

## 基于张量加权与截断核范数的交通数据修复方法

武江南, 张红梅, 赵永梅, 曾航, 胡钢

引用本文

武江南, 张红梅, 赵永梅, 曾航, 胡钢 [基于张量加权与截断核范数的交通数据修复方法](#)[J]. 计算机科学, 2023, 50(8): 45-51.

WU Jiangnan, ZHANG Hongmei, ZHAO Yongmei, ZENG Hang, HU Gang. [Traffic Data Restoration Method Based on Tensor Weighting and Truncated Nuclear Norm](#) [J]. Computer Science, 2023, 50(8): 45-51.

---

## 相似文献推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

### Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

#### [深度强化学习驱动的智能交通信号控制策略综述](#)

Review of Intelligent Traffic Signal Control Strategies Driven by Deep Reinforcement Learning  
计算机科学, 2023, 50(4): 159-171. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.220500261>

#### [一种基于改进图波网的双重自回归分量交通预测模型](#)

Dual Autoregressive Components Traffic Prediction Based on Improved Graph WaveNet  
计算机科学, 2021, 48(11A): 159-165. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.201200051>

#### [基于深度学习的无人机航拍车流量监测](#)

Vehicle Flow Measuring of UVA Based on Deep Learning  
计算机科学, 2021, 48(6A): 275-280. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.200900149>

#### [自然交通场景中的车辆颜色识别](#)

Vehicle Color Recognition in Natural Traffic Scene  
计算机科学, 2021, 48(6A): 15-20. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.200800078>

#### [分布式存储系统中的预测式纠删码研究](#)

Study on Predictive Erasure Codes in Distributed Storage System  
计算机科学, 2021, 48(5): 130-139. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.200300124>

# 基于张量加权与截断核范数的交通数据修复方法

武江南 张红梅 赵永梅 曾航 胡钢

空军工程大学装备管理与无人机工程学院 西安 710051

(289258346@qq.com)

**摘要** 数据缺失问题严重影响了智能交通系统中通过数据监控交通态势、预测交通流量、部署交通规划等一系列活动。为此,运用基于张量奇异值分解的低秩张量补全框架提出了加权与截断核范数相结合的交通流数据重构模型 WLRTC-TTNN (Low Rank Tensor Completion of Weighted and Truncated Nuclear Norm),该模型可以有效地对缺失的时空交通数据进行修复。WLRTC-TTNN 方法主要有两方面的优点:一是加入权重因子解决了原始模型对数据输入方向的依赖问题,实现了模型方向的灵活性;二是运用张量的截断核范数来代替张量的核范数作为张量秩最小化的凸代理,保留了时空交通数据内部主要的特征信息,且根据广义奇异值阈值理论,对较小奇异值进行惩罚处理,进一步优化了模型,最终使用交替乘子法实现了 WLRTC-TTNN 算法。在两个公开的时空交通数据集上选取不同的缺失场景与缺失率进行实验,结果表明:WLRTC-TTNN 的补全性能优于其他基线模型,整体的补全精度提高了 3%~37%,在数据极端缺失的情况下,其补全效果更加稳定。

**关键词:** 智能交通;数据修复;张量加权;截断核范数;交替乘子法

**中图法分类号** TP274.2

## Traffic Data Restoration Method Based on Tensor Weighting and Truncated Nuclear Norm

WU Jiangnan, ZHANG Hongmei, ZHAO Yongmei, ZENG Hang and HU Gang

College of Equipment Management and Unmanned Aerial Vehicle Engineering, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China

**Abstract** The problem of missing data seriously affects a series of activities in intelligent transportation systems, such as monitoring traffic dynamics, predicting traffic flow, and deploying traffic planning through data. Therefore, a traffic flow data reconstruction model WLRTC-TTNN (low rank tensor completion of weighted and truncated nuclear norm) combined with weighted and truncated nuclear norm is proposed by using the low-rank tensor completion framework based on tensor singular value decomposition, which can effectively repair the missing spatio-temporal traffic data. The truncated nuclear norm of the tensor is used as a convex proxy for tensor rank minimization instead of tensor rank minimization, which preserves the main feature information inside the spatio-temporal traffic data, and further optimizes the model by penalizing smaller singular values according to the generalized singular value threshold theory, and finally the WLRTC-TTNN algorithm is implemented using the alternating multiplier method. Experiments are conducted on two publicly available spatio-temporal traffic datasets selected with different missing scenarios and missing rates, and the results show that the complementary performance of WLRTC-TTNN is better than that of other baseline models, and the overall complementary accuracy improves by 3%~37%, and the complementary effect is more stable in extreme missing scenarios.

