



计算机科学

COMPUTER SCIENCE

构造曲率单调的组合二次 h -Bézier曲线

李林, 解滨, 韩力文

引用本文

李林, 解滨, 韩力文. 构造曲率单调的组合二次 h -Bézier曲线[J]. 计算机科学, 2023, 50(7): 119-128.

LI Lin, XIE Bin, HAN Liwen. [Constructing Combined Quadratic \$h\$ -Bezier Curves with Monotone Curvature](#) [J]. Computer Science, 2023, 50(7): 119-128.

相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

[基于深度学习的活跃IPv6地址预测算法](#)

Deep Learning-based Algorithm for Active IPv6 Address Prediction

计算机科学, 2023, 50(7): 261-269. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.220700076>

[融合IRT的图注意力深度知识追踪模型](#)

Graph Attention Deep Knowledge Tracing Model Integrated with IRT

计算机科学, 2023, 50(3): 173-180. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.211200134>

[基于误分代价的变精度模糊粗糙集属性约简](#)

Attribute Reduction of Variable Precision Fuzzy Rough Set Based on Misclassification Cost

计算机科学, 2022, 49(4): 161-167. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.210500211>

[基于场景图的段落生成序列图像方法](#)

Image Stream From Paragraph Method Based on Scene Graph

计算机科学, 2022, 49(1): 233-240. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.201100207>

[基于DGX-2的湍流燃烧问题优化研究](#)

DGX-2 Based Optimization of Application for Turbulent Combustion

计算机科学, 2021, 48(12): 43-48. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.201200129>

构造曲率单调的组合二次 h -Bézier 曲线

李林¹ 解滨² 韩力文^{1,3,4}

1 河北师范大学数学科学学院 石家庄 050024

2 河北师范大学计算机与网络空间安全学院 石家庄 050024

3 河北省计算数学与应用重点实验室 石家庄 050024

4 河北省数学与交叉科学国际联合研究中心 石家庄 050024

(953829020@qq.com)

摘要 h -Bézier 曲线($h>0$)又被称为 Pólya 曲线,它具有与经典 Bézier 曲线($h=0$)一致的诸多优良性质。为此,文中研究了二次 h -Bézier 曲线具有单调曲率的充要条件及其构造算法。首先,讨论二次 h -Bézier 曲线曲率极值的存在性,得到曲线具有单调曲率的充要条件;通过引入曲率临界圆,给出判断二次 h -Bézier 曲线曲率单调性的几何方法,即检查二次 h -Bézier 曲线的中间控制点是否在曲率临界圆上或圆内;并由此得到构造具有单调曲率的二次 h -Bézier 曲线的两种算法,通过调节形状参数 h 可保证曲线具有单调递减或单调递增的曲率。其次,研究两条二次 h -Bézier 曲线的光滑拼接,基于对二次 h -Bézier 曲线性质的分析,选择第二条曲线在肩点处与第一条曲线的端点实现拼接,得到 G^2 拼接的充要条件;讨论参数对拼接曲线形状的影响。最后,构造出同时满足 G^2 拼接、曲率单调递减(或单调递增)的组合二次 h -Bézier 曲线。数值实例显示了组合二次 h -Bézier 曲线的造型优势和灵活性。

关键词 h -Bézier 曲线;单调曲率;曲率临界圆; G^2 拼接;肩点

中图法分类号 TP391

Constructing Combined Quadratic h -Bezier Curves with Monotone Curvature

LI Lin¹, XIE Bin² and HAN Liwen^{1,3,4}

1 School of Mathematics Sciences, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024, China

2 College of Computer and Cyber Security, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024, China

3 Hebei Key Laboratory of Computational Mathematics and Applications, Shijiazhuang 050024, China

4 Hebei International Joint Research Center for Mathematics and Interdisciplinary Science, Shijiazhuang 050024, China

Abstract The h -Bézier curves($h>0$), also known as Pólya curves, share many excellent properties with classical Bézier curves ($h=0$). In this paper, the necessary and sufficient conditions for quadratic h -Bézier curves with monotone curvature and its construction algorithm are studied. First, the sufficient and necessary conditions for quadratic h -Bézier curves with monotone curvature are obtained by discussing the existence of the extremes of the curves. By introducing curvature critical circles of the curvature, the monotony for the curvature of the quadratic h -Bézier curve can be directly verified by checking whether the middle control point of the curve is on or inside the curvature critical circle. Two algorithms for construct quadratic h -Bezier curves with monotone curvature are obtained, ensuring that the curves can have monotonically decreasing or increasing curvature by adjusting the shape parameter h . Secondly, the G^2 smooth blending of two quadratic h -Bézier curves is studied. Based on the analysis of the properties of the quadratic h -Bézier curves, the shoulder point of the second curve is selected to join with the end point of the first curve, and the necessary and sufficient conditions are obtained and the influence of parameters on the shape of the blending curve is discussed. Finally, the combined quadratic h -Bézier curve with decreasing(or increasing) is constructed. The numerical examples show the modeling advantage and flexibility of the combined quadratic h -Bézier curve.

Keywords h -Bézier curve, Monotone curvature, Curvature critical circles, G^2 blending, Shoulder point

到稿日期:2022-08-01 返修日期:2022-11-16

基金项目:国家自然科学基金(62076088);河北省自然科学基金(A2018205103);河北师范大学科研基金资助项目(L2020Z02)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(62076088), National Natural Science Foundation of Hebei Province, China(A2018205103) and Research Fund of Hebei Normal University(L2020Z02).

通信作者:韩力文(hanliwen@sina.com)

h -Bézier 曲线具有许多与经典 Bézier 曲线相同的优良性质,如端点插值性、几何不变性、仿射不变性、凸包性等,同时,它还包含形状参数 h ,使得 h -Bézier 曲线在使用时更加方便。1968年,Stancu^[1]引进了 $h>0$ 的算子,并在1984年证明了该算子与经典的 Bernstein 逼近算子有很多相似的优良性质。如非负性、单位分解性、端点插值性等。1985年,Goldman^[2]再一次研究 h -Bernstein 多项式,发现 h -Bernstein 多项式可以由 Pólya 离散概率模型生成,当 $h=0$ 时,Pólya 模型将退化为经典的 Bernstein 多项式。Goldman^[3]把 h -Bernstein 多项式称为 Pólya 多项式,直接将 Pólya 多项式应用到 Pólya 曲线 (h -Bézier 曲线),并对其算法和性质进行了进一步的研究。2011年,Simeonov 等^[4]定义了 h -开花算法,利用递归算法构造出 h -Bézier 曲线递归细分。2019年,Sun 等^[5]为了拓展 h -Bézier 曲线的表示能力,通过增加正实数权因子构造出了有理 h -Bézier 曲线。2019年,Marco 等^[6]证明了 h -Bernstein 基函数的全正性,给出了一种计算严格全正 h -Bernstein-vandermonde 阵双对角分解的算法。

量子微积分定义了 h -微积分和 q -微积分。随着量子微积分的发展,近年来广义 Bernstein 基函数在逼近理论和计算机辅助设计中得到了广泛研究。1996年,Phillips^[7]通过 q -二项式系数得到 q -Bernstein 逼近算子;1998年,Oruç^[8]证明了该基函数的全正性和保凸性。鉴于 q -Bernstein 多项式的优良性质,许多学者将 Phillips q -Bernstein 多项式应用到曲面设计中。2003年,Oruç 等^[9]在 Phillips q -Bernstein 多项式的基础上构造出了 Phillips q -Bézier 曲线。2007年,Oruç 等^[10]构造出了有理 Phillips q -Bézier 曲线。2011年,Simeonov 等^[11]定义了 q -开花算法,进一步研究了 Phillips q -Bézier 曲线的性质,并给出细分形式。随着广义 Bernstein 基函数的发展,学者们开始探究 q -Bernstein 逼近算子和 h -Bernstein 之间的联系。2009年 Nowak^[12]定义了 (q, h) -Bernstein 逼近算子,并对其性质进行研究。2014年,Simeonov 等^[13]给出了 (q, h) 开花的形式,并将 $[0, 1]$ 上的 (q, h) -Bernstein 基函数扩充到任意区间上,在此基础上构造了 (q, h) -Bézier 曲线。2015年,Simeonov 等^[14]研究了 (q, h) -Bézier 曲线的两个重要的性质:变差缩减性和升阶性。

在公路设计当中,为了保证汽车的安全行驶,工程师们往往会构造曲率单调的缓和曲线。在道路设计^[15]、机器人轨道设计^[16]等方面,曲率单调的曲线有重要应用。高次的 Bézier 曲线的曲率计算时会涉及高次多项式,得到曲率单调条件较为困难。二次广义 Bézier 曲线能表示较为丰富的曲线形状,于是近年来越来越多的学者对二次广义 Bézier 曲线的曲率单调条件进行了研究。1992年,Sapidis 等^[17]利用几何关系通过调整中间控制点的位置给出了二次 Bézier 曲线段具有单调曲率的条件。2000年,Frey 等^[18]研究了标准型二次 Bézier 曲线段,当权值确定时,通过对控制多边形的形状添加简单的几何约束来保证单调曲率。2015年,Cai 等^[19]利用五次 Bézier 曲线,在两平行线之间构造了一条满足 G^2 连续的缓和

