

概率布尔控制网络的可观性分析

樊卓优

引用本文

樊卓优. [概率布尔控制网络的可观性分析](#)[J]. 计算机科学, 2023, 50(6A): 220200068-6.

FAN Zhuoyou. [Observability of Probabilistic Boolean Control Networks](#)[J]. Computer Science, 2023, 50(6A): 220200068-6.

相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

概率布尔控制网络的可观性分析

樊卓优

河南理工大学电气工程与自动化学院 河南 焦作 454000

摘要 概率布尔控制网络的转移矩阵的不确定性,使得其可观和可控性分析和状态估计更为困难。主要研究了概率布尔控制网络的可观性问题,并在此基础上给出了判断系统可观的条件,以及计算系统初始状态向量的方法。首先,根据系统的可达状态集,定义系统的可区分和不可区分状态,并给出 d 步可区分的概念以及其判断的充要条件。其次,根据概率布尔控制网络的输出和系统模型,得到系统的概率初始状态集合。接着,在此基础上给出概率布尔控制网络的强可观和弱可观的定义。同时,计算系统初始状态向量,并且给出判断系统是否可观的定理;最后,通过一个算例说明了所提方法的有效性。

关键词: 概率布尔控制网络;状态可达集;可观性

中图分类号 TP181

Observability of Probabilistic Boolean Control Networks

FAN Zhuoyou

School of Electrical Engineering and Automation, Henan Polytechnic University, Jiaozuo, Henan 454000, China

Abstract The uncertainty of the transfer matrix brings difficulties to the observability and controllability analysis for probabilistic Boolean control networks(PBCNs). This paper mainly studies the observability of PBCNs, and the conditions of observability are also developed for PBCNs. On this basis, the method for calculating the initial state vector of the system is given. Firstly, according to the reachable state set of PBCNs, the distinguishable and indistinguishable states of the system are defined, and the concept of d -step distinguishability and the necessary and sufficient conditions for its judgment are given. Secondly, based on the output and state model of PBCNs, the probabilistic initial state set of the system is also obtained. Then, the definition of strong observability and weak observability of PBCNs are given. Meanwhile, the methods of calculating the initial state vector and determining whether a given PBCN is observable are obtained. Finally, an example is given to illustrate the effectiveness of the proposed methods.

Keywords Probabilistic Boolean control networks, Reachable state set, Observability

1 引言

1969年, Kauffman首次提出用布尔网络(Boolean Network, BN)描述基因调控网络^[1], 此后BN在系统工程和生物模型中得到了广泛应用,并得到了更多学者的关注。然而由于缺乏有力的数学工具, BN的发展一直受到限制。在21世纪初, Cheng等提出了半张量积理论^[2-4], 这是一种新型的矩阵乘法, 可以逻辑系统转化为离散时间模型。在此基础上, 基于逻辑动态系统, 许多BN的问题得以解决, 例如BN的稳定性和镇定性^[5-7]、能控性和可观性问题^[8-11]、最优控制问题^[12-13]以及干扰解耦问题^[14-15]等, 都得到了广泛关注和讨论, 并取得了一些进展。此外, 在实际生物学系统中, 基因的演化往往不是按照特定规律进行的, 存在多种情况。因此, 在2002年, Shmulevich提出了描述不确定性布尔网络系统的概率布尔网络(Probabilistic Boolean Network, PBN)^[16-17], 它可以看作是由一组具有概率分布的子网络组成的切换布尔网络系统。近年来, 对PBN的可达性^[18-19]、稳定性^[20-22]、状态反馈镇定性^[23]以及最优控制问题^[24-25]的研究也有了一些进展; 同时, PBN的可观性^[19, 26]问题也是学者的主要研究内容。然而, 在实际生物学案例中, 系统往往会施加其他的控制输入

信号, 演化方向因此会发生变化。目前关于PBN的研究主要集中在可控性^[27-29]和稳定性^[30-31]方面, 关于可观性方面的研究还比较欠缺。

在状态空间模型中, 系统的输出可以直接测量, 然而在大多数情况下, 并不是所有的系统状态都可以直接获得。能否根据系统的输入输出序列确定系统的初始状态? 这是控制理论中关于可观性的一个重要问题。目前, 布尔控制网络的可观性有4种不同的定义, 文献[32]对布尔控制网络的各种可观性分析进行了较全面的总结。一种可观性的定义是存在一个输入序列, 初始状态可以由输出序列唯一确定。另一个定义是, 对于任意两种不同的状态, 如果存在能够区分它们的输出序列, 则系统是可观的。另外两个定义把布尔控制网络的可观性问题描述为初始状态是否可以由输出序列唯一确定的问题。对于PBN, 可观性的描述与布尔控制网络相似, 布尔控制网络的可观性分析通常通过使用不同的输出结果来确定不同的初始状态。例如, 在文献[33]中, 如果任意两个不同的初始状态可以由系统输出以概率1可区分, 则PBN是可观的。文献[19]中, 通过并行扩展技术研究了PBN的可观性, 并指出PBN的可观性问题可以重新表述为互连PBN的集可达性问题。在文献[26]中, 研究了有限时间间隔上PBN的

可观性。对于概率逻辑动态系统,现有的论文考虑了PBN的可观性问题。然而,关于PBCN的可观性仍然缺乏相应的成果。此外,与PBN的可观性相比,控制输入会给PBCN的可观性分析带来一定的困难。因此,如何定义PBCN的可观性概念以及如何确定其可观性条件,是本文的关键研究目的。