**Keywords** Intelligent transportation, Data repair, Tensor weighting, Truncated kernel norm, Alternating multiplier method

## 1 引言

随着传感器技术、计算机技术与信息技术的不断快速发展,智能交通系统(Intelligent Transport System, ITS)被广泛运用于道路交通的管理和控制。作为 ITS 的重要组成部分,交通信息采集系统通过大量的道路传感器、线圈检测器、摄像头、运行车辆等各种来源来获取全面、丰富、实时的时空交通信息,并组成多模式的城市交通数据集。

阻碍这种时空数据使用的一个常见问题是“数据缺失<sup>[1]</sup>”,这可能是由各种因素造成的,如硬件/软件、网络通信故障等。数据的缺失问题在智能交通信息系统中非常普遍。然而,完整的时空交通信息是路线规划和预测任务的必要输入。且在实际应用中,所用到的数据应具有高空间性和时间完整性,才能达到交通管理、预测<sup>[2-3]</sup>和路线引导等目的。

因此,对时空交通数据的修复是必要的,尽管国内外学者提出了许多预处理方案,并取得了一定的成果,但现有的研究

到稿日期:2022-12-27 返修日期:2023-01-30

基金项目:国家自然科学基金(62002381)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(62002381).

通信作者:张红梅(zhm\_plum@163.com)

仍面临着两个问题:一是如何对缺失数据进行快速、高精度的恢复,并且普适于多数的交通流数据中;二是为缺失数据的修复任务确定最合适的数据建模方式。针对上述问题,本文提出了一种基于张量加权与截断核范数相结合的交通流数据修复模型(WLRTC-TTNN)。

与传统数据修复方法不同的是,WLRTC-TTNN模型选择运用张量模式来对数据进行建模,然后通过外部加权的方式获取每个切面的相关性信息,减小了在张量模式下由数据输入方向所带来的依赖性影响;为了取得更好的秩函数逼近和数据恢复效果,利用张量截断核范数的方式来代替张量核范数作为张量秩最小化问题更紧密的凸包络。与原始模型相比,WLRTC-TTNN模型通过外部加权与截断两种方式压缩了足够多的相关性信息,能够获得更高的精度优势与鲁棒性效果。

## 2 相关工作

实际上,关于智能交通系统中数据缺失问题的补全研究已有大量的文献,并且现有的研究侧重于将时空交通数据构建为矩阵或者张量。基于矩阵的修复方法有:Yu等<sup>[4]</sup>提出的高精度时间正则化矩阵补全模型(Temporal Regularized Matrix Factorization, TRMF),Chen等<sup>[5]</sup>提出的局部低秩矩阵补全集成学习模型(Local LRMC with Ensemble Learning, LLRMC-EN),Sun等<sup>[6]</sup>提出的贝叶斯时间因子矩阵分解模型(Bayesian Temporal Matrix Factorization, BTMF),Chen等<sup>[7]</sup>提出的图正则化和 Schatten-p 范数的矩阵修复模型(Graph regularization and Schatten-p norm, SPGR)模型。考虑到强时空相关性可能会对补全结果产生影响,张量是捕捉多维结构依赖的标准技术,使用紧凑的结构对原始的多维数据进行建模。Tan等<sup>[8]</sup>首次将张量模式引入时空交通数据的补全中,之后基于张量的补全方法在交通数据领域开始被应用。基于张量的修复方法有很多,Liu等<sup>[9]</sup>提出了第一种基于多重TNN(Tensor Nuclear Norm)的低秩张量补全(Low Rank Tensor Completion, LRTC)框架,并使用交替方向乘子法(Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM)的方式进行求解,提出了经典的HaLRTC模型(High accuracy Low Rank Tensor Completion);Chen等<sup>[10-12]</sup>在此基础上对HaLRTC模型进行了优化,提出了LRTC-TNN(Low Rank Tensor Completion model based on Truncated Nuclear Norm)、LSTC-Tubal(Low-Tubal-Rank Smoothing Tensor Completion)、LATC(Low-rank Autoregressive Tensor Completion)模型等,其在真实时空交通数据集上进行实验,获得了很好的效果。Zhang等<sup>[13]</sup>运用张量平均秩的概念,提出了第二种基于张量奇异值分解(Singular Value Decomposition of Tensors, T-SVD)的LRTC框架,它将张量模式的数据转到变换域中进行求解,不需要再将张量展开从而遗失了多维通道的时空相关性信息,随后,Liu等<sup>[14]</sup>运用p-shrinkage的方式对张量的迹范数进行收缩并代替了原始的张量迹范数,提出了LRTC-pTNN(Tensor p-shrinkage Nuclear Norm for Low-Rank Tensor Completion)模型,且证明了p-shrinkage范数比张量的迹范数更为紧致。

