



计算机科学

COMPUTER SCIENCE

有界偏序自动机的同步算法

王志喜, 蒋贵德

引用本文

王志喜, 蒋贵德. [有界偏序自动机的同步算法](#)[J]. 计算机科学, 2023, 50(6A): 220500099-5.

WANG Zhixi, JIANG Guide. [Synchronizing Algorithms for Bounded Partially Ordered Automata](#)[J].

Computer Science, 2023, 50(6A): 220500099-5.

相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

[一类同步自动机及损耗函数分析](#)

Synchronization of a Certain Family of Automata and Consumption Function Analysis

计算机科学, 2019, 46(11A): 535-538.

[拟陷阱同步自动机的最短同步字的长度](#)

Length of the Shortest Synchronizing Words for Quasi-trapped Synchronizing Automata

计算机科学, 2012, 39(11): 191-193.

有界偏序自动机的同步算法

王志喜 蒋贵德

湖南科技大学计算机科学与工程学院 湖南湘潭 411201

摘要 同步自动机是有同步字的自动机,它们在系统测试、编码、工业自动化、机器人技术及生物计算等领域有着广泛应用。有界偏序自动机是状态集具有与所有输入字母都相容的有界偏序的自动机。文中给出了同步有界偏序自动机的一些重要特征,并据此设计了有界偏序自动机的同步性检测算法、同步字查找算法和最短同步字查找算法,确定了全体 n -状态同步自动机的最短同步字长度的上确界。这些工作在有界偏序自动机的范围内解决了同步自动机研究的主要问题。

关键词: 同步自动机;有界偏序自动机;同步性检测算法;同步字查找算法;最短同步字查找算法

中图分类号 TP301

Synchronizing Algorithms for Bounded Partially Ordered Automata

WANG Zhixi and JIANG Guide

School of Computer Science and Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan, Hunan 411201, China

Abstract Synchronizing automata are the automata having a synchronizing word. They have been applied in many fields such as system testing, encoding, industrial automation, robotics and biological computation. Bounded partially ordered automata are the automata whose state set is equipped with a partial order that is compatible to the input letters. This paper reveals some important characterizations of synchronizing bounded partially ordered automata, proposes the algorithms for testing the synchronization, finding a synchronizing word and finding a shortest synchronizing word of an arbitrary bounded partially ordered automaton, and then determines the least upper bound of all n -state synchronizing bounded partially ordered automata. In the field of bounded partially ordered automata, these works solve the main problems on synchronizing automata.

Keywords Synchronizing automaton, Bounded partially ordered automata, Algorithm for testing synchronization, Algorithm for finding a synchronizing word, Algorithm for finding a shortest synchronizing word

1 引言

完全确定有限自动机简称自动机,是最基本的计算模型,通常被用来描述离散控制系统。在上世纪五十年代至八十年代间,计算机科学、控制理论、电子学、工业自动化等领域的研究人员先后独立地发现了某些自动机能够将所有状态都转换到同一状态的输入字,并各自命名了这类自动机^[1-5]。下文采用目前最常用的术语,称自动机能够将所有状态都转换为同一状态的输入字称为同步字,并将有同步字的自动机称为同步自动机。同步自动机已被广泛应用于重启装置的设计、系统测试、通信、工业自动化、机器人学以及生物计算等领域^[6-10]。

同步自动机研究的主要问题是同步性检测问题、同步字查找问题和最短同步字问题。这些问题被统称为自动机的同步问题,相关算法被统称为自动机的同步算法。针对前两个问题,Eppstein对自动机设计了一个时间复杂度和空间复杂度分别为 $O(mn^2)$ 和 $O(n^2)$ 的自动机同步性检测算法,并将该算法扩展为一个时间复杂度和空间复杂度分别为 $O(mn^2 + n^3)$ 和 $O(n^2)$ 的同步字查找算法,其中 m 和 n 分别为自动机的输入字母数和状态数^[11]。这两个算法是目前最常用

的自动机同步性检测和同步字查找算法。采用 Eppstein 的同步字查找算法找到的同步字一般较长,这对同步自动机的应用来说往往意味着较大的损耗。为查找同步字自动机的较短同步字,Roman 等设计了多种同步字查找算法^[12-14]。这些算法的复杂度随找到的同步字的平均长度的增加而增大。Chen 等提出了一个描述同步字的损耗的数学模型^[15]。