本文主要对PBCN的可观性问题展开研究,主要贡献总结如下:1)利用状态可达集,根据PBCN的结构性质将系统状态分为可区分状态和不可区分状态,并提出 d 步可区分的概念,通过定理证明和举例验证了其合理性;2)给出了PBCN的强可观和弱可观的定义及其判断依据,并得到系统的可能初始状态向量;3)设计算法判断系统的强弱可观性,计算系统的初始状态向量值。

2 预备知识和问题描述

2.1 预备知识

首先给出一些在下文中需要用到符号。

(1) $Col_i(L)$: 矩阵 L 的第 i 列。

(2) $\Delta_n := \{\delta_n^i \mid i=1, \dots, n\}$, 其中 δ_n^i 是单位矩阵 I_n 的第 i 列。

(3) $\mathcal{D} := \{0, 1\}$, $\mathcal{D}^n = \underbrace{\mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \dots \times \mathcal{D}}_n$ 。

(4) $\mathcal{L}^{m \times n}$: $m \times n$ 维逻辑矩阵的集合, 即若 $A \in \mathcal{L}^{m \times n}$, 那么 $Col_i(A) \in \Delta_m$ 。

(5) L_{ij} : 矩阵 L 第 i 行的第 j 个元素。

(6) $|\chi|$: 集合 χ 的基。

(7) 集合 $\chi = \{\delta_2^1, \delta_2^2, \dots, \delta_2^m\}$, 则集合元素和向量定义为 $x^+ = \delta_2^1 + \delta_2^2 + \dots + \delta_2^m$ 。

(8) 两个列向量 $x \in \mathcal{R}^{2^n}$ 与 $y \in \mathcal{R}^{2^n}$ 的元素乘法表示为: $x \cdot y = [x_1 y_1 \quad x_2 y_2 \quad \dots \quad x_{2^n} y_{2^n}]^T$ 。

(9) $A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$, 其中 $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$, $B \in \mathcal{R}^{p \times q}$, \otimes 表示 Kronecker 运算。

$\mathcal{R}^{p \times q}$, \otimes 表示 Kronecker 运算。

(2) $C \triangle A \odot B$, 其中 $C \in \mathcal{R}^{m \times n}$, $C_{ij} = \bigvee_{k=1}^n A_k B_{kj}$, 且有 $A^{(k)} = \underbrace{A \odot A \odot \dots \odot A}_k, k \geq 1$ 。

(10) 矩阵 A 的符号矩阵为 $A, \triangle \text{sgn}(A)$, 这里 $(A_{ij})_{ij} =$

$$\text{sgn}(A_{ij}) = \begin{cases} 1, & A_{ij} > 0 \\ 0, & A_{ij} = 0. \\ -1, & A_{ij} < 0 \end{cases}$$

定义 1 给定两个矩阵 $A \in \mathcal{L}^{p \times q}$ 和 $B \in \mathcal{L}^{p \times q}$, $l = \text{lcm}(n, p)$ 是 n 和 p 的最小公倍数, 则矩阵的半张量积定义为 $A \ltimes B = (A \otimes I_{l/n}) \cdot (B \otimes I_{l/p})$, 其中符号 \ltimes 表示矩阵的半张量积运算。

下文中,在不混淆的情况下,将省略半张量积符号。

引理 1^[2] 对任意的逻辑函数 $f(A_1, A_2, \dots, A_n): \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$, 当 $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Delta_{2^p}$ 时, 总存在一个 f 的结构矩阵 $M_f \in \mathcal{L}^{2 \times 2^n}$, 使得 $f(A_1, A_2, \dots, A_n) = M_f A_1 A_2 \dots A_n$ 。

定义 2^[18] 给定行向量 $a = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]$ 和 $b = [b_1$

$b_2 \quad \dots \quad b_n]$, 矩阵 $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$ 和 $B \in \mathcal{R}^{m \times n}$, 定义:

(1) $a \vee b = [a_1 \vee b_1 \quad a_2 \vee b_2 \quad \dots \quad a_n \vee b_n]$, 其中, $a_i \vee b_i = \max(a_i, b_i), i=1, 2, \dots, n$ 。

(2) $C \triangle A \odot B$, 其中 $C \in \mathcal{R}^{m \times n}$, $C_{ij} = \bigvee_{k=1}^n A_k B_{kj}$, 且有 $A^{(k)} = \underbrace{A \odot A \odot \dots \odot A}_k, k \geq 1$ 。

(3) $D \triangle A \vee B$, 其中 $D \in \mathcal{R}^{m \times n}$, $D_{ij} = \max(A_{ij}, B_{ij})$ 。

2.2 问题描述

考虑如下有 n 个状态节点和 p 个输出节点的 PBCN:

$$\begin{cases} X(t+1) = f^{(s(t))}(X(t), U(t)) \\ Y(t) = h(X(t)) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $X(t) = [X_1(t) \quad X_2(t) \quad \dots \quad X_n(t)]^T, U(t) = [U_1(t) \quad U_2(t) \quad \dots \quad U_m(t)]^T, Y(t) = [Y_1(t) \quad Y_2(t) \quad \dots \quad Y_p(t)]^T$ 都是逻辑向量, 并且 $X_i \in \mathcal{D}$ 表示系统的第 i 状态节点, $Y_j \in \mathcal{D}$ 表示系统的第 j 个状态输出节点, $U_k \in \mathcal{D}$ 表示系统的控制输入, 且有 $i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, p$ 和 $k=1, 2, \dots, m$ 。另外, $s(t)$ 是一个取值为 $[1, N]$ 的随机切换信号, 其中 N 表示 BCNs 的数量。对于任意的 $\sigma \in [1, N]$, $f^\sigma: \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}^n$ 是一个表示 PBCN 的第 σ 个子网络的 n 维逻辑函数。