然而,现有的两种LRTC框架仍存在以下问题:1)基于多重TNN的LRTC框架在对数据进行恢复时需要将张量展开为多重矩阵加权的方式进行补全计算,可能会破坏张量的模态相关性从而导致补全精度下降,与使用张量进行数据建模的思想相悖;2)基于T-SVD的LRTC框架对数据的输入方向有很强的依赖性。为了解决上述问题,本文提出运用基于T-SVD的LRTC框架进行建模,综合第一种框架的加权思想,提取每个方向的相关性信息,并引入张量截断核范数的方式保留内部的强相关信息。

## 3 问题描述与符号表示

### 3.1 问题描述

将收集到的交通流数据(链路/传感器、日期、时间窗口)表示为三阶张量的形式 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ ,其中 $n_1$ 表示链路/传感器的个数, $n_2$ 为所收集的天数, $n_3$ 为单个链路/传感器一天内收集到的数据个数,并且用 $\mathcal{P}_\Omega(\cdot)$ 与 $\mathcal{P}_{\bar{\Omega}}(\cdot)$ 分别表示观测数据的下标集合和缺失元素的下标集合。运用张量模式来构建的时空交通数据,如图1所示。

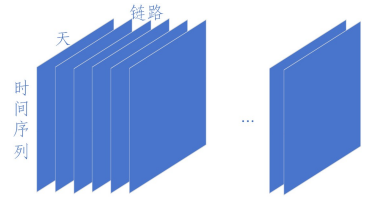


图1 张量数据  
Fig. 1 Tensor data

### 3.2 符号表示

文中所出现的基本符号定义如下:

张量模式的时空交通数据用黑体欧拉字母来表示,如 $\mathcal{A}$ ;对于矩阵形式的时空交通数据用黑体大写字母来表示,如 $\mathbf{A}$ ;文中出现的向量用黑体小写字母来表示,如 $\mathbf{a}$ ;标量用小写字母来表示,如 $a$ ;此外, $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 分别表示内部数值属于实数域或复数域。给定三阶张量 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ , $\mathcal{A}(i, :, :)$ , $\mathcal{A}(:, :, i)$ 和 $\mathcal{A}(:, :, i)$ 分别表示第 $i$ 个水平、侧面和正向切片,并且正向切片 $\mathcal{A}(:, :, i)$ 可以用 $\mathcal{A}^{(i)}$ 来表示。

## 4 WLRTC-TTNN模型

### 4.1 LRTC模型

基于T-SVD的LRTC框架最早是由Zhang等<sup>[13]</sup>提出的,这类机器学习模型的提出,目的在于用观测到的元素来对缺失位置的元素进行填充。张量补全与低秩矩阵补全的意义基本相同,可以将张量补全问题看作是矩阵补全问题的高阶扩展。于是,对于具有部分观测元素的三阶张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ ,运用平均秩<sup>[15]</sup>的概念,对时空交通数据背景下的问题进行建模:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{A}} & \text{rank}_a(\mathcal{A}) \\ \text{s. t.} & \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{M}) = \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{A}) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\mathcal{A}$ 是希望得到的恢复张量, $\mathcal{M}$ 是原始的观测张量, $\min$ , $\text{rank}(\mathcal{A})$ 是寻求补全张量的秩最小化问题,约束条件 $\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{M}) = \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{A})$ 要求修复后的观测值点与原始观测值点相同。

已知,  $\mathcal{A}$  平均秩的凸包络是它的核范数  $\|\mathcal{A}\|_*$ , 对原模型进行重写:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{M}} & \|\mathcal{A}\|_* \\ \text{s. t.} & \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{M}) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{A}) \end{aligned} \quad (2)$$

原问题中取张量  $\mathcal{A}$  的秩最小化问题就变成了寻求张量  $\mathcal{A}$  的核范数最小化问题。

#### 4.2 张量的截断核范数

在给出张量的截断核范数前, 首先描述张量奇异值分解的定义(T-SVD)。对于给定的张量  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ , 它的 T-SVD 有  $\mathcal{X} = \mathcal{U} \times \mathcal{S} \times \mathcal{V}^T$ , 如图 2, 其中  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  和  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  是两个正交张量,  $\mathcal{S} = \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  是 F-diagonal 张量。整体过程为: 对原始张量进行傅里叶变换, 取每个正向切片进行奇异值分解, 得到  $\bar{\mathcal{U}}, \bar{\mathcal{S}}, \bar{\mathcal{V}}$ , 最后经过逆傅里叶变换得到  $\mathcal{U}, \mathcal{S}, \mathcal{V}$ 。