同步自动机的最短同步字问题主要考虑最短同步字的查找问题和全体 n -状态同步自动机最短同步字长度的上确界 D_n 。Eppstein 证明了最短同步字的查找问题是 NP-完全的^[11]。针对 D_n 的值,Černý 于 1964 年提出了如下猜想:

$$D_n = (n-1)^2$$

Szykuła 证明了 $D_n \leq (85\,059n^3 + 90\,024n^2 + 196\,504n - 10\,648)/511\,104$ ^[16]。

大量实验表明 Černý 猜想很可能是成立的^[17-18]。Trahtman 还根据实验结果猜想最短同步字长度恰好是 $(n-1)^2$ 的 n -状态同步自动机只有全体 Černý 自动机和另外 8 个孤立的例子^[17]。Trahtman 猜想对规模较小的自动机已经得到了证实^[19-24]。

对于各类特殊自动机,现已证实可解自动机、循环自动

基金项目:国家自然科学基金(61572013)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61572013).

通信作者:王志喜(zhixiwang@163.com)

机、欧拉自动机等 10 余类自动机满足 Černý 猜想^[29-35]; Martuyugin 和 Volko 分别证明了循环自动机和欧拉自动机的最短同步字查找问题是 NP-完全的^[36-37]; He 等证明了 Trahtman 猜想对循环自动机成立^[38], 从而将对 Trahtman 猜想的研究限制到 7 个孤立的例子。Černý 猜想和 Trahtman 猜想目前仍是有待解决的问题。

偏序自动机是状态集有一个相容于所有输入字母的偏序的自动机^[32]。每个自动机都可以看作一个偏序自动机, 因而同步自动机的研究可以归结到对同步偏序自动机的研究。Ananichev 等将状态集偏序集为链的偏序自动称为单演自动机, 并证明了 n -状态同步单演自动机的最短同步字长度不超过 $(n-1)$ ^[33]。此后, 他们还进一步证明了 n -状态同步广义单演自动机的最短同步字长度也不超过 $(n-1)$, 这里的广义单演自动机是一类包含所有单演自动机的偏序自动机^[34]。Cui 等将状态偏序集为有界偏序集的偏序自动称为有界偏序自动机, 并证明了 n -状态同步有界偏序自动机的最短同步字长度也不超过 $(n-1)$ ^[35]。

对照同步自动机研究的主要问题, 目前只是对单演自动机、广义单演自动机和有界偏序自动机证实了 Černý 猜想, 而关于这些偏序自动机类的同步性检测问题、同步字查找问题、最短同步字的查找问题以及最短同步字长度的上确界问题都没有专门讨论。本文针对有界偏序自动机全面地考虑这些问题。因为单演自动机都是有界偏序自动机, 所以所得结论也适用于单演自动机。

2 基本概念与记号

2.1 偏序集及有限偏序集的哈塞图

按照通常习惯, 记集合 X 的基数为 $|X|$ 。集合上具有自反性、反对称性和传递性的关系称为偏序。在不致引起误解时, 总用符号 \leq 来表示偏序, 用不等式 $x \leq z$ 表示偏序中的序对 (x, z) , 并用 $x < z$ 表示 $x \leq z$ 且 $x \neq z$ 。定义了偏序的非空集合称为偏序集。偏序集的两个元素 x 和 z 是可比的指不等式 $x \leq z$ 或 $z \leq x$ 成立。任意两个元素都可比的偏序集称为链。链上的偏序称为全序。

给定偏序集 P 的非空子集 X 。对于 X 的元素 x , 如果 X 的任意元素 y 都不满足条件 $x < y$, 就称 x 为 X 的一个极大元; 如果 X 的任意元素 y 都不满足条件 $y < x$, 就称 x 为 X 的一个极小元; 如果 X 的任意元素 y 都满足条件 $y \leq x$, 就称 x 为 X 的最大元; 如果 X 的任意元素 y 都满足条件 $x \leq y$, 就称 x 为 X 的最小元。有最大元和最小元的偏序集称为有界偏序集。有界偏序集上的偏序为有界偏序。