曲线。2018年,Ahmad 等^[20]通过建立合适的坐标系,得到了二次有理 Bézier 曲线曲率单调时权因子的取值范围。2019年,Wang 等^[21]通过对控制多边形的边加以约束,给出了 n 次 Bézier 曲线曲率单调的充分条件,并给出了构造具有单调曲率的 n 次 Bézier 曲线方法。2021年,He 等^[22]提出了一种利用具有单调曲率的典型曲线进行 G^1 插值的新算法,并将该算法应用到曲线补全中。同年,Liang 等^[23]给出了二次 Phillips q -Bézier 曲线具有单调曲率的几何充要条件,并且构造出了既满足 G^2 拼接又满足曲率单调递减的二次 Phillips q -Bézier 曲线。

h -Bézier 曲线与经典的 Bézier 曲线和 Lupas q -Bézier 曲线^[24]的不同之处在于曲线与控制多边形不相切,因此,同以往一样直接在首末端点处进行拼接对于 h -Bézier 曲线来说难以实现。因此,针对二次 h -Bézier 曲线,本文提出了与经典 Bézier 曲线 G^2 拼接不同的拼接算法,即第二条曲线在肩点处与第一条曲线的端点实现拼接。

本文将围绕二次 h -Bézier 曲线探究其具有单调曲率的方法。第1节介绍二次 h -Bézier 曲线曲率存在极值以及曲率单调的充要条件;第2节分别构造具有曲率单调递增、递减的二次 h -Bézier 曲线;第3节给出二次 h -Bézier 曲线在肩点处 G^2 拼接的条件;第4节在 G^2 拼接以及曲率单调的充要条件基础上构造具有单调曲率的组合二次 h -Bézier 曲线。

1 二次 h -Bézier 曲线曲率单调的充要条件

1.1 h -Bézier 曲线

定义 1^[2] (n 次 h -Bézier 曲线) 给定 $n+1$ 个控制顶点

$P(t; h) = \sum_{k=0}^n P_k B_k^n(t; h)$, $h>0$, 参数 $t \in [0, 1]$, 称参数曲线段

$P(t; h) = \sum_{k=0}^n P_k B_k^n(t; h)$ 为 n 次 h -Bézier 曲线。其中 $B_k^n(t; h) =$

$$\binom{n}{k} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (t+jh) \prod_{j=0}^{n-k-1} (1-t+jh)}{\prod_{j=0}^{n-1} (1+jh)}$$

为 n 次 h -Bernstein 基函数。

该基函数具有非负性、单位分解性、对称性、全正性等,其中对称性为: $B_k^n(t, h) = B_{n-k}^n(1-t, h)$ 。当 $h=0$ 时, h -Bernstein 基函数退化为经典 Bernstein 基函数;当 $h=0$ 时, h -Bézier 曲线退化为经典 Bézier 曲线。

该曲线在首末端点处与控制多边形不相切,对于二次 h -Bézier 曲线,在首末端点处的导矢分别为 $\frac{1}{1+h}[(2+h)\overrightarrow{P_0P_1} +$

$h\overrightarrow{P_1P_2}]$, $\frac{1}{1+h}[h\overrightarrow{P_0P_1} + (2+h)\overrightarrow{P_1P_2}]$ 。当 $t = \frac{1}{2}$ 时,该点处的

导矢为 $\overrightarrow{P_0P_2}$, 即该点导矢与控制多边形底边 P_0P_2 平行且为曲线上与 P_0P_2 最远的点。因此,类似经典 Bézier 曲线,我们称之为二次 h -Bézier 曲线的肩点,在第3节中结合曲率单调选择在肩点处对 h -Bézier 曲线进行拼接。

1.2 h -Bézier 曲线的曲率极值

二次 h -Bézier 曲线为:

$$P(t; h) = \frac{1}{1+h}[(1-t)(1-t+h)P_0 + 2t(1-t)P_1 + t(t+h)P_2]$$

其中, $\mathbf{P}_j (j=0, 1, 2)$ 是曲线的 3 个控制顶点, 形状参数 $h > 0$, 参数 $t \in [0, 1]$ 。

如图 1 所示, 以 \mathbf{P}_0 为原点, $\overrightarrow{\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_2}$ 为 x 轴的正方向建立平面直角坐标系, 控制顶点的坐标分别记 $\mathbf{P}_0 (0, 0)$, $\mathbf{P}_1 (k, m)$, $\mathbf{P}_2 (g, 0)$, 其中 $g > 0, m \neq 0, k, g, m \in \mathbb{R}$ 。当 $m=0$ 时, 3 个控制顶点共线, 此时曲率为 0。本文中讨论 $m \neq 0$ 的情况。

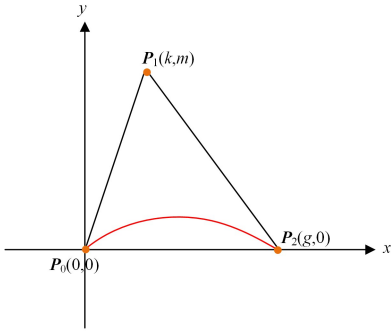


图 1 平面直角坐标系下的二次 h -Bézier 曲线

Fig. 1 Quadratic h -Bézier curve in rectangular coordinate system

本文中的二次 h -Bézier 曲线均是在此坐标系下进行表示。

曲线上任意一点表示为:

$$\mathbf{P}(t; h) = \left(\frac{2t(1-t)k + t(t+h)g}{1+h}, \frac{2t(1-t)m}{1+h} \right) \quad (1)$$

其一阶导矢和二阶导矢分别表示为:

$$\mathbf{P}'(t; h) = \left(\frac{2(1-2t)k + (2t+h)g}{1+h}, \frac{2(1-2t)m}{1+h} \right)$$

$$\mathbf{P}''(t; h) = \left(\frac{-4k+2g}{1+h}, \frac{-4m}{1+h} \right)$$

当 $t \in [0, 1]$ 时, $m \neq 0$, 则 $\frac{2t(1-t)k + t(t+h)g}{1+h}$ 与

$\frac{2t(1-t)m}{1+h}$ 不同时为零, 则 $|\mathbf{P}'(t; h)|$ 不为零。

由此曲率可以表示为:

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{P}'(t; h) \times \mathbf{P}''(t; h)|}{|\mathbf{P}'(t; h)|^3} = \frac{4g|m|}{(1+h)|\mathbf{P}'(t; h)|^3} \quad (2)$$

曲率的导数为:

$$\kappa'(t) = \frac{-12g|m|}{(1+h)|\mathbf{P}'(t; h)|^4} |\mathbf{P}'(t; h)|' \quad (3)$$

曲率的二阶导为:

$$\begin{aligned} \kappa''(t) &= \frac{48g|m|}{(1+h)|\mathbf{P}'(t; h)|^5} (|\mathbf{P}'(t; h)|')^2 - \\ &\quad \frac{12g|m|}{(1+h)|\mathbf{P}'(t; h)|^4} |\mathbf{P}'(t; h)|'' \end{aligned} \quad (4)$$

由于二次 h -Bézier 曲线只有 3 个控制顶点, 因此曲线上任一点的曲率圆始终位于曲线的同一侧。故在本文中, 曲率符号均认为是正。

命题 1 二次 h -Bézier 曲线 $\mathbf{P}(t; h)$ 曲率在 $t \in [0, 1]$ 若存在极值点, 则有且仅有一个极值点, 且该极值点为极大值点。

证明: 由式(3)可得, 当且仅当 $|\mathbf{P}'(t; h)| = 0$ 时, $\kappa'(t) = 0$ 。记

$$|\mathbf{P}'(t; h)| = \frac{1}{1+h} \sqrt{G(t)} \quad (5)$$

其中

$$G(t) = 4[4m^2 + (g-2k)^2]t^2 + 4[(g-2k)(2k+hg) - 4m^2]t + 4m^2 + (2k+hg)^2 \quad (6)$$

则

$$|\mathbf{P}'(t; h)|' = \frac{G'(t)}{2(1+h)\sqrt{G(t)}} \quad (7)$$

当且仅当 $G'(t) = 0$ 时, $|\mathbf{P}'(t; h)|' = 0$ 。

其中

$$G'(t) = 8[4m^2 + (g-2k)^2]t + 4[(g-2k)(2k+hg) - 4m^2] \quad (8)$$

该方程为一元一次方程, 只有唯一解:

$$t = \frac{4m^2 - (g-2k)(2k+hg)}{2[4m^2 + (g-2k)^2]} \quad (9)$$

将 t 的取值进行分类讨论:

(1) 中间控制顶点 $\mathbf{P}_1(k, m)$ 满足 $\left(k - \frac{g(1-h)}{4}\right)^2 + m^2 \geq \frac{g^2(1+h)^2}{16}$ 且 $\left(k - \frac{g(3+h)}{4}\right)^2 + m^2 \geq \frac{g^2(1+h)^2}{16}$ 时 $t \in (0, 1)$ 。

(2) 中间控制顶点 $\mathbf{P}_1(k, m)$ 满足 $\left(k - \frac{g(1-h)}{4}\right)^2 + m^2 \leq \frac{g^2(1+h)^2}{16}$ 时, $t \leq 0$, $\left(k - \frac{g(3+h)}{4}\right)^2 + m^2 \leq \frac{g^2(1+h)^2}{16}$ 时, $t \geq 1$ 。