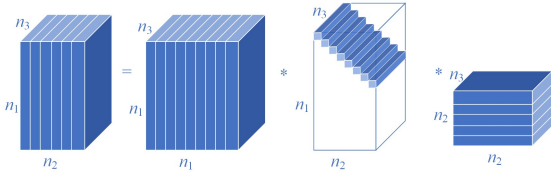


图 2 张量的奇异值分解

Fig. 2 Tensor singular value decomposition

张量的截断核范数定义<sup>[16]</sup>: 给定一个三阶张量  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  和一个正整数  $p = \min(n_1, n_2)$ , 截断核范数为张量最小奇异值之和的形式, 即:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{X}\|_{r,*} &= \frac{1}{n_3} \|\bar{\mathcal{X}}\|_{r,*} \\ &= \frac{1}{n_3} \sum_{j=1}^{n_3} \sum_{i=r+1}^l \sigma_i(\bar{\mathcal{X}}^{(j)}) \\ &= \frac{1}{n_3} \sum_{j=1}^{n_3} \sum_{i=1}^l \sigma_i(\bar{\mathcal{X}}^{(j)}) - \frac{1}{n_3} \sum_{j=1}^{n_3} \sum_{i=1}^r \sigma_i(\bar{\mathcal{X}}^{(j)}) \\ &= \sum_{i=1}^l \sigma_i(\mathcal{X}) - \sum_{i=1}^r \sigma_i(\mathcal{X}) \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $\|\cdot\|_*$  表示为张量的截断核范数,  $tr(\cdot)$  表示张量的迹,  $\sigma_i(\mathcal{X})$  为  $\mathcal{X}$  的第  $i$  个奇异值, 截断参数  $r < \min(n_1, n_2)$ , 张量的奇异值通过 T-SVD 得到。

#### 4.3 WLRTC-TTNN 模型

根据上述提出的 LRTC 框架与张量的截断核范数定义, 对式(2)进行改造。传统的基于 T-SVD 的 LRTC 模型中, 当有数据输入时, T-SVD 的含义是对张量的正向切片  $\mathcal{A}(:, :, k)$  在变换域中进行奇异值分解, 而为了避免对数据的输入方向产生依赖性和保留数据内部重要的特征信息, 用加权<sup>[17]</sup>的思想来消除数据输入方向的影响。定义 3 个三阶张量的模式大小为:  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ ,  $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_3 \times n_1}$ ,  $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_1 \times n_2}$ , 分别表示时空交通数据以 3 个不同的方向输入, 再加入张量的截断核范数定义, 基于原问题进行重新建模。WLRTC-TTNN 模型如式(4)所示:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{D}, \mathcal{Z}, \mathcal{W}} & \alpha_1 \|\mathcal{D}\|_{r,*} + \alpha_2 \|\mathcal{Z}\|_{r,*} + \alpha_3 \|\mathcal{W}\|_{r,*} \\ \text{s. t.} & \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{M}_1), \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{Z}) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{M}_2), \\ & \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{W}) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{M}_3) \end{aligned} \quad (4)$$

权重  $\alpha_i$  的总和为 1, 对于  $\mathcal{D}, \mathcal{Z}$  和  $\mathcal{W}$  截断核范数的加权,

根据 T-SVD 的含义, 会取到每个切面的相关性信息, 也等同于取原始张量 3 个方向的切片信息(分别为水平切片、侧向切片、正向切片)进行加权。此外,  $\mathcal{M}_i (i=1, 2, 3)$  的大小与对应张量的大小完全相同, 目的是使得变换后的观测元素仍和补全后观测位置的元素相等。引入一个三阶辅助张量变量  $\mathcal{X}_i$  和一组附加的约束条件  $\mathcal{M}_i = \mathcal{X}_i (i=1, 2, 3)$ , 将上述问题转化为如下的可处理的形式:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{D}, \mathcal{Z}, \mathcal{W}} & \alpha_1 \|\mathcal{D}\|_{r,*} + \alpha_2 \|\mathcal{Z}\|_{r,*} + \alpha_3 \|\mathcal{W}\|_{r,*} \\ \text{s. t.} & \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{X}_i) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{M}_i) \\ & \mathcal{X}_1 = \mathcal{D}, \mathcal{X}_2 = \mathcal{Z}, \mathcal{X}_3 = \mathcal{W} \end{aligned} \quad (5)$$