引理 1^[36] 假定 P 为一个有限偏序集, X 为 P 的一个非空子集, 下列各条件成立。

- (1) X 总有极小元和极大元;
- (2) X 最多有一个最小(大)元;
- (3) 如果 P 是一条链, 则它是一个有界偏序集。

基数有限的偏序集称为有限偏序集。有限偏序集 P 的哈塞图是一个顶点集为 P 的有向图, 它有一条从顶点 x 到顶点 z 的边的充分必要条件是 $x < z$ 且 P 的任意元素 y 都不满足条件 $x < y < z$ 。

2.2 自动机及其状态转换图

非空有限集有时也称为字母表。字母表的元素称为

字母。字母表 Σ 上的任意有限序列 a_1, a_2, \dots, a_n 都称为 Σ 上的一个字, 并简单地记作 $a_1 a_2 \dots a_n$, 其中的自然数 n 称为该字的长度。字母表上的空序列 e 称为空字, 其长度为 0。字母表 Σ 上全体字的集合记为 Σ^* 。对 Σ^* 中的任意字 w , 用 $|w|$ 表示 w 的长度, 并用 $w = a_1 a_2 \dots a_n$ 表示 w 是序列 $a_1 a_2 \dots a_n$ 。两个字 $w = a_1 a_2 \dots a_n$ 和 $u = b_1 b_2 \dots b_m$ 的连接定义为字 $wu = a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m$ 。

下列各等式对 Σ^* 中的任意字 w, u, v 显然成立。

$$|wu| = |w| + |u|$$

$$(wu)v = w(uv)$$

$$ew = w = we$$

一个自动机 A 是一个形如 (Q, Σ, δ) 的三元组, 其中, Q 是有限状态集, 其元素称为 A 的状态; Σ 为输入字母表, 其中的字母称为 A 的输入字母; δ 是一个从集合 $Q \times \Sigma$ 到集合 Q 的函数, 称为 A 的状态转换函数。集合 $Q \times \Sigma$ 中的二元组 (q, a) 在函数 δ 下的像 $\delta(q, a)$ 称为输入字母 a 在状态 q 上的作用。状态集为 n 元集的自动机称为 n -状态自动机。

令 $A = (Q, \Sigma, \delta)$ 为一个自动机。 A 的输入字母表 Σ 上的任意字 w 都称为 A 的一个输入字, 它在 A 的状态 q 上的作用 $\delta(q, w)$ 归纳定义如下:

$$\delta(q, w) = \begin{cases} q, & w = e \\ \delta(\delta(q, w), a), & u \in \Sigma^*, a \in \Sigma, w = ua \end{cases}$$

当 $\delta(q, w) = p$ 时, 称 w 能将状态 q 转换到状态 p , 或称状态 q 能被转换为状态 p 。自动机 A 的输入字 w 在状态集 Q 的子集 P 上的作用定义为:

$$\delta(P, w) = \{\delta(p, w) : p \in P\}$$

下面的等式对 A 的任意两个输入字 w, u 以及状态集 Q 的任意子集 P 显然成立。

$$\delta(\delta(P, w), u) = \delta(P, wu)$$

自动机 A 的状态转换图是一个以状态集 Q 为顶点集、以输入字母表 Σ 为标注集的边标注有向图, 它有一条从状态 q 到状态 p 且标注为输入字母 a 的边 $(q, p; a)$ 的充分必要条件是 $\delta(q, a) = p$ 。对于 A 中从状态 q_0 到状态 q_k 的道路 $(q_0, q_1; a_1), (q_1, q_2; a_2), \dots, (q_{k-1}, q_k; a_k)$, 称 $a_1 a_2 \dots a_k$ 为该道路的标签。显然, A 的输入字 w 能将状态 p 转换为状态 q 的充分必要条件是 A 中存在从状态 p 到状态 q 且标签为 w 的道路。