将式(9)代入式(4)可得

$$\kappa''(t) = -\frac{6g|m|}{(1+h)^2 |\mathbf{P}'(t; h)|^4 \sqrt{G(t)}} G''(t)$$

其中

$$G''(t) = 8[4m^2 + (g-2k)^2] > 0$$

得 $\kappa''(t) < 0$ 。此时 $\kappa'(t) < 0$ 且 $\kappa''(t) < 0$, 则 t 为该曲线曲率的极大值点。

证毕。

定理 1 给定二次 h -Bézier 曲线 $\mathbf{P}(t; h)$ 的首末控制顶点为 $\mathbf{P}_0(0, 0)$, $\mathbf{P}_2(g, 0)$, 记中间控制顶点 $\mathbf{P}_1(k, m)$ 。

(1) 该二次曲线的曲率在 $t = \frac{1}{2}$ 处取到极值的充要条件为 $k = \frac{g}{2}$ 。

(2) 该二次曲线在 $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 处取到极值的充要条件为 $\mathbf{P}_1(k, m)$ 需要满足 $\left(k - \left(\frac{g}{2} + \frac{g(1+h)}{4(2t-1)}\right)\right)^2 + m^2 = \frac{g^2(1+h)^2}{16(2t-1)^2}$ 。

证明: 根据命题 1 可得该曲线具有唯一极值 t , 将式(8)进行整理得:

$$4m^2(2t-1) + 4k^2(2t-1) - 2k(hg-g+4gt) + g^2(2t+h) = 0$$

将上式分两种情况进行考虑:

$$(1) 2t-1=0, \text{ 即 } t = \frac{1}{2} \text{ 得 } k = \frac{g}{2};$$

$$(2) 2t-1 \neq 0, \text{ 即 } t \neq \frac{1}{2}.$$

化简得:

$$m^2 + k^2 - \frac{2k(hg - g + 4gt)}{4(2t-1)} = \frac{-g^2(2t+h)}{4(2t-1)}$$

整理得:

$$\left(k - \left(\frac{g}{2} + \frac{g(1+h)}{4(2t-1)}\right)\right)^2 + m^2 = \frac{g^2(1+h)^2}{16(2t-1)^2}$$

证毕。

对定理 1, $\left(k - \left(\frac{g}{2} + \frac{g(1+h)}{4(2t-1)}\right)\right)^2 + m^2 = \frac{g^2(1+h)^2}{16(2t-1)^2}$

进行讨论: 当 $2t - 1 > 0$, 即 $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 时, 上式为

$\left(k - \left(\frac{g}{2} + \frac{g(1+h)}{4(2t-1)}\right)\right)^2 + m^2 = \frac{g^2(1+h)^2}{16(2t-1)^2}$; 当 $2t - 1 < 0$, 即

$t \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ 时, 上式为 $\left(k - \left(\frac{g}{2} - \frac{g(1+h)}{4(1-2t)}\right)\right)^2 + m^2 =$

$$\frac{g^2(1+h)^2}{16(2t-1)^2}.$$

定理 2 二次 h -Bézier 曲线 $P(t; h)$ 曲率在 t 处取得极值的几何解释。

(1) 该二次曲线的曲率在 $t = \frac{1}{2}$ 处取到极值的充分必要条件为 $P_1(k, m)$ 在直线 $x = \frac{g}{2}$ 上。

(2) 该二次曲线在 $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ 处取到极值, 当且仅当 $P_1(k, m)$ 在 $\left(k - \left(\frac{g}{2} - \frac{g(1+h)}{4(1-2t)}\right)\right)^2 + m^2 = \frac{g^2(1+h)^2}{16(2t-1)^2}$ 轨迹上。

(3) 该二次曲线在 $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 处取到极值, 当且仅当 $P_1(k, m)$ 在 $\left(k - \left(\frac{g}{2} + \frac{g(1+h)}{4(2t-1)}\right)\right)^2 + m^2 = \frac{g^2(1+h)^2}{16(2t-1)^2}$ 轨迹上。

注: 当 h 确定时, 该曲线在 t 处取到极值时, 若 $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, 则 $P_1(k, m)$ 所在的圆的半径随 t 的增大而增大, 圆心向负半轴移动; 若 $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, 则 $P_1(k, m)$ 所在的圆的半径随 t 的增大而减小, 圆心向负半轴移动。

图 2 给出了由控制顶点 $P_0(0, 0)$, $P_2(4, 0)$ 及 $h=1$ 定义的二次 h -Bézier 曲线曲率极值存在时 $P_1(k, m)$ 的位置。

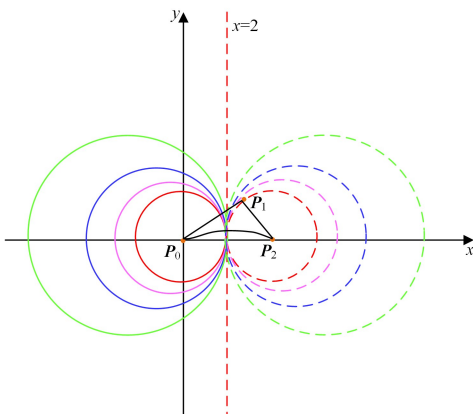


图 2 二次 h -Bézier 曲线曲率取得极值 $P_1(k, m)$ 位置

Fig. 2 Position of $P_1(k, m)$ when the curvature of the quadratic h -Bezier curve reaches the extreme value

若该曲线在 $t = \frac{1}{2}$ 处取到极值, 则 $P_1(k, m)$ 在图 2 中的虚

线上; 若在 $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ 上取得极值, 则 $P_1(k, m)$ 在直线 $x=2$

左侧的实线圆上, 该实线圆从内到外分别为 $t = 0, 0.1, 0.2,$

0.3 ; 若在 $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 上取得极值, 则 $P_1(k, m)$ 在直线 $x=2$ 右

侧的虚线圆上, 该虚线圆从内到外分别为 $t = 1, 0.9, 0.8, 0.7,$

$0.6, 0.5$; 该实线圆与虚线圆关于 t 与 $1-t$ 对称。对于图中的 $P_1(3,$

$\sqrt{3})$ 位于 $t=1$ 的虚线圆上, 则由 $P_0(0, 0)$, $P_1(3, \sqrt{3})$, $P_2(4, 0)$,

$h=1$ 定义的二次 h -Bézier 曲线曲率极值在 $t=1$ 处取得。

1.3 h -Bézier 曲线曲率单调的充要条件

由控制顶点的坐标 $P_0(0, 0)$, $P_1(k, m)$, $P_2(g, 0)$ 定义的二次

h -Bézier 曲线 $P(t; h)$, 其曲率单调的充要条件是 $\kappa'(t) = 0$

在 $t \in (0, 1)$ 内没有根。由此可知该曲线曲率在 $t \in [0, 1]$ 上单

调, 则该曲线单调的临界条件是该二次 h -Bézier 曲线曲率在

$t=0$ 或 $t=1$ 处取到最大值, 根据定理 1, $P_1(k, m)$ 满足

$$\left(k - \frac{g(1-h)}{4}\right)^2 + m^2 = \frac{g^2(1+h)^2}{16}$$

时, 该曲线在 $t=0$ 处取到

最大值; $P_1(k, m)$ 满足 $\left(k - \frac{g(3+h)}{4}\right)^2 + m^2 = \frac{g^2(1+h)^2}{16}$ 时,

曲线在 $t=1$ 处取最大值。

定义 2 以二次 h -Bézier 曲线的控制顶点 P_0 为原点、

$\overrightarrow{P_0P_2}$ 为 x 轴的正方向建立平面直角坐标系, 将圆心为

$\left(\frac{g(1-h)}{4}, 0\right)$, 半径为 $\frac{g(1+h)}{4}$ 的圆 C_1 称为该曲线的曲率左

临界圆, 简称左临界圆。将圆心为 $\left(\frac{g(3+h)}{4}, 0\right)$, 半径为

$\frac{g(1+h)}{4}$ 的圆 C_2 称为该曲线的曲率右临界圆, 简称右临界圆。

定理 3 二次 h -Bézier 曲线 $P(t; h)$ 曲率单调递减的充要

条件为:

$$\left(k - \frac{g(1-h)}{4}\right)^2 + m^2 \leq \frac{g^2(1+h)^2}{16} \tag{10}$$

曲率单调递增的充要条件为:

$$\left(k - \frac{g(3+h)}{4}\right)^2 + m^2 \leq \frac{g^2(1+h)^2}{16} \tag{11}$$

证明: 由命题 1 可得, 二次 h -Bézier 曲线曲率若取得极

值, 则该极值为极大值, 即在极值点的左侧曲率单调递增, 极

值点右侧曲率单调递减。

由命题 1 证明可得中间控制顶点 $P_1(k, m)$ 满足

$$\left(k - \frac{g(1-h)}{4}\right)^2 + m^2 \leq \frac{g^2(1+h)^2}{16}$$

时 $t \leq 0$, 此时曲线曲率在

$t \in [0, 1]$ 上单调递减。 $\left(k - \frac{g(3+h)}{4}\right)^2 + m^2 \leq \frac{g^2(1+h)^2}{16}$ 时

$t \geq 1$, 此时曲线曲率在 $t \in [0, 1]$ 上单调递增。

证毕。

定理 4 二次 h -Bézier 曲线曲率单调递减的几何充要条件为: P_1 位于曲率左临界圆 C_1 内或圆上。曲率单调递增的几何充要条件为: P_1 位于曲率右临界圆 C_2 内或圆上。