用交替乘法(ADMM 框架<sup>[18]</sup>)对 WLRTC-TTNN 模型进行求解, ADMM 框架主要用于解决大规模问题和目标中有多个非光滑项的优化问题, 总体思路是通过分解协调, 将大的全局问题分解为多个较小、较容易求解的局部子问题, 并通过协调子问题的解来得到全局问题的最优解。

用 ADMM 框架进行求解需要定义增强的拉格朗日函数, 增强的拉格朗日函数如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{Z}, \mathcal{W}, \mathcal{Y}) &= \alpha_1 \|\mathcal{D}\|_{r,*} + \alpha_2 \|\mathcal{Z}\|_{r,*} + \alpha_3 \|\mathcal{W}\|_{r,*} \\ &+ \langle \mathcal{Y}_1, \mathcal{X}_1 - \mathcal{D} \rangle + \frac{\rho}{2} \|\mathcal{X}_1 - \mathcal{D}\|_{\text{F}}^2 + \langle \mathcal{Y}_2, \mathcal{X}_2 - \mathcal{Z} \rangle \\ &+ \frac{\rho}{2} \|\mathcal{X}_2 - \mathcal{Z}\|_{\text{F}}^2 + \langle \mathcal{Y}_3, \mathcal{X}_3 - \mathcal{W} \rangle \\ &+ \frac{\rho}{2} \|\mathcal{X}_3 - \mathcal{W}\|_{\text{F}}^2 \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $\mathcal{Y}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ ,  $\mathcal{Y}_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_3 \times n_1}$ ,  $\mathcal{Y}_3 \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_1 \times n_2}$  分别为定义的拉格朗日乘子,  $\rho$  为惩罚参数, 因此, 根据 ADMM 框架的求解方式, 将  $\mathcal{D}, \mathcal{Z}, \mathcal{W}$  和  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  分别进行交替迭代更新操作:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{t+1} &:= \arg \min_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\mathcal{X}^t, \mathcal{D}^t, \mathcal{Z}^t, \mathcal{W}^t, \mathcal{Y}_1^t) \\ \mathcal{Z}^{t+1} &:= \arg \min_{\mathcal{Z}} \mathcal{L}(\mathcal{X}^t, \mathcal{D}^{t+1}, \mathcal{Z}^t, \mathcal{W}^t, \mathcal{Y}_2^t) \\ \mathcal{W}^{t+1} &:= \arg \min_{\mathcal{W}} \mathcal{L}(\mathcal{X}^t, \mathcal{D}^{t+1}, \mathcal{Z}^{t+1}, \mathcal{W}^t, \mathcal{Y}_3^t) \\ \mathcal{X}^{t+1} &:= \arg \min_{\mathcal{X}} \mathcal{L}(\mathcal{X}^t, \mathcal{D}^{t+1}, \mathcal{Z}^{t+1}, \mathcal{W}^{t+1}, \mathcal{Y}_1^t) \\ \mathcal{Y}_i^{t+1} &:= \mathcal{Y}_i^t + \rho \left( \alpha_1 (\mathcal{X}^{t+1} - \mathcal{D}^{t+1}) + \alpha_2 (\mathcal{X}^{t+1} - \mathcal{Z}^{t+1}) + \alpha_3 (\mathcal{X}^{t+1} - \mathcal{W}^{t+1}) \right) \end{aligned}$$

模型求解:

第 1 步 对每个输入方向的数据进行相关信息的提取与加权。

固定  $\mathcal{X}_i^t$  和  $\mathcal{Y}_i^t, \mathcal{Z}^t, \mathcal{W}^t$ , 求解  $\mathcal{D}^{t+1}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{t+1} &:= \arg \min_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\mathcal{X}_1^t, \mathcal{D}^t, \mathcal{Z}^t, \mathcal{W}^t, \mathcal{Y}_1^t) \\ &= \alpha_1 \|\mathcal{D}^t\|_{r,*} + \langle \mathcal{Y}_1^t, \mathcal{X}_1^t - \mathcal{D}^t \rangle + \frac{\rho}{2} \|\mathcal{X}_1^t - \mathcal{D}^t\|_{\text{F}}^2 \\ &= \alpha_1 \|\mathcal{D}^t\|_{r,*} + \frac{\rho}{2} \left\| \mathcal{D}^t - \left\langle \mathcal{X}_1^t + \frac{1}{\rho} \mathcal{Y}_1^t \right\rangle \right\|_{\text{F}}^2 \\ &= \mathcal{D}_{\frac{\alpha_1}{\rho}, r,*} \left( \mathcal{X}_1^t + \frac{1}{\rho} \mathcal{Y}_1^t \right) \end{aligned} \quad (7)$$