2.3 同步自动机和偏序自动机

给定自动机 $A = (Q, \Sigma, \delta)$ 。如果 A 的输入字 w 能将 A 的所有状态都转换到同一个状态, 即 $|\delta(Q, w)| = 1$, 就称 w 为 A 的一个同步字, 并称 A 为一个同步自动机。如果 A 的状态集 Q 是一个有界偏序集且其有界偏序相容于所有输入字母, 即对 A 的任意输入字母 a 和任意满足条件 $p \leq q$ 的状态 p, q 都有 $\delta(p, a) \leq \delta(q, a)$, 就称 A 为一个有界偏序自动机, 其状态集也称为状态偏序集, 状态偏序集中的最小元和最大元也分别称为 A 的最小状态和最大状态。有同步字的有界偏序自动机称为同步有界偏序自动机, 状态偏序集是一条链的(同步)有界偏序自动机称为(同步)单演自动机。关于有界偏序自动机有如下结论。

引理 2^[35] 有界偏序自动机 A 的状态集上的有界偏序相容于 A 的所有输入字, 即对 A 的任意输入字 w 和任意满足条件 $p \leq q$ 的状态 p, q 都有 $\delta(p, w) \leq \delta(q, w)$ 。

定理 3^[35] n -状态同步有界偏序自动机的最短同步字长

度不超过 $n-1$ 。对于任意有 m 个输入字母的 n -状态同步有界偏序自动机,可以在 $O(mn^2)$ 时间和 $O(n^2)$ 空间内找到它的一个同步字。

为避免繁琐的叙述,下文不区分自动机与其状态转换图,也不区分有限偏序集与其哈塞图;所考虑的自动机都至少有两个不同的状态;有界偏序自动机的最小状态和最大状态分别为 0 和 1。

3 同步有界偏序自动机的几个特征

本节揭示有界偏序自动机的几个与同步问题密切相关的特征,它们是设计有界偏序自动机的同步算法的理论基础。

定理 4 有界偏序自动机 A 的输入字 w 为同步字的充分必要条件是它能将最小状态 0 和最大状态 1 转换为同一个状态,即 $\delta(0, w) = \delta(1, w)$ 。

证明:充分性显然成立。为证明必要性,先假定 $\delta(0, w) = \delta(1, w)$ 。则对 A 的任意状态 q 都可以由不等式 $0 \leq q \leq 1$ 和引理 2 得到不等式:

$$\delta(0, w) \leq \delta(q, w) \leq \delta(1, w)$$

从而 $\delta(0, w) = \delta(q, w) = \delta(1, w)$ 。

这说明 w 是 A 的一个同步字。证明完毕。

定理 5 n -状态有界偏序自动机 A 同步的充分必要条件是 A 的最小状态和最大状态能被转换为同一状态,即存在 A 的输入字 u 和 v 满足条件:

$$\delta(0, u) = \delta(1, v) \tag{1}$$

当 A 同步时,它有长度不超过 $n-1$ 的同步字。

证明:令 $A = (Q, \Sigma, \delta)$ 。当 A 同步时,其任意同步字 w 当然能将 0 和 1 转换为同一状态。反过来,假定 0 和 1 能被转换为同一状态。为证明 A 是同步的且它一定有长度不超过 $n-1$ 的同步字,根据定理 4,只需要证明存在 A 的长度不超过 $n-1$ 的输入字能将 0 和 1 转换为同一状态。

对 A 的任意状态 q ,定义 A 的状态集 Q 的非空有限子集。

$$q^* = \{\delta(q, w) : w \in \Sigma^*\}$$

则 q^* 就是 q 在 A 中可到达的所有状态的集合,从而存在 A 的输入字 u 和 v 满足条件(1)当且仅当

$$0^* \cap 1^* \neq \emptyset \tag{2}$$

下面分 3 个步骤确定 A 的一个长度不超过 $n-1$ 的输入字使它能将 0 和 1 转换为同一状态。

第 1 步 选取输入字 v 使得 $\delta(1, v) \in 0^*$ 且

$$|v| \leq n - |0^*| \tag{3}$$

当 $1 \in 0^*$ 时,取 v 为空字 e ,则它当然具有性质(3)。当 $1 \notin 0^*$ 时,因为 0 和 1 能被转换为同一状态,所以存在 A 的输入字能将状态 1 转换到 0^* 中,即在 A 中存在从状态 1 到集合 0^* 中某些状态的道路。在 A 中选取一条以 1 为起点且终点在 0^* 内的最短道路。

$$(1, q_1; a_1), (q_1, q_2; a_2), \dots, (q_{k-1}, q_k; a_k)$$

并令

$$v = a_1 a_2 \dots a_k。$$

显然, $\delta(1, v) \in 0^*$ 且 $1, q_1, q_2, \dots, q_{k-1}$ 是集合 $Q - 0^*$ 中一列两两不相同的状态,从而 $|v| = k \leq |Q - 0^*| = n - |0^*|$ 。这说明输入字 v 确实具有性质(3)。