令 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的向量形式, 根据定义 1 和引理 1, PBCN 可以转化为如下代数形式:

$$\begin{cases} x(t+1) = L_{s(t)} u(t) x(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中, $x(t) \in \Delta_{2^n}, y(t) \in \Delta_{2^p}, L_\sigma \in \mathcal{L}^{2^n \times 2^n}$ 是第 σ 个子网络的结构矩阵。

假设随机切换信号 $s(t)$ 是独立同分布信号且满足概率分布 $\Pr\{s(t) = \sigma\} = p_\sigma, \sigma \in [1, N]$, 并有 $p_\sigma \leq 1, \sum_{\sigma=1}^N p_\sigma = 1$, 则可得系统(2)的状态期望是:

$$E x(t+1) = L u(t) E x(t) \quad (3)$$

其中, $L = \sum_{\sigma=1}^N p_\sigma L_\sigma$ 是系统的一步状态转移矩阵。

从上述 PBCN 的一般形式和数学期望可以看出, 由于系统模型的不确定性, 任何初始状态都可能到达不同的目的状态, 因此根据输出序列不能得到唯一的输入状态, 这也是研究 PBCN 可观性的难点之一。然而, 对于 PBCN 的可观性问题, 现在还缺乏一定的讨论。因此, 本文将进一步讨论 PBCN 的可观性问题。

3 主要内容

在分析 PBCN 的可观性问题时, 首先对系统的状态进行分析, 提出可达状态集的概念, 并在此基础上定义区分和不可区分状态, 接下来给出有限时间内的强可观和弱可观的定义和判别方法。

3.1 状态分析

首先, 分块矩阵 L 为 $L = [A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_{2^m}], L_k \in \mathcal{L}^{2^n \times 2^n}, k=1, 2, \dots, 2^m$, 则根据定义 2, 定义如下矩阵:

$$\Lambda = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_{2^m} \quad (4)$$

其中, $\Lambda_{ij} = \max_{k=1, 2, \dots, 2^m} \{\Lambda_k^j\}$ 且 Λ_{ij} 和 Λ_k^j 分别代表了矩阵 Λ 和 A_k 的第 i 行第 j 列的元素。从式(3)和式(4)可以看出, 对

任意的 $\Delta_{ij} = (Blk_k(L))_{ij} \neq 0$, 都存在一个控制序列 $u = \delta_{2^n}^m$ 使得状态 $x(t) = \delta_{2^n}^i$ 经过一步可以到达状态 $x(t+1) = \delta_{2^n}^j$, 且最大转移概率为 $(Blk_k(L))_{ij}$, 即满足 $Ex(t+1) = \Delta Ex(t)$ 。

当两个状态之间的转移概率不为 0 时, 则这两个状态之间一定是以某种概率可达的。因此, 为了计算方便, 在考虑状态可达时, 下文中令 $\gamma = \Delta$, 即两个状态之间的概率以 1 来计算。

接下来, 考虑从状态 x_i 到状态 x_j 经过两步状态转移的情况:

$$\bigvee_{k=1}^{2^n} \gamma_{ik} \gamma_{kj} = \gamma \odot \gamma = (2) \quad (5)$$

其中, $\gamma_{ij}^{(2)}$ 表示了从状态 x_i 到状态 x_j 经过两步转移的最大概率。

同样地, 容易得到从状态 x_i 到状态 x_j 经过 d 步转移的情况:

$$\bigvee_{k=1}^{2^n} \left[\bigvee_{k=1}^{2^n} \left[\bigvee_{k=1}^{2^n} \gamma_{ik} \gamma_{kj} \right] \gamma_{kj} \right] \cdots \gamma_{kj} = \underbrace{\gamma \odot \gamma \odot \cdots \odot \gamma}_d = \gamma^{(d)} \quad (6)$$

根据式(3)和(4)可得:

$$Ex(t) = \gamma Ex(t-1) \quad (7)$$

定义 3 给定一个状态 x_j 是从初始状态 x_i 可达的, 当且仅当存在一个正整数 d 和一个控制序列 $\{u(t) \in \Delta_{2^n} \mid t=0, 1, 2, \dots, d-1\}$ 使得系统可以在时间 d 时依概率 1 从状态 x_i 到达状态 x_j ; 状态 $x_j \in \Delta_{2^n}$ 是可达的, 若对任意的初始状态 $x_i \in \Delta_{2^n}$ 是可达的; PBCN 是可达的, 若任意的目的状态 $x_j \in \Delta_{2^n}$ 是可达的。

引理 2^[29-30] 给定一个状态 x_j 从初始状态 x_i 可达, 则经过 d 步初始状态 $x_i = \delta_{2^n}^i$ 的状态可达集为:

$$(d; i, j) = \{\delta_{2^n}^j \mid \gamma_{ij}^{(d)} = \theta, \theta \neq 0, i, j = 1, 2, \dots, 2^n\} \quad (8)$$