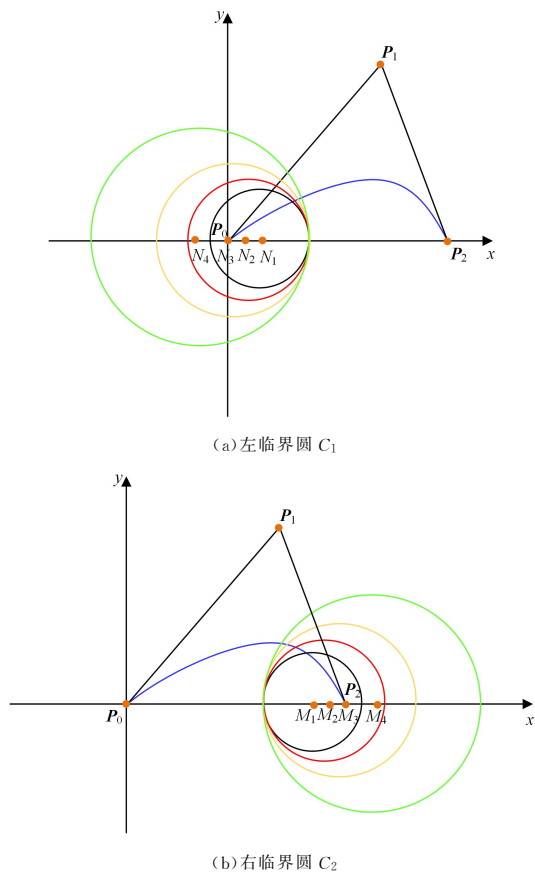


图3 按照从外到内的顺序 h 取值分别为 $h=2, 1, 0.6, 0.2$ 时曲线的一系列左、右临界圆

Fig. 3 Series of left and right critical circles of the curve when $h=2, 1, 0.6, 0.2$ from the outside to the inside respectively

注1:当 $h=0$ 时,二次 h -Bézier 曲线退化为经典的二次 Bézier 曲线,得到二次 Bézier 曲线的左、右临界圆,此时左、右临界圆半径最小为 $\frac{g}{4}$,圆心分别为 $c_0\left(\frac{g}{4}, 0\right), c_1\left(\frac{3g}{4}, 0\right)$ 。

对于首末端点确定的二次 h -Bézier 曲线,曲线中 h 的取值从 0 开始增大,那么曲线左、右临界圆的半径增大,其中左临界圆的圆心向 x 轴负向移动,右临界圆的圆心向 x 轴正向移动。

由定义可知,二次 h -Bézier 曲线的左、右临界圆半径相同且相切,其中左、右两个临界圆的切点为 $\left(\frac{g}{2}, 0\right)$,切线为 $x = \frac{g}{2}$ 。如图 4 所示,圆的形状参数从外到内分别为 $h=2, 1, 0.6, 0.2$ 。

注2:对比二次 h -Bézier 曲线与二次 Phillips q -Bézier 曲线 $q \in [0, 1]$ 的曲率单调条件^[21]。对二次 h -Bézier 曲线曲率来说,曲率单调递减要求 $P_1(k, m)$ 在 $x < \frac{g}{2}$ 的平面内选取,曲率单调递增要求在 $x > \frac{g}{2}$ 的平面内选取。而对二次 Phillips q -Bézier 曲线曲率来说,曲率单调递减要求 $P_1(k, m)$ 满足 $\left(k - \frac{g}{2(1+q)}\right)^2 + m^2 \leq \left(\frac{g^2}{2(1+q)}\right)^2$,则 $P_1(k, m)$ 不可以在 y 轴的左侧选取;曲率单调递增要求 $P_1(k, m)$ 满足

$\left(k - \frac{3g}{2(1+q)}\right)^2 + m^2 \leq \left(\frac{g}{2(1+q)}\right)^2$,则 $P_1(k, m)$ 不能在 $x > \frac{g}{2}$ 的整个平面上任意选取。

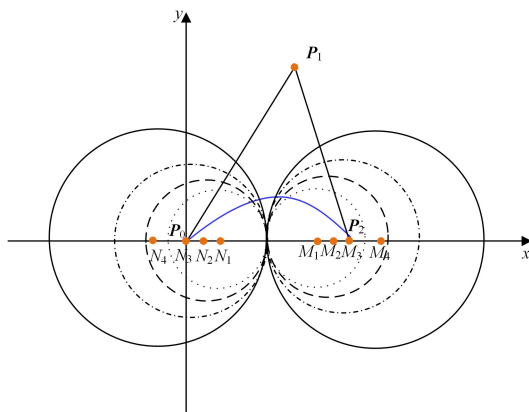


图4 二次 h -Bézier 曲线及左、右临界圆

Fig. 4 Quadratic h -Bézier curves and their left, right critical circles

图 5 给出了由控制顶点 $P_0(0, 0), P_1(3, 4), P_2(4, 0)$ 及 $h=0$ 或 $h=0.6$ 定义的二次 h -Bézier 曲线,并分别用虚线、实线画出 h 取 0 和 0.6 这两个值时,曲线及其极值左、右临界圆的图像。可以看到,相比经典的二次 Bézier 曲线的单调曲率左、右临界圆, $h > 0$ 时的二次 h -Bézier 曲线的单调曲率左、右临界圆范围更大,增大 h 的取值后,与经典的二次 Bézier 曲线相比,构造曲率单调的曲线时,中间控制顶点 $P_1(k, m)$ 可选择的范围更大,并且随着 h 的增大,二次 h -Bézier 曲线越靠近 x 轴;随着 $h \rightarrow 0$,二次 h -Bézier 曲线越靠近经典的二次 Bézier 曲线。

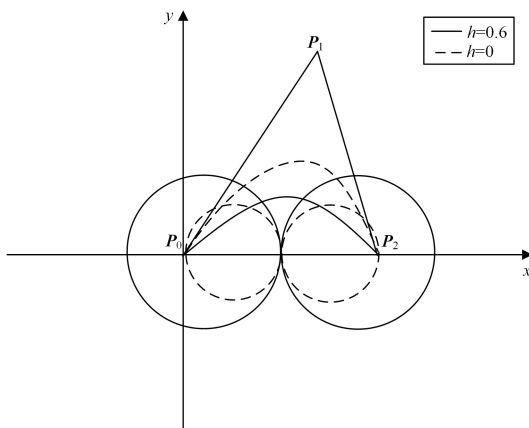


图5 二次 h -Bézier 曲线与经典二次 Bézier 曲线及其左、右临界圆的对比

Fig. 5 Comparison of quadratic h -Bézier curves with classical quadratic Bézier curves and their left and right critical circles

2 构造具有曲率单调的二次 h -Bézier 曲线

根据实际问题,在平面上任意选取两个点,分别作为曲线的首末端点 P_0, P_2 ,并且按照第 1 节的方法建系,则有 $P_0(0, 0), P_1(k, m), P_2(g, 0)$ 。其中 $g > 0, k, m, g$ 都为实数且 $m \neq 0$ 。

2.1 构造曲率单调递减的二次 h -Bézier 曲线

对于二次 h -Bézier 曲线来说,若 $P_1(k, m)$ 位于左临界圆

所能囊括的范围内,通过调节 h 的大小可使该曲线达到曲率单调。由于左临界圆必与直线 $x = \frac{g}{2}$ 相切,若控制定点 $P_1(k, m)$ 在左临界圆 C_1 的范围内,则 $P_1(k, m)$ 首先要满足 $k < \frac{g}{2}, m \neq 0$ 。

其次,曲线曲率单调递减的充要条件为:控制顶点 $P_1(k, m)$ 位于曲线的左临界圆 C_1 中,即:

$$\left(k - \frac{g(1-h^*)}{4}\right)^2 + m^2 \leq \frac{g^2(1+h^*)^2}{16}$$

整理得:

$$h^* \geq \frac{2[2(k^2+m^2)-gk]}{g(g-2k)}$$

综上所述,曲线曲率单调递减的条件为: $k < \frac{g}{2}, m \neq 0$ 且

$$h^* \geq \max\left(0, \frac{2[2(k^2+m^2)-gk]}{g(g-2k)}\right)。$$

构造曲率单调递减的二次 h -Bézier 曲线的具体步骤如下:

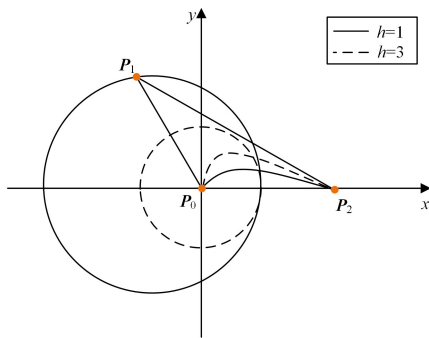
Step 1 在平面上的合适的位置选取两个点 P_0, P_2 , 以这两个点所在直线建立平面直角坐标系, 得到 $P_0(0, 0), P_2(g, 0)$;

Step 2 根据 $k < \frac{g}{2}, m \neq 0$ 选取控制顶点 $P_1(k, m)$;

