bar{a}\})=a\vee b$ 不是恒真式。基于文字 b，$(a\vee b)\cup((\bar{b}\vee a)\backslash\{\bar{b}\})=a\vee b$ 不是恒真式。但取文字集合 $L=\{a,b\}$，子句 $\bar{a}\vee b$ 包含文字 $\bar{a}$，$\bar{b}\vee a$ 包含文字 $\bar{b}$，所以子句 $\bar{a}\vee b$，$\bar{b}\vee a$ 均属于 $F_{\bar{L}}$，对于子句 $a\vee b$ 和 $\bar{a}\vee b$ 基于文字集合的 $L=\{a,b\}$ 的 L-式为 b，$\bar{L}$-式 $\bar{a}\vee\bar{b}\vee b$ 为恒真式。对于子句 $a\vee b$ 和 $\bar{b}\vee a$ 基于文字集合 $L=\{a,b\}$ 的 L-式为 a，$\bar{L}$-式 $\bar{a}\vee\bar{b}\vee a$ 为恒真式。所以，在子句集 F 中，子句 $a\vee b$ 是 L-$\mathrm{SET_{BC}}$ 子句。

定理 6　在命题逻辑子句集中，RS 子句集是 L-$\mathrm{SET_S}$ 子句集的真子集。

证明：若子句 C 是子句集 F 的 RS 子句，则在子句 C 中存在文字 l，并满足对任意子句 $D\in F_{\bar{l}}$，其 l-归结式 $(C\backslash\{l\})\cup(D\backslash\{\bar{l}\})$ 被子句集 $F\backslash\{C\}$ 包含。这里我们可以取 $L=\{l\}$，则 $(C\backslash\{l\})\cup(D\backslash\{\bar{l}\})$ 为子句 C 关于子句集 F 的 L-式。由 $(C\backslash\{l\})\cup(D\backslash\{\bar{l}\})$ 被子句集 $F\backslash\{C\}$ 包含知，子句 C 的 L-式被子句集 $F\backslash\{C\}$ 包含，所以子句 C 为 L-$\mathrm{SET_S}$ 子句。

定理 7　在命题逻辑子句集，RAT 子句集是 L-$\mathrm{SET_{IMR}}$ 子句集的真子集，即 $RAT\subseteq L$-$\mathrm{SET_{IMR}}$，但 L-$\mathrm{SET_{IMR}}\not\subset RAT$。

证明：设子句 C 是子句集 F 的 RAT 子句，则在子句 C 中存在文字 l，其所有的 l-归结式在子句集 $F\backslash\{C\}$ 中具有 AT 性质，即对于任意子句 $D\in F_{\bar{l}}$，子句 $C\cup(D\backslash\{l\})$ 均可以通过 $F\backslash\{C\}$ 中子句添加不对称文字成为恒真式。这里我们可以取 $L=\{l\}$，则子句 C 的 L-式为 $C'\cup D'$(其中 $C'=C\backslash\{l\}$，$D'=D\backslash\{\bar{l}\}$)。显然子句 C 的 L-式为 $C'\cup D'$ 被子句集 $F\backslash\{C\}$ 蕴涵，因为对于子句 $C'\cup D'$，可以通过子句 D 对子句 $C'\cup D'$ 添加不对称文字 l，添加文字 l 后的子句为 $C\cup(D\backslash\{\bar{l}\})$，但 $C\cup(D\backslash\{\bar{l}\})$ 为子句集 F 的 AT 子句，所以 C 的 L-式 $C'\cup D'$ 也为

子句集 F 中的不对称恒真子句，满足 C 的 L-式为 $C'\cup D'$ 被子句集 $F\setminus\{C\}$ 所蕴涵。所以 RAT 子句一定是 L-SET$_{\text{IMR}}$ 子句。