第 2 步 选取输入字 w 使之能将状态 0 转换到 0^* 中一个极大状态且

$$|w| \leq |0^*| - 1 \tag{4}$$

因为 0^* 是状态偏序集 Q 的一个非空子集,所以 0^* 中至少有一个极大状态。任取 0^* 中的一个极大状态 d 。当 $d=0$ 时,取 v 为空字 e ,则它当然具有性质(4)。当 $d \neq 0$ 时,由 0^* 的定义可以知道在 A 中存在从 0 到 d 的道路。在 A 中选取一条从 0 到 d 的最短道路

$$(1, p_1; b_1), (p_1, p_2; b_2), \dots, (p_{l-1}, p_l; b_l)$$

并令

$$w = b_1 b_2 \dots b_l。$$

显然, $\delta(0, w) = d$ 且 $0, p_1, p_2, \dots, p_{l-1}, d$ 是 0^* 中一列两两不相同的状态,从而

$$|w| = l \leq |0^*| - 1$$

这说明输入字 w 确实具有性质(4)。

第 3 步 说明输入字 vw 的长度不超过 $n-1$,且它能将状态 0 和 1 转换为同一状态。由式(3)和式(4)可以知道 vw 的长度不超过 $n-1$ 。对 A 的任意状态 q ,由 $0 \leq q \leq 1$ 可以得到

$$0 \leq \delta(0, v) \leq \delta(q, v) \leq \delta(1, v)$$

从而

$$d = \delta(0, w) \leq \delta(0, vw) \leq \delta(q, vw) \leq \delta(1, vw)$$

因为 d 是 0^* 中的极大状态且 $\delta(0, vw)$ 和 $\delta(1, vw)$ 都是 0^* 中的状态,由上述不等式可以推断

$$d = \delta(0, w) = \delta(0, vw) = \delta(1, vw)$$

进而得到 $d = \delta(q, vw)$ 。这说明 vw 能将 A 的任意状态 q 都转换到状态 d ,因而它是 A 的一个同步字。证明完毕。

推论 6 全体 n -状态同步有界偏序自动机的最短同步字长度的上确界为 $n-1$ 。

证明:由定理 5 可知全体 n -状态同步有界偏序自动机的最短同步字长度的上确界不超过 $n-1$ 。令 $A = (Q, \Sigma, \delta)$ 为一个 n -状态有界偏序自动机,其中状态集 $Q = \{1, 2, \dots, n\}$,输入字母表 $\Sigma = \{a\}$,状态转换函数定义为:

$$\delta(n, a) = n-1$$

$$\delta(n-1, a) = n-2$$

...

$$\delta(2, a) = \delta(1, a) = 1$$

状态集上的偏序为:

$$1 < 2 < \dots < n$$

容易验证 a^{n-1} 是 A 的一个最短同步字。因此全体 n -状态同步有界偏序自动机的最短同步字长度的上确界为 $n-1$ 。

4 有界偏序自动机的同步算法

本节描述有界偏序自动机的同步性检测算法、同步字查找算法和最短同步字查找算法。在算法描述中,输入有界偏序自动机 $[A = (Q, \Sigma, \delta); G]$ 意为 $A = (Q, \Sigma, \delta)$ 是有界偏序自动机 A 的状态转换图, G 是其状态集上的有界偏序的哈塞图。在算法的复杂度分析中, m 和 n 分别为输入自动机的输入字母数和状态数。

定理 5 及其证明给出了有界偏序自动机的如下同步性判定方法:有界偏序自动机 A 同步的充分必要条件是在 A 中存在从最大状态 1 到状态集的非空子集 0^* 的道路,其中 0^* 表示最小状态 0 能到达的状态的集合。该方法可以改编为下面的有界偏序自动机同步性检测算法(算法 1)。