同理,  $\mathcal{Z}^{t+1}, \mathcal{W}^{t+1}$  的求解与  $\mathcal{D}^{t+1}$  基本相同, 固定其他元素  $\mathcal{X}^{t+1}, \mathcal{W}^{t+1}$  的求解如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{t+1} &:= \arg \min_{\mathcal{Z}} \mathcal{L}(\mathcal{X}^t, \mathcal{D}^{t+1}, \mathcal{Z}^t, \mathcal{W}^t, \mathcal{Y}_2^t) \\ &= \alpha_2 \|\mathcal{Z}^t\|_{r,*} + \langle \mathcal{Y}_2^t, \mathcal{X}_2^t - \mathcal{Z}^t \rangle + \frac{\rho}{2} \|\mathcal{X}_2^t - \mathcal{Z}^t\|_{\text{F}}^2 \\ &= \alpha_2 \|\mathcal{Z}^t\|_{r,*} + \frac{\rho}{2} \left\| \mathcal{Z}^t - \left\langle \mathcal{X}_2^t + \frac{1}{\rho} \mathcal{Y}_2^t \right\rangle \right\|_{\text{F}}^2 \end{aligned}$$

$$= \mathcal{D}_{\frac{\alpha_2}{\rho}, r, *}\left(\mathcal{X}_2^t + \frac{1}{\rho}\mathcal{Y}_2^t\right) \quad (8)$$

$$\mathcal{W}^{t+1} = \arg \min_{\mathcal{W}} \mathcal{L}(\mathcal{X}_3^t, \mathcal{D}^{t+1}, \mathcal{Z}^{t+1}, \mathcal{W}^t, \mathcal{Y}_3^t)$$

$$= \alpha_3 \|\mathcal{W}^t\|_{r, *} + \langle \mathcal{Y}_3^t, \mathcal{X}_3^t - \mathcal{W}^t \rangle + \frac{\rho}{2} \|\mathcal{X}_3^t - \mathcal{W}^t\|_{\text{F}}^2$$

$$= \alpha_3 \|\mathcal{W}^t\|_{r, *} + \frac{\rho}{2} \left\| \mathcal{W}^t - \left\langle \mathcal{X}_3^t + \frac{1}{\rho}\mathcal{Y}_3^t \right\rangle \right\|_{\text{F}}^2$$

$$= \mathcal{D}_{\frac{\alpha_3}{\rho}, r, *}\left(\mathcal{X}_3^t + \frac{1}{\rho}\mathcal{Y}_3^t\right) \quad (9)$$

依据张量的奇异值阈值理论<sup>[19]</sup>对  $\mathcal{D}_{\frac{\alpha_i}{\rho}, r, *}\left(\mathcal{X}_i^t + \frac{1}{\rho}\mathcal{Y}_i^t\right)$  进行求解。给定张量  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ , 对于任意  $\rho > 0$ ,  $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ , 取张量的截断参数  $r < \min(n_1, n_2)$ , 有如下问题:

$$\min_{\mathcal{X}} \|\mathcal{X}\|_{r, *} + \frac{\rho}{2} \|\mathcal{X} - \mathcal{L}\|_{\text{F}}^2 \quad (10)$$

再由广义奇异值阈值理论<sup>[20]</sup>给出上述问题的最优解:

$$\mathcal{D}_{\tau}(\mathcal{L}) = \mathcal{X} = \mathcal{U}\Sigma_{r, *} \mathcal{V}^T \quad (11)$$

其中,  $\mathcal{U}\Sigma_{r, *} \mathcal{V}^T$  为  $\mathcal{L}$  奇异值分解后的阈值截断,  $\tau$  值为  $1/\rho$ ,  $r$  表示截断参数,  $\Sigma_{r, *}$  可以表示为:

$$\Sigma_{r, *} = \text{diag}((\sigma_1, \dots, \sigma_r, [\sigma_{r+1} - 1/\rho]_+, \dots, [\sigma_{\min(m, n)} - 1/\rho]_+)^T) \quad (12)$$