但反过来却不一定。因为文字集合 L 可以包含多个文字，所以 L-SET$_{\text{IMR}}$ 子句不一定是 RAT 子句。

推论 1 在命题逻辑子句集中，L-SET$_{\text{BC}}$ 子句集是 L-SET$_{\text{IMR}}$ 子句集的真子集。

证明：由 BC 子句一定也是 IMR 子句可得。

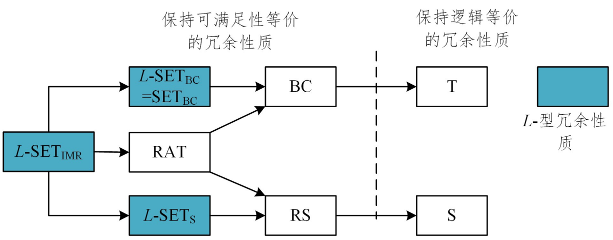
推论 2 在命题逻辑子句集中，L-SET$_{\text{S}}$ 子句集是 L-SET$_{\text{IMR}}$ 子句集的真子集。

证明：由包含子句一定也是 IMR 子句可得。

推论 3 在命题逻辑子句集中，IMR 子句集是 L-SET$_{\text{IMR}}$ 子句集的真子集。且当取文字集合 L 为单个文字时，子句 C 是 IMR 子句，当且仅当子句 C 是 L-SET$_{\text{IMR}}$ 子句。

证明：证明过程类似定理 7。

由此，可以得到 L-文字集合相关的冗余性质高效性传递图，如图 1 所示。



注：箭头 A 指向 B 表示性质 A 比性质 B 更加高效

图 1 冗余性质比较图

Fig. 1 Comparison of redundancy properties

4 *L*-型不对称冗余性质子句的性质比较

本节主要介绍 L-型冗余性质的不对称变体，并将 L-型冗余性质不对称变体与 L-型冗余性质以及已有冗余性质进行高效性比较，说明 L-型冗余性质不对称变体的高效性。最后，给出 L-型冗余性质与已存在冗余性质的关系。

定义 9[14] 设在命题逻辑子句集 F 中，C 是 F 中的子句。在子句集 F 中先对子句 C 进行不对称文字添加，得到子句 $ALA(F,C)$，L 是子句 $ALA(F,C)$ 的一个非空文字集合，若对于任意子句 $D\in F_{\bar{L}}$，满足子句 $(ALA(F,C)\setminus L)\cup\bar{L}\cup D$ 为恒真式，则称子句 C 为基于子句集 F 的不对称集合封锁(Asymmetric Set Blocked，ASET$_{\text{BC}}$)子句。

定理 8 在命题逻辑子句集中，AT 子句集是 ASET$_{\text{BC}}$ 子句集的真子集。

证明：假设存在子句集 F 及子句 $C\in F$，满足子句 C 是 AT 子句，则子句 $ALA(F,C)$ 中存在互补文字，不妨设为 $l,\bar{l}$。取 $L=\{l,\bar{l}\}$，则 $\bar{L}=\{l,\bar{l}\}$，满足子句 $(ALA(F,C)\setminus L)\cup\bar{L}\cup D$ 为恒真式，则子句 C 为 ASET$_{\text{BC}}$ 子句。反过来不一定，因为 SET$_{\text{BC}}$ 子句一定 ASET$_{\text{BC}}$ 子句，但定理 4 说明 AT 子句和 SET$_{\text{BC}}$ 子句没有关系。

定理 9 在命题逻辑子句集中，ABC 子句集是 L-ASET$_{\text{BC}}$ 子句集的真子集。

证明：由定理 5 知，BC 子句集是 L-SET$_{\text{BC}}$ 子句集的真子集。再由 ABC 子句和 L-ASET$_{\text{BC}}$ 子句定义知，ABC 子句集一定是 L-ASET$_{\text{BC}}$ 子句集的真子集。

定理 10 在命题逻辑子句集中，L-SET$_{\text{BC}}$ 子句集是 L-ASET$_{\text{BC}}$ 子句集的真子集。

证明：假设子句 C 是子句集 F 中的 L-SET$_{\text{BC}}$ 子句，所以存在文字集合 $L\subseteq C$，对于任意子句 $D\in F_{\bar{L}}$ 均满足 $\bar{L}\cup(D\setminus\bar{S})$ 或 $(C\setminus L)\cup(D\setminus\bar{S})$ 是恒真式。由于子句 $ALA(F,C)$ 是在子句 C 中添加不对称文字，所以必然满足 $C\subseteq ALA(F,C)$，所以至少可以取与子句 C 相同的文字集合 L 来保证 $\bar{L}\cup(D\setminus\bar{S})$ 为恒真式或 $(ALA(F,C)\setminus L)\cup(D\setminus\bar{S})$ 是恒真式。但是反过来却不一定，文献[14]已说明了 L-SET$_{\text{BC}}$ 子句等价于 SET$_{\text{BC}}$ 子句。但是由定理 4 知，AT 子句与 SET$_{\text{BC}}$ 子句没有关系。所以，L-SET$_{\text{BC}}$ 子句与 AT 子句没有关系。但定理 8 说明了 AT 子句一定是 L-ASET$_{\text{BC}}$ 子句。