算法 1 有界偏序自动机同步性检测算法输入:有界偏序自动机 $[A=(Q,\Sigma,\delta);G]$ 输出: A 的同步性

1. 在 G 中确定 A 的最小状态 0 和最大状态 1
2. 在 A 中搜索并标记 0 能到达的所有状态
3. 在 A 中搜索 1 能到达的状态,如果其中某个状态已经标记,RETURN True

算法 1 的复杂度分析:输入有界偏序自动机 A 的最小状态 0 是 G 中唯一的入度为 0 的顶点,而最大状态 1 则是 G 中唯一的出度为 0 的顶点。要确定状态 0 和 1 ,只需在 G 中以任意顶点为起点依次进行反向和正向搜索,得到的无后续顶点就分别是 0 和 1 。这个过程需要时间为 $O(n)$,空间为常数。在 A 中搜索某状态 q 能到达的状态可以通过从 q 开始执行广度优先搜索来完成。这个过程需要的时间和空间分别为 A 的边数 $O(mn)$ 和顶点数 $O(n)$ 。因此算法 1 的时间复杂度为 $O(mn)$,空间复杂度为 $O(n)$ 。

定理 5 的证明给出了查找任意 n -状态同步有界偏序自动机 A 的一个长度不超过 $n-1$ 的同步字的步骤。这些步骤可以改编为下面的同步有界偏序自动机的同步字查找算法(见算法 2)。

算法 2 有界偏序自动机的同步字查找算法输入:同步有界偏序自动机 $[A=(Q,\Sigma,\delta);G]$ 输出: A 一个同步字

1. 在 G 中确定 A 的最小状态 0 和最大状态
2. 在 A 中计算 0^* ,并对其中每个状态 q 都记录从 0 到 q 的最短道路的标签 $w(q)$
3. 在 G 中查找 0^* 的一个极大状态 d
4. 在 A 中计算 1 到 0^* 的最短道路的标签 v
5. RETURN $vw(d)$

算法 2 的复杂性分析:算法除步骤 3 外的其他步骤本质上就是算法 1,只是其中新增了记录相应最短道路的任务。为完成新增任务,只需要对搜索到的每个状态记录搜索到该状态的边,增加的时间开销和空间开销分别为 A 的边数 $O(mn)$ 和顶点数 $O(n)$ 。要查找 0^* 的一个极大状态 d ,可以先在 0^* 中任取状态 d ,然后采用深度优先搜索策略在 G 中遍历以 d 为根的子树;当此子树中存在 0^* 中的状态 d' 满足条件 $d < d'$ 时,重置 $d = d'$,然后重复上述遍历,直到不被重置的 d 即为 0^* 的一个极大状态。此过程需要的时间和空间复杂度分别为 G 的边数 $O(n^2)$ 和顶点数 $O(n)$ 。因此,算法 2 的时间复杂度为 $O(mn+n^2)$,空间复杂度为 $O(n)$ 。

为描述同步有界偏序自动机的最短同步字查找算法,需要先介绍自动机的概念以及 Eppstein 的自动机同步性检测算法。对于任意自动机 $A=(Q,\Sigma,\delta)$,令 Q' 为在 Q 的所有二元子集组成的集合 Q'' 中添加一个不属于 Q 的符号 ∞ 得到的集合,定义从 $Q' \times \Sigma$ 到 Q' 的函数 δ' 如下:

$$\delta'(P,a) = \begin{cases} \delta(P,a), & P, \delta(P,a) \in Q'' \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

由此构造的自动机 $A'=(Q',\Sigma,\delta')$ 称为 A 的对自动机,它可以用于判定自动机 A 的同步性。

引理 7^[11] 对于自动机 A 的两个不同状态 p, q ,输入字 w 满足条件 $\delta(p,w) = \delta(q,w)$ 的充分必要条件是 w 为 A 的对自动机 A' 中某条从状态 $\{p, q\}$ 到状态 ∞ 的道路的标签。自动机 A 同步的充分必要条件是对 A 的任意两个不同状态 p, q