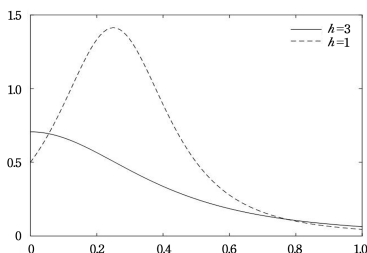
Step 3 在 $h^* \geq \max\left(0, \frac{2[2(k^2+m^2)-gk]}{g(g-2k)}\right)$ 范围中选取任意的 h^* ;

Step 4 由控制顶点 $P_0(0, 0), P_1(k, m), P_2(g, 0)$ 和形状参数 h^* 确定的二次 h -Bézier 曲线曲率单调递减。

例 1 如图 6 所示, 确定两个控制顶点 P_0, P_2 , 建立平面直角坐标系, 记 $P_0(0, 0), P_2(4, 0)$, 选取 $P_1(-2, 4)$, 取 $h=3$, 构造出一条曲率单调递减的二次 h -Bézier 曲线。若取 $h=1$, 则曲线的曲率不单调。



(a) $h=3$ 与 $h=1$ 的二次 h -Bézier 曲线及其左临界圆



(b) 曲率图

图 6 二次 h -Bézier 曲线及其曲率图

Fig. 6 Diagram of quadratic h -Bézier curves and their curvatures

2.2 构造曲率单调递增的二次 h -Bézier 曲线

根据右临界圆与左临界圆关于直线 $x = \frac{g}{2}$ 对称的位置关系可得:若控制定点 $P_1(k, m)$ 在右临界圆 C_2 的范围内,则 $P_1(k, m)$ 首先要满足 $k > \frac{g}{2}, m \neq 0$ 。

其次,控制顶点 $P_1(k, m)$ 位于曲线的右临界圆 C_2 中使得曲线曲率单调递增,即:

$$\left(k - \frac{g(3+h^*)}{4}\right)^2 + m^2 \leq \frac{g^2(1+h^*)^2}{16}$$

整理得:

$$h^* \geq \frac{[4(k^2+m^2)+g(2g-6k)]}{g(2k-g)}$$

综上所述,曲线曲率单调递增的条件为:

$$k > \frac{g}{2}, m \neq 0 \text{ 且 } h^* \geq \max\left(0, \frac{[4(k^2+m^2)+g(2g-6k)]}{g(2k-g)}\right)。$$

构造曲率单调递增的二次 h -Bézier 曲线的步骤如下:

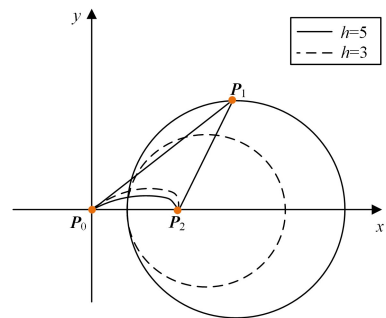
Step 1 在平面上的合适位置选取两个点 P_0, P_2 , 以这两个点所在直线建立平面直角坐标系, 得到 $P_0(0, 0), P_2(g, 0)$;

Step 2 根据 $k > \frac{g}{2}, m \neq 0$ 选取控制顶点 $P_1(k, m)$;

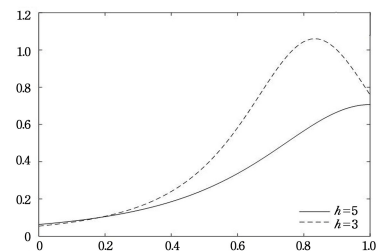
Step 3 在 $h^* \geq \max\left(0, \frac{[4(k^2+m^2)+g(2g-6k)]}{g(2k-g)}\right)$ 范围中选取任意的 h^* ;

Step 4 由控制顶点 $P_0(0, 0), P_1(k, m), P_2(g, 0)$ 和形状参数 h^* 确定的二次 h -Bézier 曲线曲率单调递增。

例 2 如图 7 所示, 确定两个控制顶点 P_0, P_2 , 建立平面直角坐标系, 记 $P_0(0, 0), P_2(4, 0)$, 选取 $P_1(8, 6)$, 取 $h=5$, 构造出一条曲率单调递增的二次 h -Bézier 曲线。若取 $h=3$, 则曲线的曲率不单调。



(a) $h=3$ 与 $h=5$ 的二次 h -Bézier 曲线及其右临界圆



(b) 曲率图

图 7 二次 h -Bézier 曲线及其曲率图

Fig. 7 Diagram of quadratic h -Bézier curves and their curvatures

3 二次 h -Bézier 曲线的光滑拼接

由第 1 节的讨论可知,极值在 $t = \frac{1}{2}$ 处取到时,中间控制顶点在首末端点连线的垂直平分线上,并且二次 h -Bézier 曲线在 $t = \frac{1}{2}$ 处导矢为 $\overrightarrow{P_0P_2}$ 。结合极值与肩点的性质,第二段曲线从肩点处拼接,可以更好地利用该曲线极值的特点来构造曲率单调递减的组合二次 h -Bézier 曲线。

3.1 光滑拼接条件

命题 2 记两条 h -Bézier 曲线分别为 $P(t_1; h_1)$, $t_1 \in [0, 1]$ 和 $Q(t_2; h_2)$, $(t_2 \in [\frac{1}{2}, 1])$, 在连接点处满足几何连续性的充要条件为:

(1) G^0 连续:

$$P(1; h_1) = Q\left(\frac{1}{2}; h_2\right) \quad (12)$$

(2) G^1 连续: 满足 G^0 连续且

$$\overrightarrow{Q_2 - Q_0} = \frac{\alpha}{1+h_1} [h_1(\overrightarrow{P_1 - P_0}) + (2+h_1)(\overrightarrow{P_2 - P_1})] \quad (13)$$

其中, $\alpha > 0$ 。

(3) G^2 连续: 满足 G^1 连续, 且

$$\overrightarrow{Q_1 - Q_0} = \beta(\overrightarrow{P_1 - P_0}) - \gamma(\overrightarrow{Q_2 - Q_0}) \quad (14)$$

其中, η 任取, $\beta = \frac{1+h_2}{2+h_1} \alpha^2$ 。

证明:

(1) 若 $P(t_1; h_1)$ 与 $Q(t_2; h_2)$ 的端点重合, 则两曲线 G^0 连续, 又因为 h -Bézier 曲线的端点插值性得 $P(t_1; h_1)$ 的端点为 P_2 , 所以 $P_2 = Q\left(\frac{1}{2}; h_2\right)$ 。

(2) G^1 连续需 G^0 连续且在连接点处切线方向相同, 即

$$\overrightarrow{Q'}\left(\frac{1}{2}; h_2\right) = \alpha \overrightarrow{P'}(1; h_1), (\alpha > 0)$$

因为

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P'}(1; h_1) &= \frac{1}{1+h_1} [-h_1 \overrightarrow{P_0} - 2 \overrightarrow{P_1} + (2+h_1) \overrightarrow{P_2}] \\ &= \frac{1}{1+h_1} [h_1(\overrightarrow{P_1 - P_0}) + (2+h_1)(\overrightarrow{P_2 - P_1})] \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{Q'}\left(\frac{1}{2}; h_2\right) = \overrightarrow{Q_2 - Q_0}$$

得:

$$\overrightarrow{Q_2 - Q_0} = \frac{\alpha}{1+h_1} [h_1(\overrightarrow{P_1 - P_0}) + (2+h_1)(\overrightarrow{P_2 - P_1})]$$

其中, $\alpha > 0$ 。

(3) G^2 连续需 G^1 连续且满足两条曲线在连接点处具有相同的曲率矢, 则要求在连接点处曲率相同。其中

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P''}(1; h_1) &= \frac{1}{1+h_1} [2 \overrightarrow{P_0} - 4 \overrightarrow{P_1} + 2 \overrightarrow{P_2}] \\ &= \frac{2}{1+h_1} [-(\overrightarrow{P_1 - P_0}) + (\overrightarrow{P_2 - P_1})] \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{Q''}\left(\frac{1}{2}; h_2\right) = \frac{2}{1+h_2} [(\overrightarrow{Q_2 - Q_0}) + 2(\overrightarrow{Q_0 - Q_1})]$$

曲线 $P(t_1; h_1)$ 在末端点处的曲率矢为:

$$\kappa_p(1) = \frac{\overrightarrow{P'}(1; h_1) \times \overrightarrow{P''}(1; h_1)}{|\overrightarrow{P'}(1; h_1)|^3} = \frac{4(\overrightarrow{P_1 - P_0}) \times (\overrightarrow{P_2 - P_1})}{(1+h_1) |\overrightarrow{P'}(1; h_1)|^3}$$

曲线 $Q(t_2; h_2)$ 在初始端点处的曲率矢为:

$$\begin{aligned} \kappa_Q\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\overrightarrow{Q'}\left(\frac{1}{2}; h_2\right) \times \overrightarrow{Q''}\left(\frac{1}{2}; h_2\right)}{|\overrightarrow{Q'}\left(\frac{1}{2}; h_2\right)|^3} \\ &= \frac{4(\overrightarrow{Q_2 - Q_0}) \times (\overrightarrow{Q_0 - Q_1})}{(1+h_2) |\overrightarrow{Q'}\left(\frac{1}{2}; h_2\right)|^3} \end{aligned}$$

曲率相同要求曲率大小和方向相同。

首先考虑曲率的方向相同, 则在连接点处 $\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_1P_2}$ 与 $\overrightarrow{Q_0Q_1} \times \overrightarrow{Q_1Q_2}$ 方向相同, 则 $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ 与 $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ 的顺时针夹角不超过 π 。