定理 11 在命题逻辑子句集中，ARS 子句集是 L-ASET$_{\text{S}}$ 子句集的集。

证明：若子句 C 在子句集 F 中具有 ARS，则子句 C 为 RS 子句或子句 $ALA(F,C)$ 具有性质 RS。由不对称文字添加规则和定理 6 知，ARS 子句是 L-ASET$_{\text{S}}$ 子句的真子集。

定理 12 在命题逻辑子句集中，若子句 C 是 L-SET$_{\text{S}}$ 子句，则子句 C 也一定是 L-ASET$_{\text{S}}$ 子句。

证明：假设子句 C 在子句集 F 中为 L-SET$_{\text{S}}$ 子句，则子句 C 中存在文字集合 L 满足 $\bar{L}$-式为恒真式，或 L-式被子句集 $F\setminus\{C\}$ 包含。那么子句 $ALA(F,C)$ 也一定是 L-SET$_{\text{S}}$ 子句，因为子句 $C\subseteq ALA(F,C)$，所以可以选取与子句 C 相同的文字集合 L 保证子句 $ALA(F,C)$ 也为 L-SET$_{\text{S}}$ 子句。所以，L-SET$_{\text{S}}$ 子句一定是 L-ASET$_{\text{S}}$ 子句。反过来，L-ASET$_{\text{S}}$ 子句不一定是 L-SET$_{\text{S}}$ 子句，如例 6 所示。

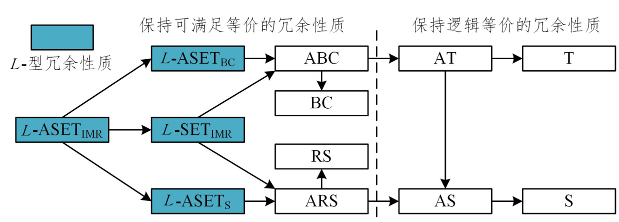
例 6 考虑子句集 $F=\{a\vee b, a\vee\neg d\}$，对于子句 $C=a\vee b$，选取文字集合 $L=\{a\}$，$L=\{b\}$，$L=\{a,b\}$，$F_{\bar{L}}$ 均为空集，所以子句 C 在子句集 F 中不满足不对称归结包含条件。但 $ALA(F,C)=a\vee b\vee d$，取文字集合 $L=\{d\}$，其 L-式为 $a\vee b\vee\bar{d}$，L-式被子句集 $F\setminus\{C\}$ 所包含，所以子句 C 在 F 不为 L-SET$_{\text{S}}$ 子句但是为 L-ASET$_{\text{S}}$ 子句。

定理 13 在命题逻辑子句集中，L-SET$_{\text{IMR}}$ 子句集是 L-ASET$_{\text{IMR}}$ 子句集的真子集。

同样，考虑例 6 中的子句集 $F=\{a\vee b, a\vee\bar{d}\}$，对于子句 $C=a\vee b$，选取文字集合 $L=\{a\}$，$L=\{b\}$，$L=\{a,b\}$，$F_{\bar{L}}$ 均为空集，所以子句 C 在子句集 F 中不满足 L-SET$_{\text{IMR}}$ 条件。但 $ALA(F,C)=a\vee b\vee d$，取文字集合 $L=\{d\}$，其 L-式为 $a\vee b\vee\bar{d}$，L-式被子句集 $F\setminus\{C\}$ 所蕴涵，所以子句 C 在 F 为 L-ASET$_{\text{IMR}}$ 子句。