都存在输入字 w 满足条件 $\delta(p,w) = \delta(q,w)$ 。

Eppstein 的同步性检测算法的设计思想如下:对于输入自动机 $A=(Q,\Sigma,\delta)$,先构造 A 的对自动机 A' ,再在 A' 中以状态 ∞ 为起点执行反向广度优先搜索;如果能搜索到 A' 的所有状态,则 A 是同步的;否则, A 是非同步的。此算法的时间复杂度和空间复杂度分别为 $O(mn^2)$ 和 $O(n^2)$ ^[11]。根据定理 5,可以利用自动机的对自动机设计,如算法 3 所示。

算法 3 有界偏序自动机的最短同步字查找算法输入:同步有界偏序自动机 $[A=(Q,\Sigma,\delta);G]$ 输出: A 一个最短同步字

1. 在 G 中确定 A 的最小状态 0 和最大状态 1
2. 构造 A 的对自动机 A'
3. 在 A' 中查找从状态 $\{0, 1\}$ 到状态 ∞ 的最短道路,并置其标签为 w
4. RETURN w

算法 3 的复杂性分析:算法 3 与 Eppstein 的自动机同步性检测算法显然有相同的时间复杂度 $O(mn^2)$ 和空间复杂度 $O(n^2)$ 。

结束语 有界偏序自动机是其状态集具有一个相容于所有输入字母的有界偏序的自动机。全体 n -状态同步有界偏序自动机的最短同步字长度的上确界为 $n-1$ 。对于任意有 m 个输入字母的 n -状态有界偏序自动机 A ,可以在 $O(mn)$ 时间和 $O(n)$ 空间内检测出其同步性;当 A 同步时,可以在 $O(mn+n^2)$ 时间和 $O(n)$ 空间内找到 A 的一个长度不超过 $n-1$ 的同步字,并可以在 $O(mn^2)$ 时间和 $O(n^2)$ 空间内找到 A 的一个最短同步字。

参考文献

- [1] ASHBY W R. An Introduction to Cybernetics [M]. London: Chapman & Hall, 1956.
- [2] ČERNÝ J. Poznam k akhomogenym eksperimentom s konechnymi automatami [J]. Matematicko-fyzikalny Casopis Slovenia Akadmic Vied, 1964, 14(3): 208-215.
- [3] HENNIE F. Fault detecting experiments for sequential circuits [C] // Proceedings of the Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design. New Jersey, USA, 1964: 95-110.
- [4] NATARAJAN B. An algorithmic approach to the automated design of parts orienters [C] // Proceeding of Symposium on Foundations Computer Science. Toronto, Canada, 1986: 132-142.
- [5] NATARAJAN B. Some paradigms for the automated design of part feeders [J]. International Journal of Robotics Research, 1989, 8(6): 89-109.
- [6] WIEGLEY J, GOLDBERG K, PESHKIN M. A complete algorithm for designing passive fences to orient parts [J]. Assembly Automation, 1997, 17(2): 129-136.
- [7] BENENSON Y, ELIZUR T, ADAR R. Programmable and autonomous computing machine made of biomolecules [J]. Nature, 2001, 414(1): 430-434.
- [8] JÜRGENSEN H. Synchronization [J]. Information and Computation, 2008, 206, 1033-1044.
- [9] KRISHNASWAMY S, PLAZA S, MARKOV I. Signature-based SER analysis and design of logic circuits [J]. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 2009, 28(1): 74-86.