定义 4 对任意两个初始状态 $x_0 = \delta_{2^n}^i$ 和 $\bar{x}_0 = \delta_{2^n}^{\bar{i}}$, 若有 $H\delta_{2^n}^i = H\delta_{2^n}^{\bar{i}}$, 则称这两个初始状态为不可区分状态; 若有 $H\delta_{2^n}^i \neq H\delta_{2^n}^{\bar{i}}$, 则称这两个初始状态为可区分状态。

根据式(2)和式(8), 系统的状态集可以分为以下集合:

$$\chi_0 = \{\delta_{2^n}^i \mid L_\sigma u \delta_{2^n}^i = \delta_{2^n}^i, i, j \in [1, 2^n], \delta_{2^n}^i \in \chi(d; i, j)\}$$

$$\chi_1 = \{\delta_{2^n}^i, \delta_{2^n}^{\bar{i}} \mid H\delta_{2^n}^i = H\delta_{2^n}^{\bar{i}}; i_0, \bar{i}_0 \in [1, 2^n], i_0 \neq \bar{i}_0\}$$

$$\chi_2 = \{\delta_{2^n}^i, \delta_{2^n}^{\bar{i}} \mid H\delta_{2^n}^i \neq H\delta_{2^n}^{\bar{i}}; i_0, \bar{i}_0 \in [1, 2^n], i_0 \neq \bar{i}_0\}$$

令 $C_t(\chi_k)$, $t=1, 2$ 表示所有属于 χ_1 并且 d 步属于 χ_k 的状态集:

$$C_1(\chi_k) = \{\delta_{2^n}^i, \delta_{2^n}^{\bar{i}} \in \chi_1 \mid \delta_{2^n}^i, \delta_{2^n}^{\bar{i}} \in \chi_k\}$$

$$C_d(\chi_k) = \{\delta_{2^n}^i, \delta_{2^n}^{\bar{i}} \in \chi_1 \mid \delta_{2^n}^i, \delta_{2^n}^{\bar{i}} \in \chi_k\}$$

其中, $\delta_{2^n}^j = L_\sigma u \delta_{2^n}^i, \delta_{2^n}^j \in \chi(d; i, j), \delta_{2^n}^{\bar{j}} \in \chi(d; \bar{i}, \bar{j})$ 。

定理 1 对任意的初始状态, 若有 $x_0, \bar{x}_0 \in C_d(\chi_1)$, 则此初始状态为 d 步不可区分状态; 若有 $x_0, \bar{x}_0 \in C_d(\chi_2)$, 则此初始状态为 d 步可区分状态。

证明: (充分性) 对任意的初始状态有 $x_0, \bar{x}_0 \in \chi_0$, 当 $x_0, \bar{x}_0 \in C_d(\chi_2)$ 时, 可以得到:

对任意两个不同的初始状态 $x(0)$ 和 $\bar{x}(0)$:

$$y(0) = Hx(0) = H\delta_{2^n}^i, \bar{y}(0) = H\bar{x}(0) = H\delta_{2^n}^{\bar{i}}$$

$$y(1) = Hx(1) = HL_\sigma u \bar{x}(0) = H\delta_{2^n}^{\bar{j}_0}$$

$$\bar{y}(1) = H\bar{x}(1) = HL_\sigma u \bar{x}(0) = H\delta_{2^n}^{\bar{j}_0}$$

由集合 $C_d(\chi_k)$ 和 χ_1 的定义可知:

$$y(0) = \bar{y}(0); y(1) \neq \bar{y}(1)$$

以此类推:

$$y(t) = Hx(t) = H\delta_{2^n}^i, \delta_{2^n}^i \in \chi(d; i, j)$$

$$\bar{y}(t) = H\bar{x}(t) = H\delta_{2^n}^{\bar{i}}, \delta_{2^n}^{\bar{i}} \in \chi(d; \bar{i}_0, \bar{j}_0)$$

又因为:

$$\chi(d; i, j) \subset \chi_2, \chi(d; \bar{i}_0, \bar{j}_0) \subset \chi_2$$

即可以得到:

$$y(t) \neq \bar{y}(t)$$

则根据定义 4 可以知道这两个状态在 d 步为可区分状态。

(必要性) 使用反证法来证明。假设, 任意给定这两个初始状态 $x_0, \bar{x}_0 \in \chi_0$ 为不可区分状态, 且满足 $x_0, \bar{x}_0 \in C_d(\chi_1)$ 。则对这任意两个不同的初始状态 $x(0)$ 和 $\bar{x}(0)$ 有:

$$(y(0), y(1), \dots, y(t)) = (\bar{y}(0), \bar{y}(1), \dots, \bar{y}(t))$$

由上述充分性的证明可以类推得到, 此时 $y(t) = \bar{y}(t) \Rightarrow \delta_{2^n}^i \in \chi_1, \delta_{2^n}^{\bar{i}} \in \chi_1$;