推论 4 RAT 子句集是 L-不对称集合蕴涵模归结(L-ASET$_{\text{IMR}}$)子句集的真子集。

由此，我们可以得到 L 文字集合的不对称变体的冗余性质传递图，如图 2 所示。



注：箭头 A 指向 B 表示性质 A 比性质 B 更加高效

图 2 不对称变体冗余性质的比较

Fig. 2 Comparison of asymmetric variant redundancy properties

结束语 由于命题逻辑求解器能大幅提升句集的简化和求解效率，越来越多的现实问题被转化为命题逻辑子句集，借助命题逻辑求解器对子句集进行简化和求解。对这些问题的求解，推动了逻辑学、专家系统、知识推理等领域的发展。在命题逻辑子句集中，L-型冗余子句的删除不会影响子句集的可满足性。本文具体分析了 L-型冗余子句具有的性质，将 L-型冗余性质与已有的子句进行高效性比较分析，结果表明 L-集合封锁子句（L-SET_{BC}）比著名的封锁子句（BC）更高效，L-集合蕴涵模归结子句（L-SET_{IMR}）比 RAT 子句更高效。分析了这些冗余性质的子句的不对称变体性质，并将 L-型冗余性质与对应的不对称变体进行高效性比较，结果显示 L-型不对称变体均比对应的比 L-型冗余性质更高效。说明了 L-型冗余子句与已存在的冗余子句间的关系，为命题逻辑的简化技术提供了理论基础。目前，RAT 子句与 SET_{BC} 子句在求解器预处理器中的应用已比较成熟。下一步，借鉴 RAT 与 SET_{BC} 的子句消除程序为 L-型冗余性质设计子句消去算法，并将该算法嵌入命题逻辑求解器的预处理器中，实现求解器的效率优化。

参 考 文 献

[1] LIU X H. Automatic Reasoning Based on Reduction Method [M]. Beijing：Science Press，1994.

[2] EEN N，BIERE A. Effective preprocessing in SAT through variable and clause elimination［C］// International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing（SAT 2005）. Berlin：Springer-Verlag，2005，3569：61-75.

[3] JARVISALO M，BIERE A. Blocked Clause Elimination［C］// International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems. Berlin：Springer，2010：129-144.

[4] CHEN J C. Fast blocked clause decomposition with high quality ［EB/OL］.［2015-12-09］［2022-05-28］. https://arxiv. org/abs/1507. 00459v2，2015.

[5] HEULE M，JARVISALO M，BIERE A. Clause Elimination Procedures for CNF Formulas［C］// Logic for Programming，Artificial Intelligence，Reasoning International Conference. DBLP，2010：357-371.

[6] HEULE M，JARVISALO M，BIERE A. Covered Clause Elimination［M］// Logic for Programming. Aritficial Intelligence and Reasoning-LPAR17，2010：41-46.

[7] JARVISALO M，HEULE M，BIERE A. Inprocessing Rules ［C］// International Joint Conference on Automated Reasoning. Berlin：Springer，2012：355-370.

[8] KIESL B，SEIDL M，TOMPITS H，et al. Super-Blocked Clauses ［C］// International Joint Conference on Automated Reasoning，IJCAR 2016. Springer International Publishing，2016：45-61.

[9] HEULE M，KIESL B，BIERE A. Short Proofs Without New Variables［C］// International Conference on Automated Deduction. Berlin，Springer-Verlag，2017：130-147.

[10] HEULE M，KIESL B，BIERE A. Encoding Redundancy for Satisfaction-Driven Clause Learning［M］// Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems（ACAS 2019）. 2019：41-58.

[11] NING X R，XU Y，CHEN Z S. Novel preprocessing clause elimination methods for propositional SAT solvers［J］. Computer Integrated Manufacturing Systems，2020，26（8）：131-140.

[12] NING X R，XU Y，CAO F，et al. Clause elimination methods in first-order logic lifted from proposition logic［J］. Computer Engineering and Applications，2019，55（5）：18-25.

[13] NING X R. The study of redundancy property of propositional logic and first-order logic［D］. Chengdu：Southwest Jiaotong University，2019.

[14] LIU L R，CHEN S W，WU G F. A class of extended clause elimination methods in propositional logic［J］. Journal of Sichuan Normal University，2023，46（1）：117-124.

LIU Lingrong，born in 1996，postgraduate. His main research interests include automated reasoning and so on.

CHEN Shuwei，born in 1977，Ph.D，associate professor. His main research interests include logic based automated reasoning and decision analysis.