- [10] BECKER A, BRETL T. Approximate Steering of a unicycle under bounded model perturbation using ensemble control [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2012, 28(3): 580-591.
- [11] EPPSTEIN D. Reset sequences for monotonic automata [J]. *SIAM Journal on Computing*, 1990, 19(3): 500-510.
- [12] ROMAN A. New algorithms for finding short reset sequences in synchronizing automata [C] // *Proceeding of International Enformatika Conference*. Prague, Czech Republic, 2005: 13-17.
- [13] PODOLAK I, ROMAN A, SZYKUŁA M, Zielinski B. A machine learning approach to synchronization of automata [J]. *Expert Systems with Applications*, 2018, 97: 357-371.
- [14] EGE SARA N, OMER F A, KAMIL T G, et al. Boosting expensive synchronizing heuristics [J]. *Expert Systems with Applications*, 2021, 167: 114203.
- [15] CHEN X P, HE Y, XIAO F F. Synchronization of a Certain Family of Automata and Consumption Function Analysis [J]. *Computer Science*, 2019, 46(11A): 535-538.
- [16] SZYKUŁA M. Improving the upper bound on the length of the shortest reset words [C] // *Proceedings of International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*. Schloss Dagstuhl: LIPIcs, 2018: 1-13.
- [17] TRAHTMAN A. An efficient algorithm finds noticeable trends and examples concerning the Černý Conjecture [J]. *Lecture Notes in Computer Science*, 2006, 4162: 789-800.
- [18] KISIELEWICZ A, KOWALSKI J, SZYKUŁA M. Computing the shortest reset words of synchronizing automata [J]. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2015, 29(1): 88-124.
- [19] DE BONDT M, DON H, ZANTEMA H. Slowly synchronizing automata with fixed alphabet size [J]. *Information and Computation*, 2021, 279: 104614.
- [20] ANANICHEV D S, VOLKOV M V, GUSEV V V. Primitive digraphs with large exponents and slowly synchronizing automata [J]. *J. Math. Sci.*, 2013, 192(3): 263-278.
- [21] DE BONDT M, DON H, ZANTEMA H. DFAs and PFAs with long shortest synchronizing word length [C] // *Developments in Language Theory*. Springer, 2017: 122-133.
- [22] DE BONDT M, DON H, ZANTEMA H. Lower bounds for synchronizing word lengths in partial automata [J]. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 2019, 30(1): 29-60.
- [23] DON H, ZANTEMA H. Finding DFAs with maximal shortest synchronizing word length [C] // *Language and Automata Theory and Applications*. Springer, 2017: 246-260.
- [24] KISIELEWICZ A, KOWALSKI J, SZYKUŁA M. Experiments with synchronizing automata [C] // *Implementation and Application of Automata*. Springer International Publishing, 2016: 176-188.
- [25] RYSTSOV I. Reset words for commutative and solvable automata [J]. *Theoretical Computer Science*, 1997, 172: 273-279.
- [26] DUBUC L. Sur les automates circulaires et la conjecture de Černý [J]. *RAIRO-Theoretical Informatics and Applications*, 1998, 32(1): 21-34.
- [27] KARI J. Synchronising finite automata on Eulerian digraphs [J]. *Theoretical Computer Science*, 2003, 259(1/2/3): 223-232.
- [28] BERLINKOV M. Synchronizing automata on quasi-Eulerian digraph [J]. *Lecture Notes in Computer Science*, 2012, 7381: 90-100.
- [29] TRAHTMAN A. The Černý conjecture for aperiodic automata [J]. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 2007, 9(2): 3-10.
- [30] ALMEIDA J, MAGOLIS S, STEINBERG B, et al. Representation theory of finite semigroups, semigroup radicals and formal language theory [J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2009, 361(3): 1429-1461.
- [31] STEINBERG B. The Černý conjecture for one-cluster automata with prime length cycle [J]. *Theoretical Computer Science*, 2011, 412(9): 5487-5491.
- [32] VOLKOV M. Synchronizing automata preserving a chain of partial orders [J]. *Theoretical Computer Science*, 2009, 410(37): 3513-3519.
- [33] ANANICHEV D, VOLKOV M. Synchronizing monotonic automata [J]. *Theoretical Computer Science*, 2004, 327(3): 225-239.
- [34] ANANICHEV S, VOLKOV M. Synchronizing generalized monotonic automata [J]. *Theoretical Computer Science*, 2005, 330(1): 3-13.
- [35] CUI Z H, HE Y, SUN S Y. Synchronizing bounded partially ordered automata [J]. *Chinese Journal of Computers*, 2019, 42(3): 610-623.
- [36] MARTYUGIN P. Complexity of problems concerning reset words for cyclic and Eulerian automata [J]. *Theoretical Computer Science*, 2012, 450(7): 3-9.
- [37] VOREL V. Complexity of a problem concerning reset words for Eulerian binary automata [J]. *Information and Computation*, 2017, 253: 497-509.
- [38] HE Y, CHEN X P, LI G, et al. Extremal synchronizing circular automata [J]. *Information and Computation*, 2021, 279: 104614.



WANG Zhixi, born in 1970, associate professor, is a member of China Computer Federation. His main research interest is the theory of algorithm.