即 $x_0, \bar{x}_0 \in C_d(\chi_1)$ 。与假设相悖, 证毕。

下面给出一个简单的例子来说明。

例 1 对一个概率布尔控制网络系统(2), 若有 $n=4$, $N=4, p=2^2$, 且有 $L_1 = \delta_4 [3 \ 2 \ 4 \ 1]$, $L_2 = \delta_4 [3 \ 2 \ 4 \ 3]$, $L_3 = \delta_4 [2 \ 4 \ 1 \ 1]$, $L_4 = \delta_4 [2 \ 4 \ 1 \ 3]$, $H = \delta_2 [1 \ 1 \ 2 \ 1]$; 给定控制序列 $u(t) = \delta_4 [1 \ 2 \ 3 \ 4]$ 和概率分布 $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0.25$ 。则此系统的状态转移图如图 1 所示, 其中圆圈里的数字“ i ”表示状态向量 δ_4^i , 连接每个圆圈的边表示可能的状态转移, 白色圆圈中的数字表示此状态下输出为 $y = \delta_2^1$, 灰色圆圈中的数字表示此状态下输出为 $y = \delta_2^2$ 。

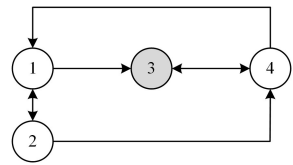


图 1 例 1 中的状态转移图

Fig. 1 State transition diagram in example 1

从图 1 中可以得到: $\chi_0 = \{\delta_4^1, \delta_4^2, \delta_4^3, \delta_4^4\}$, $\chi_1 = \{\delta_4^1, \delta_4^2, \delta_4^3\}$, $H\delta_4^1 = H\delta_4^2 = H\delta_4^3 \neq H\delta_4^4$ 。

显然, 状态 δ_4^1 和状态 $\delta_4^2, \delta_4^3, \delta_4^4$ 分别都是可区分的。

接下来判断状态 $\delta_4^1, \delta_4^2, \delta_4^3$ 之间的可区分性。从图 1 中可以看出:

$$\chi(1; 1, j) = \{\delta_4^1, \delta_4^3\}, H\delta_4^1 = \delta_2^1, H\delta_4^3 = \delta_2^2$$

$$\chi(1; 2, j) = \{\delta_4^1, \delta_4^4\}, H\delta_4^1 = H\delta_4^4 = \delta_2^1$$

$$\chi(1; 4, j) = \{\delta_4^1, \delta_4^3\}, H\delta_4^1 = \delta_2^1, H\delta_4^3 = \delta_2^2$$

因此根据定理 1 中 $C_d(\chi_1)$ 和 $C_d(\chi_2)$ 的定义可得, 状态 δ_4^1 分别和状态 δ_4^2, δ_4^4 是一步可区分的。

$\chi(2; 1, j) = \{\delta_4^1, \delta_4^3\}, \chi(2; 4, j) = \{\delta_4^2, \delta_4^3, \delta_4^4\}; \chi(2; 1, j) \neq \chi(2; 4, j)$

因此, 由定理 1 可知, 状态 δ_4^1 和 δ_4^3 是两步可区分状态。

3.2 系统可观性分析

定义 5 对任意 $t \in \mathbb{Z}_+$ 和 $\hat{x}_o(t) = \delta_{2^n}^i \in \Delta_{2^n}$, 若系统输出满足 $y(t) = H\hat{x}_o(t)$, 那么向量 $\hat{x}_o(t) = \delta_{2^n}^i$ 称为 PBCN 在 t 时刻的输出依赖状态向量(ODS)。系统在 t 时刻的输出依赖

估计集描述如下:

$$\chi_o(t) = \{\delta_{2^n}^i \mid y(t) = H\delta_{2^n}^i, i \in [1, 2^n]\}$$

则定义 t 时刻输出依赖估计集的和向量(SODS)为:

$$x_o^+(t) = H^T y(t) \quad (9)$$

特别地,称初始状态的和向量 $x^+(0)$ 为概率初始状态向量(PISV)。

定义 6 在任意时间 $t \in \mathbb{Z}_+$ 时,用 $x_o^+(t)$ 表示系统在 t 时刻的状态和向量 $x^+(t)$,其中若有 $x_o^+(t) = \gamma x_m^+(t-1)$,则定义 $x_m^+(t-1)$ 为 $t-1$ 时刻 PBCN 的模型依赖状态和向量(SMDS),且 $\chi_m(t-1)$ 定义为模型依赖状态(MDS)集。

推论 1 在任意 $t \in \mathbb{Z}_+$ 时刻,可以由下一时刻的 SMDS 推得上一时刻的 SODS,即

$$x_m^+(t-1) = \gamma^T x_o^+(t) \quad (10)$$

证明: $t=0$ 时, $x_o^+(0) = H^T y(0)$,假定此时的 PISV 为 $x^+(0) = x_o^+(0)$ 。

在 $t=1$ 时,首先, $x_o^+(1) = H^T y(1)$;其次,由定义 6 反推在 $t=0$ 时刻, $x_m^+(0) = \gamma^T x^+(1) = \gamma^T x_o^+(1)$ 。即 $x_m^+(0) = \gamma^T T \gamma x_o^+(1) = \gamma^T T \gamma H^T T \gamma y(1)$ 。

当 $t=2$ 时, $x_o^+(2) = H^T y(2)$,由定义 6 得系统在 $t=1$ 时的 MDS 和向量为 $x_m^+(1) = \gamma^T x_o^+(2)$ 。即 $x_m^+(1) = \gamma^T x_o^+(2) = \gamma^T H^T y(2)$ 。