由此设

$$\overrightarrow{Q_0 - Q_1} = -\beta(\overrightarrow{P_1 - P_0}) + \gamma(\overrightarrow{Q_2 - Q_0})$$

其中, η 任取, $\beta > 0$ 。

其次考虑曲率的大小相同, 即 $|\kappa_p(1)| = \left| \kappa_Q\left(\frac{1}{2}\right) \right|$, 结

合 G^1 连续条件可以得到 $\beta = \frac{1+h_2}{2+h_1} \alpha^2$ 。

证毕。

3.2 G^2 拼接条件中 α, γ, h_2 对拼接曲线的影响

(1) α 的影响

在 G^2 拼接条件下, 固定 $P(t_1; h_1)$ 的取值, 随着 $P(t_1; h_1)$ 增大, $\overrightarrow{Q_0Q_2}$ 的长度增加, 但方向始终保持不变, 方向为 $h_1 \overrightarrow{P_0P_1} + (2+h_1) \overrightarrow{P_1P_2}$ 。通过式(13)和式(14)整理可以得到, 随着 α 的增大, $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ 与 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 之间的夹角变小。

图 8 给出了 $\eta = 0.5, h_2 = 2$ 时, 拼接曲线的控制顶点 $Q_k^{(i)}$ 随 α 取值改变的变化情况。

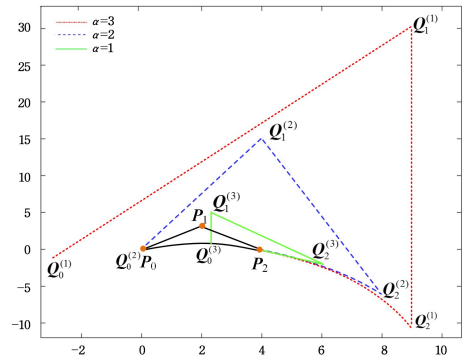


图 8 $Q(t_2; h_2)$ 控制顶点 α 随 $P(t_1; h_1)$ 取值改变的变化情况
Fig. 8 Control vertex $Q_k^{(i)}$ of the curve $Q(t_2; h_2)$ varies with α

(2) η 的影响

固定 h_2, α , 随着 η 的增大, $\overrightarrow{Q_0Q_2}$ 的大小和方向不发生改变, $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ 增大且 $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ 与 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 的夹角增大。

$\overrightarrow{Q_0Q_1}$ 过一固定点 Q_1^{\downarrow} , $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ 过一固定点 Q_1^{\uparrow} 。

其中

$$Q_1^{\downarrow} = P_2 - \frac{(1+2h_2)\alpha}{4(1+h_2)(1+h_1)} (-h_1(\overrightarrow{P_0 - P_1}) + (2+h_1)(\overrightarrow{P_2 - P_1}))$$

$$Q_1^{\uparrow} = P_2 + \frac{(1+2h_2)\alpha}{4(1+h_2)(1+h_1)} (-h_1(\overrightarrow{P_0 - P_1}) + (2+h_1)(\overrightarrow{P_2 - P_1}))$$

证明: 固定 h_2, α , 则

$$Q\left(\frac{1}{2}; h_2\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1+2h_2}{2(1+h_2)} \overrightarrow{Q_0} + \frac{1}{2(1+h_2)} \overrightarrow{Q_1} \right] +$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2(1+h_2)} \mathbf{Q}_1 + \frac{1+2h_2}{2(1+h_2)} \mathbf{Q}_2 \right]$$

设

$$\mathbf{Q}_1^i = \frac{1+2h_2}{2(1+h_2)} \mathbf{Q}_0 + \frac{1}{2(1+h_2)} \mathbf{Q}_1$$

$$\mathbf{Q}_2^i = \frac{1}{2(1+h_2)} \mathbf{Q}_1 + \frac{1+2h_2}{2(1+h_2)} \mathbf{Q}_2$$

则 $\mathbf{Q}(\frac{1}{2}; h_2)$ 是 $\mathbf{Q}_1^i \mathbf{Q}_2^i$ 的中点, 其中 $\overrightarrow{\mathbf{Q}_1^i \mathbf{Q}_2^i} = \frac{1+2h_2}{2(1+h_2)} \overrightarrow{\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_2}$ 。

h_2 不变则 $\overrightarrow{\mathbf{Q}_1^i \mathbf{Q}_2^i}$ 的方向确定、大小确定且中点为 $\mathbf{Q}(\frac{1}{2}; h_2)$, 则 $\overrightarrow{\mathbf{Q}_1^i \mathbf{Q}_2^i}$ 线段确定, 则 \mathbf{Q}_1^i 与 \mathbf{Q}_2^i 的位置固定。

设 $\mathbf{P}_0(x_0, y_0), \mathbf{P}_1(x_1, y_1), \mathbf{P}_2(x_2, y_2), \mathbf{Q}_1^i(a_1, b_1) \mathbf{Q}_2^i(a_2, b_2)$, 则 $\overrightarrow{\mathbf{Q}_1^i \mathbf{Q}_2^i} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1), \overrightarrow{\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_2} = (\frac{\alpha}{1+h_1}(-h_1x_0 - 2x_1 + (2+h_1)x_2), \frac{\alpha}{1+h_1}(-h_1y_0 - 2y_1 + (2+h_1)y_2))$ 得:

$$\begin{cases} a_2 - a_1 = \frac{\alpha(1+2h_2)}{2(1+h_1)(1+h_2)} \\ \quad (-h_1x_0 - 2x_1 + (2+h_1)x_2) \\ a_1 + a_2 = 2x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_2 - b_1 = \frac{\alpha(1+2h_2)}{2(1+h_1)(1+h_2)} \\ \quad (-h_1y_0 - 2y_1 + (2+h_1)y_2) \\ b_1 + b_2 = 2y_2 \end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases} a_1 = x_2 - \frac{\alpha(1+2h_2)}{4(1+h_1)(1+h_2)}(-h_1x_0 - 2x_1 + (2+h_1)x_2) \\ a_2 = x_2 + \frac{\alpha(1+2h_2)}{4(1+h_1)(1+h_2)}(-h_1x_0 - 2x_1 + (2+h_1)x_2) \\ b_1 = y_2 - \frac{\alpha(1+2h_2)}{4(1+h_1)(1+h_2)}(-h_1y_0 - 2y_1 + (2+h_1)y_2) \\ b_2 = y_2 + \frac{\alpha(1+2h_2)}{4(1+h_1)(1+h_2)}(-h_1y_0 - 2y_1 + (2+h_1)y_2) \end{cases}$$

整理得:

$$\mathbf{Q}_1^i = \mathbf{P}_2 - \frac{(1+2h_2)\alpha}{4(1+h_2)(1+h_1)}(-h_1 \mathbf{P}_0 - 2 \mathbf{P}_1 + (2+h_1) \mathbf{P}_2)$$

$$\mathbf{Q}_2^i = \mathbf{P}_2 + \frac{(1+2h_2)\alpha}{4(1+h_2)(1+h_1)}(-h_1 \mathbf{P}_0 - 2 \mathbf{P}_1 + (2+h_1) \mathbf{P}_2)$$

证毕。

图 9 给出了 $\alpha=1, h_2=2$ 时, 拼接曲线的控制顶点 $\mathbf{Q}_k^{(i)}$ 随 η 取值改变的变化情况。

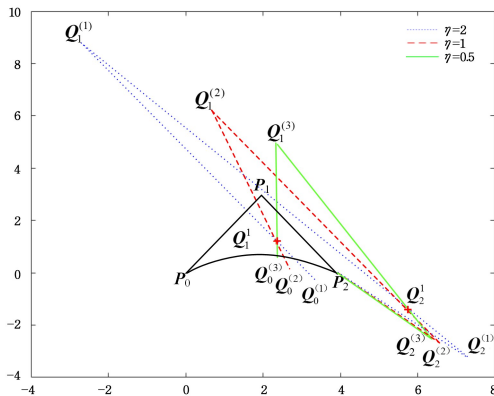


图 9 $\mathbf{Q}(t_2; h_2)$ 控制顶点 $\mathbf{Q}_k^{(i)}$ 随 η 取值改变的变化情况

Fig. 9 Control vertex $\mathbf{Q}_k^{(i)}$ of the curve $\mathbf{Q}(t_2; h_2)$ varies with η

(3) h_2 的影响

固定 η, α , 随着 h_2 的增大, $\overrightarrow{\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_2}$ 的大小和方向不发生改变。因为随着 h_2 增大, β 增大, 所以 $\overrightarrow{\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1}$ 增大且与 $\overrightarrow{\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1}$ 的夹角减小。

图 10 给出了 $\eta=0.5, \alpha=2$ 时, 拼接曲线的控制顶点 $\mathbf{Q}_k^{(i)}$ 随 h_2 取值改变的变化情况。

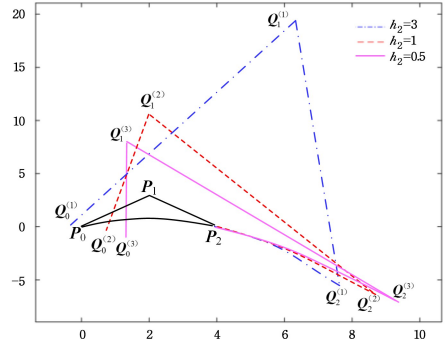


图 10 $\mathbf{Q}(t_2; h_2)$ 控制顶点 $\mathbf{Q}_k^{(i)}$ 随 h_2 取值改变的变化情况

Fig. 10 Control vertex $\mathbf{Q}_k^{(i)}$ of the curve $\mathbf{Q}(t_2; h_2)$ varies with h_2