其中,  $+$  函数的定义为:  $a_+ = \max\{a, 0\}$ 。

由上述奇异值阈值理论可以得到, 对  $\mathcal{D}_{\frac{\alpha_i}{\rho}, r, *}\left(\mathcal{X}_i^t + \frac{1}{\rho}\mathcal{Y}_i^t\right)$  的求解是对张量  $\left(\mathcal{X}_i^t + \frac{1}{\rho}\mathcal{Y}_i^t\right)$  进行奇异值分解后的阈值截断, 阈值  $\tau = \frac{\alpha_i}{\rho}$ 。

**第2步** 在上一步的基础上对需要补全值点进行逼近, 并使得观测点值与原始观测点值相同(通过替换操作来完成)。

求解  $\mathcal{X}_i^{t+1}$ , 固定  $\mathcal{D}^{t+1}$  和  $\mathcal{Z}^t, \mathcal{W}^t, \mathcal{Y}_i^t$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_i^{t+1} &= \arg \min_{\mathcal{X}} \mathcal{L}(\mathcal{X}_i^t, \mathcal{D}^{t+1}, \mathcal{Z}^{t+1}, \mathcal{W}^{t+1}, \mathcal{Y}_i^t) \\ &= \langle \mathcal{Y}_1^t, \mathcal{X}_1^t - \mathcal{D}^{t+1} \rangle + \frac{\rho}{2} \|\mathcal{X}_1^t - \mathcal{D}^{t+1}\|_{\text{F}}^2 + \langle \mathcal{Y}_2^t, \mathcal{X}_2^t - \mathcal{Z}^{t+1} \rangle + \frac{\rho}{2} \|\mathcal{X}_2^t - \mathcal{Z}^{t+1}\|_{\text{F}}^2 + \langle \mathcal{Y}_3^t, \mathcal{X}_3^t - \mathcal{W}^{t+1} \rangle + \frac{\rho}{2} \|\mathcal{X}_3^t - \mathcal{W}^{t+1}\|_{\text{F}}^2 \\ &= \sum_{i=1}^3 \left( (\mathcal{D}^{t+1} + \mathcal{Z}^{t+1} + \mathcal{W}^{t+1}) - \frac{1}{\rho}\mathcal{Y}_i^t \right) \end{aligned} \quad (13)$$

加上剩余约束条件  $\mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{X}_i) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{M}_i)$ , 于是有:

$$\mathcal{X}_i^{t+1} = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 \left( (\mathcal{D}^{t+1} + \mathcal{Z}^{t+1} + \mathcal{W}^{t+1}) - \frac{1}{\rho}\mathcal{Y}_i^t \right) \\ \text{s. t. } \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{X}_i^t) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{M}_i^t) \end{cases} \quad (14)$$

去除约束条件, 取原始观测点位置的元素来替换补全张量中观测点位置的元素:

$$\mathcal{X}_i^{t+1} = \sum_{i=1}^3 \left( (\mathcal{D}^{t+1} + \mathcal{Z}^{t+1} + \mathcal{W}^{t+1}) - \frac{1}{\rho}\mathcal{Y}_i^t \right)_{\Omega} + \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{M}) \quad (15)$$

**第3步** 更新  $\mathcal{Y}_i^{t+1}$ , 过程如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_1^{t+1} &= \mathcal{Y}_1^t + \rho(a_1(\mathcal{D}^{t+1} - \mathcal{X}_1^{t+1}) + a_2(\mathcal{Z}^{t+1} - \mathcal{X}_2^{t+1}) + \\ &\quad a_3(\mathcal{W}^{t+1} - \mathcal{X}_3^{t+1})) \end{aligned} \quad (16)$$

综上, WLRTC-TTNN 算法的步骤算法 1 所示。

## 算法 1 WLRTC-TTNN 算法

Input:  $\mathcal{X}_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{M}_i) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{X}_i), \mathcal{D} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}, \mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_3 \times n_1}, \mathcal{W} \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_1 \times n_2}, \mathcal{Y}_i = 0, \rho, \mathbf{k}, r$

Output:  $\mathcal{X}_i$

1. While:

for  $i=1$  to  $\mathbf{k}$

2. Update:

$$\mathcal{D}^{t+1} = \mathcal{D}_{\frac{\alpha_1}{\rho}, r, *}\left(\mathcal{X}_1^t + \frac{1}{\rho}\mathcal{Y}_1^t\right)$$

$$\mathcal{Z}^{t+1} = \mathcal{D}_{\frac{\alpha_2}{\rho}, r, *}\left(\mathcal{X}_2^t + \frac{1}{\rho}\mathcal{Y}_2^t\right)$$

$$\mathcal{W}^{t+1} = \mathcal{D}_{\frac{\alpha_3}{\rho}, r, *}\left(\mathcal{X}_3^t + \frac{1}{\rho}\mathcal{Y}_3^t\right)$$