以此类推得到: t 时刻, $x_o^+(t) = H^T y(t)$, $x_m^+(t-1) = \gamma^T x_o^+(t) = \gamma^T H^T y(t)$ 。

证毕。

定义 7 在 $t=0$ 时,假设系统的概率初始状态集等于输出依赖状态集,那么在 $t>0$ 的任意时刻,由 $t-1$ 时刻的模型依赖状态集与 $t-1$ 时刻的初始状态集相交可以得到 t 时刻的初始状态集。即:

$$\chi(t) = \{\delta_{2^n}^i \mid \delta_{2^n}^i \in \chi(t-1) \cap \chi_m(t-1)\} \quad (11)$$

则 t 时刻的 PISV 为:

$$x^+(t) = x^+(t-1) \cdot x_m^+(t-1) \quad (12)$$

定义 8 给定一个时间常数 t ,则 PBCN(2) 是强可观的,当且仅当对每一个输出序列 $y(0), y(1), \dots, y(t)$ 都可以唯一确定初始状态 $x(0) = \delta_{2^n}^i$ 。

定义 9 给定一个时间常数 t ,则 PBCN(2) 是弱可观的,当且仅当对每一个输出序列 $y(0), y(1), \dots, y(t)$ 都可以得到一个稳定的初始状态集合 $\chi(0) = \{\delta_{2^n}^i \mid i=1, 2, \dots, 2^n\}$ 。

定理 2 给定一个任意的 PBCN,已知输出序列 $\{y(0), y(1), \dots, y(t)\}$,则可以由以下公式得到 t 时刻的概率初始状态向量(PISV):

$$x^+(t) = \begin{cases} H^T Y(t), & t=0 \\ [(\Phi_n^T)' H^T \prod_{i=0}^t (I_{2^{ip}} \otimes \gamma^T H^T)]_s Y(t), & t>0 \end{cases} \quad (13)$$

其中, $t>0$ 时, $Y(t) = y(0)y(1)\dots y(t) = \delta_{2^{(t+1)p}}$ 。

证明:设初始时间为 0 时,PISV 为 $x^+(0) = H^T y(0)$ 。

当 $t=1$ 时,由式(9)、式(10)、式(12)可得 $x_o^+(1) = H^T y(1)$, $x_m^+(0) = \gamma^T x_o^+(1) = \gamma^T H^T y(1)$,则有:

$$x^+(1) = x^+(0) \cdot x_m^+(0) = H^T y(0) \cdot \gamma^T H^T y(1) \\ = \Phi_n^T H^T y(0) (\gamma^T H^T y(1))_s$$

利用半张量积的性质可得:

$$\Phi_n^T H^T y(0) (\gamma^T H^T y(1))_s \\ = [\Phi_n^T H^T y(0) \gamma^T H^T y(1)]_s \\ = [\Phi_n^T H^T (I_{2^p} \otimes \gamma^T H^T)]_s y(0) y(1)$$

所以,整理可得:

$$x^+(1) = [\Phi_n^T H^T (I_{2^p} \otimes \gamma^T H^T)]_s y(0) y(1)$$

当 $t=2$ 时,由式(9)、式(10)、式(12)可得 $x_o^+(2) = H^T y(2)$, $x_m^+(1) = \gamma^T x_o^+(2) = \gamma^T H^T y(2)$,则有:

$$x^+(2) = x^+(1) \cdot x_m^+(1) \\ = (\Phi_n^T H^T y(0) \gamma^T H^T y(1))_s \cdot \gamma^T H^T y(2) \\ = \Phi_n^T (\Phi_n^T H^T y(0) \gamma^T H^T y(1))_s (\gamma^T H^T y(2))_s \quad (14)$$

同样地,可得:

$$(\Phi_n^T H^T y(0) \gamma^T H^T y(1))_s (\gamma^T H^T y(2))_s \\ = \Phi_n^T [\Phi_n^T H^T y(0) \gamma^T H^T y(1) \gamma^T H^T y(2)]_s \\ = \Phi_n^T \{[\Phi_n^T H^T (I_{2^p} \otimes \gamma^T H^T)]_s y(0) y(1)\} \gamma^T H^T y(2)_s \\ = \Phi_n^T [\Phi_n^T H^T (I_{2^{2p}} \otimes \gamma^T H^T)]_s y(0) y(1) y(2)$$

则式(14)式等价于:

$$x^+(2) = \Phi_n^T [\Phi_n^T H^T (I_{2^p} \otimes \gamma^T H^T) (I_{2^{2p}} \otimes \gamma^T H^T)]_s y(0) y(1) y(2)$$

通过上述迭代过程可得,对于任意 $t \in \mathbb{Z}_+$ 有:

$$x^+(t) = x^+(t-1) \cdot x_m^+(t-1) \\ = [(\Phi_n^T)' H^T \prod_{i=0}^t (I_{2^{ip}} \otimes \gamma^T H^T)]_s Y(t)$$