4 构造具有单调曲率的组合二次 h -Bézier 曲线

对于一条具有单调递减曲率的二次 h -Bézier 曲线 $\mathbf{P}(t_1; h_1)$, 若找到一条二次 h -Bézier 曲线 $\mathbf{Q}(t_2; h_2)$ 与其在连接点处 $\mathbf{Q}(t_2; h_2)$ 连续, 并且曲线 $\mathbf{Q}(t_2; h_2)$ 曲率单调, 那么一条具有单调的曲率的组合二次 h -Bézier 曲线就被构造出来了。

4.1 构造具有单调递减曲率的组合二次 h -Bézier 曲线

定理 5 $\mathbf{Q}(t_2; h_2)$ 的 3 个控制顶点满足式(12)一式(14), 则 $\mathbf{Q}(t_2; h_2)$ 与 $\mathbf{P}(t_1; h_1) G^2$ 拼接而成的组合曲线曲率单调递减的条件为:

$$\eta \geq$$

$$\frac{\gamma(\beta - \alpha\gamma) |\overrightarrow{\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1}|^2 - \alpha(1 - \gamma)^2 |\overrightarrow{\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2}|^2 + (1 - \gamma)(\beta - 2\alpha\gamma) \overrightarrow{\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2}}{2\alpha(\gamma^2 |\overrightarrow{\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1}|^2 + (1 - \gamma)^2 |\overrightarrow{\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2}|^2 + 2\gamma(1 - \gamma) \overrightarrow{\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2})}$$

且 $h_1 > 0, t_1 \in [0, 1], \alpha > 0, h_2 > 0, t_2 \in [\frac{1}{2}, 1], \beta = \frac{1+h_2}{2+h_1} \alpha^2$ 。

其中 $\gamma = \frac{h_1}{2(1+h_1)}$ 。

证明: 由命题 1 可知二次 h -Bézier 曲线曲率只有一个极值且为极大值, 则当 $\mathbf{Q}(t_2; h_2)$ 曲线 $t \in [0, 1]$ 曲率极值在 $t \in [0, \frac{1}{2}]$ 处取到极值时, $\mathbf{Q}(t_2; h_2) t_2 \in [\frac{1}{2}, 1]$ 曲线在其定义域内曲线曲率单调递减。

若二次 h -Bézier 曲线曲率在 $[0, \frac{1}{2}]$ 处取得极值, 根据定理 2, 需要满足 \mathbf{Q}_1 在 $\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_2$ 中线上或者其右侧。设 $\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_2$ 的中点为 \mathbf{O} , 则 $\overrightarrow{\mathbf{OQ}_0} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_2}$, 根据几何条件可以得到若 $\overrightarrow{\mathbf{OQ}_1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OQ}_0} \geq 0$, 则 \mathbf{Q}_1 在 $\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_2$ 中线上或者其左侧。

$$\text{因为 } \overrightarrow{\mathbf{OQ}_1} = \overrightarrow{\mathbf{OQ}_0} + \overrightarrow{\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1}$$

得

$$\overrightarrow{\mathbf{OQ}_1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OQ}_0} = |\overrightarrow{\mathbf{OQ}_0}|^2 + \overrightarrow{\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OQ}_0}$$

由式(14)可知 $\overrightarrow{\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1} = \beta \overrightarrow{\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1} - \eta \overrightarrow{\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_2}$ ($\beta = \frac{1+h_2}{2+h_1} \alpha^2$), 因此

$$\overrightarrow{\mathbf{OQ}_1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OQ}_0} \geq 0 \text{ 转化为 } \frac{1+2\eta}{4} |\overrightarrow{\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_2}|^2 - \alpha\beta[\gamma |\overrightarrow{\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1}|^2 + (1 - \gamma)$$

$\vec{P}_0\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_1\vec{P}_2] \geq 0$, 其中 $\gamma = \frac{h_1}{2(1+h_1)}$.

由式(13)得到:

$$\vec{Q}_0\vec{Q}_2 = \frac{\alpha}{1+h_1} [h_1 \vec{P}_0\vec{P}_1 + (2+h_1) \vec{P}_1\vec{P}_2] (\alpha > 0)$$

整理得:

$\eta \geq$

$$\frac{\gamma(\beta-\alpha\gamma) |\vec{P}_0\vec{P}_1|^2 - \alpha(1-\gamma)^2 |\vec{P}_1\vec{P}_2|^2 + (1-\gamma)(\beta-2\alpha\gamma) \vec{P}_0\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_1\vec{P}_2}{2\alpha(\gamma^2 |\vec{P}_0\vec{P}_1|^2 + (1-\gamma)^2 |\vec{P}_1\vec{P}_2|^2 + 2\gamma(1-\gamma) \vec{P}_0\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_1\vec{P}_2)}$$

证毕。

例3 给定一条具有单调曲率的二次 h -Bézier 曲线 $P(t_1; h_1)$, 其控制顶点分别为: $P_0(0, 0), P_1(-2, 4), P_2(4, 0)$. 参数 $h_1=3, h_2=4$, 取参数 $\alpha=0.8$, 根据定理5可以得到 $\eta \geq -\frac{9}{10}$,

取 $\eta=1$ 构造一条与其 G^2 连续并且具有单调曲率的拼接曲线

$Q(t_2; h_2)$, 得到曲线的控制顶点为 $Q_0\left(\frac{306}{125}, \frac{38}{125}\right)$,

$Q_1\left(-\frac{454}{125}, \frac{558}{125}\right), Q_2\left(\frac{906}{125}, -\frac{162}{125}\right)$.

两条曲线组合成一条曲率单调的曲线。如图11所示, 实线的圆为初始曲线 $P(t_1; h_1)$ 的左临界圆, 虚直线为拼接曲线 $Q(t_2; h_2)$ 中 Q_0Q_2 的垂直平分线, O 点为 Q_0Q_2 的中点, 若 Q_1 位于 Q_0Q_2 的垂直平分线的左侧, 则组合曲线曲率为单调递减。

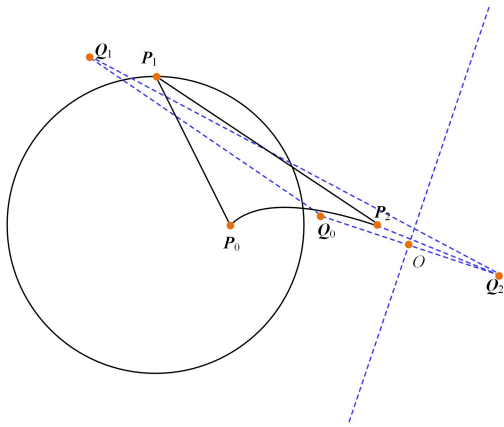


图11 曲率单调递减的组合二次 h -Bézier 曲线

Fig. 11 Combinatorial quadratic h -Bézier curves with decreasing curvature

4.2 构造具有单调递增曲率的组合二次 h -Bézier 曲线

定理6 $Q(t_2; h_2)$ 的3个控制顶点满足式(12)一式(14),

则 $Q(t_2; h_2)$ 与 $P(t_1; h_1)$ G^2 拼接而成的组合曲线曲率单调递增

的条件为: $|\vec{Q}_0\vec{Q}_2|^2 \eta^2 + \left(\frac{3+h_2}{2} |\vec{Q}_0\vec{Q}_2|^2 - 2\beta \vec{P}_0\vec{P}_1 \cdot \vec{Q}_0\vec{Q}_2\right) \eta +$

$A \leq 0$ 且 $h_1 > 0, t_1 \in [0, 1], \alpha > 0, h_2 > 0, t_2 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \beta =$

$\frac{1+h_2}{2+h_1} \alpha^2$.

其中,

$$A = \beta^2 |\vec{P}_0\vec{P}_1|^2 + \frac{2+h_2}{4} |\vec{Q}_0\vec{Q}_2|^2 + \frac{(3+h_2)\beta}{2} \vec{P}_0\vec{P}_1 \cdot \vec{Q}_0\vec{Q}_2$$

证明: 由曲率单调充要条件可以得到, 若 Q_1 在该曲线右临界圆上或圆内曲线曲率单调递增, 设右临界圆圆心为 Ω , Q_0Q_2 的中点为 O , 半径为 $|\vec{\Omega O}|$, 要保证 Q_1 在右临界圆内,

需要满足 $|\vec{\Omega Q}_1| \leq |\vec{\Omega O}|$.

因为 $|\vec{\Omega O}| = \frac{1+h_2}{4} |\vec{Q}_0\vec{Q}_2|$, 则根据切点在右临界圆的

左侧, 可以得到 $\vec{\Omega O} = -\frac{1+h_2}{4} \vec{Q}_0\vec{Q}_2$.