结论得证。

结合定义 8 和定义 9 概率布尔控制网络可观性的定义及式(13)可以设计以下算法来判断系统的可观性。

算法 1 概率布尔控制网络可观性判断

Input: PBCN 的转移矩阵 L_o , 每个子网络的概率 p_o 和输出逻辑矩阵 H 以及控制量个数 m

Output: PBCN 的可观性判断,最大概率转移矩阵和概率初始状态向量集

1. 记转移矩阵、每个子网络的概率和最大概率状态转移矩阵分别为 L_o, p_o, γ 。
2. $t=0, x^+(0) = H^T y(0)$ 。
3. for $t=1, t++$, do
4. $x_o^+(t) = H^T y(t)$;
5. $x_m^+(t) = \gamma^T x_o^+(t) = \gamma^T H^T y(t)$;
6. $x^+(t) = x^+(t-1) \cdot x_m^+(t-1)$;
7. $\chi^+(t) = \{i \mid \text{Row}_i(x^+(t)) \neq 0\}$;
8. if
9. $|\chi^+(t)| = 1$
10. return “此系统为强可观系统”, stop;
11. else if
12. $1 < |\chi^+(t)| < 2^n$
13. return “此系统为弱可观系统”, stop;
14. else
15. return “此系统为不可观系统”。
16. end if
17. end for

4 实例仿真

例 1 考虑如下的 PBCN:

$$\begin{cases} x(t+1) = L_{s(t)} u(t) x(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

其中, $n=3, p=2, m=1$, 切换信号 $s(t) \in [1, 2]$, 输出结构矩阵 $H = \delta_1[1, 2, 3, 3, 1, 1, 2, 2]$, 输入结构矩阵分别是: $L_1 = \delta_8[2, 4, 2, 3, 8, 3, 4, 1, 7, 1, 6, 5, 6, 7, 8, 7]$, $L_2 = \delta_8[1, 3, 4, 3, 8, 3, 1, 1, 1, 1, 5, 6, 7, 8, 6, 7]$, 这里 $p_1 = 0.2, p_2 = 0.8$ 。

根据上述算法中的步骤 1, 由系统的结构矩阵和每个子网络的概率得到 L 。

将 L 分为两个相等的块 $L = [\Lambda_1 \quad \Lambda_2]$, 得:

$$\Lambda = \Lambda_1 \vee \Lambda_2$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = p_1 L_1 + p_2 L_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1 & 0.8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \delta_8[1+2+7, 1+3+4, 2+4+5+6, 3+5+6, 6+7+8, 3+7+8, 1+4+6+8, 1+7]$$

则概率初始状态向量估计值如图 2 所示。其中, 红色圆圈代表了上一时刻得到的 PISV, 绿色圆圈代表了上一时刻得到的 MDS 和向量值, 蓝色的叉号代表了两者的交集 $x^+(t) = x^+(t-1) \cdot x_m^+(t-1)$, 即所求的当前时刻的 PISV 值。

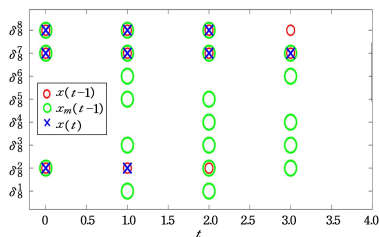


图 2 例 2 初始状态估计图

Fig. 2 Example 2 initial state estimation diagram

从图 2 中可知:

$$\text{当 } t=0 \text{ 时, } \chi^+(0) = \chi_o^+(0) = \{\delta_8^2, \delta_8^7, \delta_8^8\};$$

$$t=1 \text{ 时, } \chi^+(0) = \{\delta_8^2, \delta_8^7, \delta_8^8\}, \chi_m^+(0) = \{\delta_8^1, \delta_8^3, \delta_8^5, \delta_8^6, \delta_8^7, \delta_8^8\},$$

$$\chi^+(1) = \chi^+(0) \cap \chi_m^+(0) = \{\delta_8^7, \delta_8^8\}; t=2, \chi^+(1) = \{\delta_8^7, \delta_8^8\},$$

$$\chi_m^+(1) = \{\delta_8^1, \delta_8^3, \delta_8^4, \delta_8^5, \delta_8^6, \delta_8^7, \delta_8^8\}, \chi^+(2) = \chi^+(1) \cap \chi_m^+(1) = \{\delta_8^7, \delta_8^8\};$$

$$t=3 \text{ 时, } \chi^+(2) = \{\delta_8^7, \delta_8^8\}, \chi_m^+(2) = \{\delta_8^2, \delta_8^3, \delta_8^4, \delta_8^6, \delta_8^7\},$$

其中:

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

根据算法中的步骤 1 可得系统最大概率状态转移矩阵为

γ 。

$$\chi^+(3) = \chi^+(2) \cap \chi_m^+(2) = \{\delta_8^7\}。$$

即 $t=3$ 时, 可得概率初始状态集 $\chi^+(3)$ 等于 1, 则根据算法中的步骤 2, 此时 PBCN 为强可观系统, 且可得 PISV 为 $\Delta x(0) = \delta_8^7$ 。

结束语 本文针对概率布尔控制网络系统进行了状态分析, 在状态可达集的概念基础上, 把系统中两两不同的状态分为可区分状态和不可区分状态, 给出了判断依据并举例验证; 此外, 提出了一种判断概率布尔控制网络系统是否可观的方法, 利用输出序列和控制序列, 判断系统的强弱可观性并得到可能的初始状态向量集; 在此基础上设计了一套算法, 通过实例进行验证, 仿真结果证明了上述算法的有效性。但是对于概率布尔控制网络依概率分布的强弱可观性以及状态估计问题仍有待解决, 这是下一步研究的重点。

参考文献

- [1] KAUFFMAN S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets[J]. Journal of Theoretical Biology, 1969, 22(3): 437-467.
- [2] CHENG D, QI H, ZHAO Y. An Introduction to Semi-Tensor Product of Matrices and Its Applications[M]. World Scientific, 2012.
- [3] CHENG D, QI H, LI Z. Analysis and Control of Boolean Networks[M]. London: Springer London, 2011.