得:

$$\vec{\Omega} = \frac{3+h_2}{4} |\vec{Q}_0\vec{Q}_2| \leq |\vec{\Omega O}| + \frac{1-h_2}{4} \vec{Q}_0\vec{Q}_2 = \vec{\Omega O} + \vec{OQ}_1$$

则 $|\vec{\Omega Q}_1| \leq |\vec{\Omega O}| \leq 0$ 转化为 $|\vec{Q}_1\vec{O}|^2 + 2\vec{Q}_1\vec{O} \cdot \vec{OQ}_1 \leq 0$

其中,

$$\vec{OQ}_1 = \vec{Q}_0\vec{Q}_1 - \frac{1}{2} \vec{Q}_0\vec{Q}_2$$

$$2\vec{OQ}_1 \cdot \vec{OQ}_1 = \frac{1+h_2}{2} \vec{Q}_0\vec{Q}_1 \cdot \vec{Q}_0\vec{Q}_2 + \frac{1+h_2}{4} |\vec{Q}_0\vec{Q}_2|^2$$

联立式(13)和式(14)得:

$$|\vec{Q}_0\vec{Q}_2|^2 \eta^2 + \left(\frac{3+h_2}{2} |\vec{Q}_0\vec{Q}_2|^2 - 2\beta \vec{P}_0\vec{P}_1 \cdot \vec{Q}_0\vec{Q}_2\right) \eta +$$

$$\beta^2 |\vec{P}_0\vec{P}_1|^2 + \frac{2+h_2}{4} |\vec{Q}_0\vec{Q}_2|^2 + \frac{2+h_2}{4} |\vec{Q}_0\vec{Q}_2|^2 +$$

$$\frac{(3+h_2)\beta}{3} \vec{P}_0\vec{P}_1 \cdot \vec{Q}_0\vec{Q}_2 \leq 0$$

证毕。

例4 给定一条具有单调曲率的二次 h -Bézier 曲线 $P(t_1; h_1)$, 其控制顶点分别为: $P_0(0, 0), P_1(8, 6), P_2(4, 0)$. 参数

$h_1=5, h_2=3$, 取参数 $\alpha=0.4$, 当 $-\frac{139}{70} \leq \eta \leq -\frac{11}{14}$ 时可构造一条与其 G^2 连续并且具有单调曲率的拼接曲线 $Q(t_2; h_2)$,

取 $\eta = -1.5$ 得到控制顶点为 $Q_0\left(\frac{1193}{350}, \frac{151}{350}\right), Q_1$

$\left(\frac{267}{50}, -\frac{11}{50}\right), Q_2\left(\frac{1473}{350}, -\frac{129}{350}\right)$ 的拼接曲线 $Q(t_2; h_2)$, 两条

曲线组合, 就是一条曲率单调的曲线。如图12所示, 虚线圆为 $Q(t_2; h_2)$ 的右临界圆, 实线圆为 $P(t_1; h_1)$ 的右临界圆。

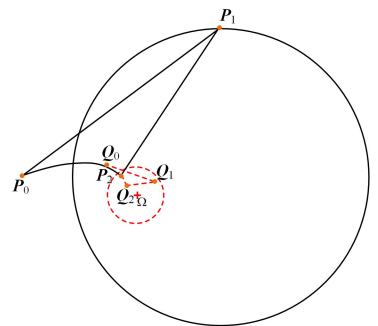


图12 曲率单调递增的组合二次 h -Bézier 曲线

Fig. 12 Combinatorial quadratic h -Bézier curves with increasing curvature

结束语 本文研究了二次 h -Bézier 曲线的曲率极值, 得到了二次 h -Bézier 曲线首末端点固定的条件下极值在定义域内存在的充要条件以及曲率单调的充要条件, 并对曲率单调充要条件加以几何解释, 得到当中间控制点在该曲线的极值临界圆中时, 该曲线曲率单调。其中曲率临界圆的位置以及大小可以通过调节参数 h 改变。当 $P_1(k, m)$ 时, 该曲线退化为经典二次 Bézier 曲线, 二次 h -Bézier 曲线曲率的单调条件退化为经典二次 Bézier 曲线曲率单调的充要条件^[15]。并

根据曲率单调的充要条件构造了具有曲率单调的二次 h -Bézier 曲线。

文中给出了二次 h -Bézier 曲线在肩点处的 G^2 光滑拼接, 并分别构造出曲率单调递增、递减的组合二次 h -Bézier 曲线。对于高次的 h -Bézier 曲线曲率单调的充要条件以及研究其性质是否可以光滑拼接是今后值得探讨的问题。由于 h -Bézier 曲线首末端点处不与控制多边形相切, 缓和曲线的构造还需进一步研究。

对比已有的二次 Phillips q -Bézier 曲线曲率条件^[21], 结合形状参数 q 和 h 的选择, 可以调整形状参数的大小使得二次 Phillips q -Bézier 曲线与二次 h -Bézier 曲线曲率单调, 而构造二次 h -Bézier 曲线曲率单调时 $P_1(k, m)$ 的位置可取更广的范围。进一步, 二次 h -Bézier 曲线的光滑拼接可以构造出曲率单调递增的组合二次 h -Bézier 曲线, 而二次 Phillips q -Bézier 曲线右临界圆没有公切点, 因此构造具有单调曲率递增的组合曲线较难。在此基础上我们可以继续探讨二次 (q, h) -Bézier 曲线曲率单调的充要条件以及光滑拼接。

参 考 文 献

- [1] STANCU D. Approximation of functions by a new class of linear Polynomial operators[J]. *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1968, 13: 1173-1194.
- [2] GOLDMAN R. Pólya's urn model and computer aided geometric design[J]. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 1985, 6(1): 1-28.
- [3] GOLDMAN R. Urn models, approximations, and splines[J]. *Journal of Approximation Theory*, 1988, 54(1): 1-66.
- [4] SIMEONOV P, ZAFIRIS V, GOLDMAN R. h -Blossoming: a new approach to algorithms and identities for h -Bernstein bases and h -Bézier curves *Computer Aided Geometric Design*, 2011, 28(9): 549-565.
- [5] SUN Y H, HAN L W. The rational h -Bézier curve and its representation of conic section [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2019, 31(9): 1581-1590.
- [6] MARCO A, MARTINEA J J, VIAA R. Accurate bidiagonal decomposition of totally positive h -Bernstein-Vandermonde matrices and applications [J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2019, 579: 320-335.
- [7] PHILLIPS G M. A de Casteljau algorithm for generalized Bernstein polynomials[J]. *Bit Numerical Mathematics*, 1996, 36(1): 232-236.
- [8] ORUÇ H. Generalized Bernstein polynomials and total positivity [D]. Scotland; University of St. Andrews, 1998.
- [9] ORUÇ H, PHILLIPS G M. q -Bernstein polynomials and Bézier curves[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2003, 151(1): 1-12.
- [10] DISIBUYUK C, ORUÇ H. A generalized of rational Bernstein Bézier curves [J]. *BIT Numerical Mathematics*, 2007, 47: 313-323.
- [11] SIMEONOV P, ZAFIRIS V, GOLDMAN R. q -Blossoming: A new approach to algorithms and identities for q -Bernstein bases and q -Bézier curves [J]. *Journal of Approximation Theory*, 2012, 164: 77-104.
- [12] NOWAK G. Approximation properties for generalized q -Bernstein polynomials[J]. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 2009, 350(1): 50-55.
- [13] SIMEONOV P, GOLDMAN R. Quantum Bernstein bases and quantum Bezier curves[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, 288: 284-303.
- [14] SIMEONOV P, GOLDMAN R. Two essential properties of (q, h) -Bernstein Bezier curves[J]. *Applied Numerical Mathematics; Transactions of IMACS*, 2015, 96: 82-93.
- [15] BAASS K G. The Use of Clothoid Templates in Highway Design [J]. *Transportation Forum*, 1984, 1(1): 47-52.
- [16] YANG X X, ZHOU W W, ZHANG Y. A re-planning path correction method for collision avoidance based on PH spiral [J]. *Flight Dynamics*, 2016, 34(5): 86-90.
- [17] SAPIDIS N S, FREY W H. Controlling the curvature of a quadratic Bézier curve [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1992, 9(2): 85-91.
- [18] FREY W H, FIELD D A. Designing Bézier conic segments with monotone curvature [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2000, 17(6): 457-483.
- [19] CAI H H, LIU B X, CHENG Y. Transition Curve between Parallel Lines Based on Bézier Curve [J]. *Journal of Graphics*, 2015, 36(3): 363-366.
- [20] AHMAD A, GOBITHAASAN R U. Rational Quadratic Bézier Spirals [J]. *Sains Malaysiana*, 2018, 47(9): 2205-2211.
- [21] WANG A Z, ZHAO G, HOU F. Constructing Bézier curves with monotone curvature [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2019, 355: 1-10.
- [22] HE C, ZHAO G, WANG A Z, et al. Typical curve with G1 constraints for curve completion [J]. *Visual Computing for Industry, Biomedicine, and Art*, 2021, 4(1): 4-28.
- [23] LIANG J N, XIE B, HAN L W. Combinatorial quadratic Phillips q -Bézier curves with monotone curvature [J]. *Journal of Graphics*, 2022, 43(3): 443-452.
- [24] HAN L W, CHU Y, QIU Z Y. Generalized Bézier curves and surfaces based on Lupaş q -analogue of Bernstein operator [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2014, 261: 318-329.



LI Lin, born in 1999, postgraduate. Her main research interest is computer aided geometric design.



HAN Liwen, born in 1974, Ph.D, professor. Her main research interests include computer aided geometric design and computer geometry.