- [4] CHENG D, QI H. A Linear Representation of Dynamics of Boolean Networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(10): 2251-2258.
- [5] GUO Y, WANG P, GUI W, et al. Set stability and set stabilization of Boolean control networks based on invariant subsets[J]. *Automatica*, 2015, 61: 106-112.
- [6] LI R, YANG M, CHU T. State Feedback Stabilization for Boolean Control Networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(7): 1853-1857.
- [7] LI H, WANG Y. Output feedback stabilization control design for Boolean control networks[J]. *Automatica*, 2013, 49(12): 3641-3645.
- [8] ZHANG K, ZHANG L. Observability of Boolean control networks: A unified approach based on the theories of finite automata[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(9): 2733-2738.
- [9] LASCHOV D, MARGALIOT M, EVEN G. Observability of Boolean networks: A graph-theoretic approach[J]. *Automatica*, 2013, 49(8): 2351-2362.
- [10] LASCHOV D, MARGALIOT M. Controllability of Boolean control networks via the Perron-Frobenius theory[J]. *Automatica*, 2012, 48(6): 1218-1223.
- [11] CHENG D, ZHAO Y. Identification of Boolean control networks[J]. *Automatica*, 2011, 47(4): 702-710.
- [12] LI F, LU X, YU Z. Optimal control algorithms for switched Boolean network[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2014, 351(6): 3490-3501.
- [13] FORNASINI E, VALCHER M E. Optimal control of Boolean control networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59: 1258-1270.
- [14] LIU Y, LI B, LOU J. Disturbance Decoupling of Singular Boolean Control Networks[J]. *IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics*, 2016, 13(6): 1194-1200.
- [15] CHENG D. Disturbance Decoupling of Boolean Control Networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(1): 2-10.
- [16] SHMULEVICH I, DOUGHERTY E R, ZHANG W. From Boolean to probabilistic Boolean networks as models of genetic regulatory networks[C]//*Proceedings of the IEEE*. 2002.
- [17] SHMULEVICH I, DOUGHERTY E R, KIM S, et al. Probabilistic Boolean networks: a rule-based uncertainty model for gene regulatory networks[J]. *Bioinformatics*, 2002, 18(2): 261-274.
- [18] LI Z, XIAO H. Weak reachability of probabilistic boolean control networks[C]//*2015 International Conference on Advanced Mechatronics Systems(ICAMechS)*. 2015: 56-60.
- [19] ZHOU R, GUO Y, GUI W. Set reachability and observability of probabilistic Boolean networks[J]. *Automatica*, 2019, 106: 230-241.
- [20] ZHANG Q, FENG J, WANG B. Stability analysis of probabilistic Boolean networks with switching topology[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2021, 42: 101076.
- [21] GUO Y, ZHOU R, WU Y, et al. Stability and Set Stability in Distribution of Probabilistic Boolean Networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018: 1-1.
- [22] ZHAO Y, CHENG D. On controllability and stabilizability of probabilistic Boolean control networks[J]. *Science China Information Sciences*, 2014, 57(1): 1-14.
- [23] LI R, YANG M, CHU T. State feedback stabilization for probabilistic Boolean networks[J]. *Automatica*, 2014, 50(4): 1272-1278.
- [24] LIU Q. Optimal finite horizon control in gene regulatory networks[J]. *The European Physical Journal B*, 2013, 86(6): 245.
- [25] PAL R, DATTA A, DOUGHERTY E R. Optimal infinite-horizon control for probabilistic Boolean networks[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(6): 2375-23870.
- [26] FORNASINI E, VALCHER M E. Observability and Reconstructibility of Probabilistic Boolean Networks[J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2020, 4(2): 319-324.
- [27] LI F, SUN J. Controllability of probabilistic Boolean control networks[J]. *Automatica*, 2011, 47(12): 2765-2771.
- [28] LIU Y, CHEN H, LU J, et al. Controllability of probabilistic Boolean control networks based on transition probability matrices[J]. *Automatica*, 2015, 52: 340-345.
- [29] GOU Z L, XU Y, WANG J H. Set Controllability of Probabilistic Boolean Control Networks[J]. *Control Theory and Applications*, 2021(5): 689-696.
- [30] ZHAO Y, CHENG D. On controllability and stabilizability of probabilistic Boolean control networks[J]. *Science China Information Sciences*, 2014, 57(1): 1-14.
- [31] WANG L, LIU Y, WU Z G, et al. Stabilization and Finite-Time Stabilization of Probabilistic Boolean Control Networks[J/OL]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019: 1-8. DOI: 10.1109/TSMC. 2019. 2898880.
- [32] WANG B, FENG J E. Recent Development on Observability and Detectability of Boolean Control Networks[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(9): 2049-2058.
- [33] JING Z, ZHENBIN L. Observability of probabilistic Boolean networks[C]//*2015 34th Chinese Control Conference(CCC)*. Hangzhou, China; IEEE, 2015: 183-186.



FAN Zhuoyou, born in 1997, postgraduate. Her main research interests include Boolean control networks and information processing.