3. Update:

$$\mathcal{X}_i^{t+1} = \sum_{i=1}^3 \left( (\mathcal{D}^{t+1} + \mathcal{Z}^{t+1} + \mathcal{W}^{t+1}) - \frac{1}{\rho}\mathcal{Y}_i^t \right)_{\Omega} + \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{M})$$

4. Update:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_i^{t+1} &= \mathcal{Y}_i^t + \rho(a_1(\mathcal{D}^{t+1} - \mathcal{X}_1^{t+1}) + a_2(\mathcal{Z}^{t+1} - \mathcal{X}_2^{t+1}) + a_3(\mathcal{W}^{t+1} - \\ &\quad \mathcal{X}_3^{t+1})) \end{aligned}$$

5. If:

$$\frac{\|\mathcal{X}^{t+1} - \mathcal{X}^t\|_{\text{F}}^2}{\|\mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{X})\|_{\text{F}}^2} < \epsilon$$

break

6. End for

WLRTC-TTNN 模型与大多数统计学习的模型相同, 它通过对现有观测数据低秩问题进行迭代的方式来提高数据的恢复精度, 不会在迁移过程中出现数据穿越的问题, 并且在整个过程中不考虑噪声的影响。WLRTC-TTNN 模型适用于多数的低秩交通流数据修复问题。

## 5 实验

### 5.1 数据集设置

本文使用两个真实的时空交通数据集进行实验:

(1) 中国广州的城市交通数据集。包含 2016 年 8 月 1 日至 2016 年 9 月 30 日的 61 天的数据, 以 10min 为间隔, 由 214 条匿名路段(主要由城市高速公路和干道组成)组成。

(2) Cui 等<sup>[21]</sup>收集的西雅图高速公路交通速度数据, 该数据集包含了美国西雅图 2015 年全年的高速公路交通流数据, 来自 323 个分辨率为 5 min 的环路检测器, 选择 1 月的子集(1 月 1 日至 1 月 28 日 4 周时间)作为实验数据。

两个数据集分别简称为“G”和“S”。

### 5.2 时空相关性分析

Tan 等<sup>[22]</sup>通过分析时空交通数据的模态相关性信息, 推荐了最适宜的时空交通数据张量表示形式(路段、日期和时间窗口)。以 G 数据集为例, 用 Tan 等计算模式相关性的方式计算 G 数据集每个模式的相关系数。

$$S = \frac{\sum_{n \geq i > j \geq 1} R(i, j)}{n(n-1)/2} \quad (17)$$

其中, 研究采用了皮尔逊相关系数和相似系数;  $R(i, j)$  表示取每个模式下的相关系数矩阵;  $S$  表示相似系数, 用于衡量矩阵  $R$  中的平均相关系数。表 1 列出了每个模式的相关性系数。

表 1 模式的相关性系数

Table 1 Correlation coefficient of each mode

模式	大小	相关系数
链路	214×288	0.926
日期	61×288	0.969
时间窗口	288×61	0.953

### 5.3 基线模型

对于基线模型的选取,本文考虑了两种时空交通数据的组织形式与数据输入方向对补全精度的影响。数据构建为矩阵时,选取高精度的 TRMF<sup>[5]</sup> 算法作为对比,并将数据处理为“位置/传感器×时间”的形式;数据构建为张量时,选取经典的 HaLRTC<sup>[8]</sup> 模型、CP\_ALS<sup>[23]</sup> (CP\_Alternate Least Square)模型和近年来提出的基于贝叶斯准则的张量补全模型(Bayesian Gaussian CP decomposition, BGCP<sup>[24]</sup>)作为对比,张量的数据模式构建为“位置/传感器×天×时间”。

### 5.4 实验设置

在进行模型实验设置时,首先对现有数据集进行初始化的数据丢失处理,然后通过补全算法进行缺失值填充。在精度对比上,使用数据集的真实值和补全值来进行度量,通过对比 MAPE 和 RMSE 的数值大小来判断补全的优劣,MAPE 和 RMSE 的定义如下所示:

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \times 100$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}$$
(18)

在实际获取的时空交通数据中,数据缺失共有两种情形<sup>[25]</sup>:随机缺失(Random Missing, RM)和非随机缺失(Non-random Missing, NM)。这两个缺失的场景的设置有助于更好地评估不同模型的性能和有效性。以 G 数据集为例,两种缺失率(30%,60%)情况下数据的稀疏程度图 3 和图 4 所示。

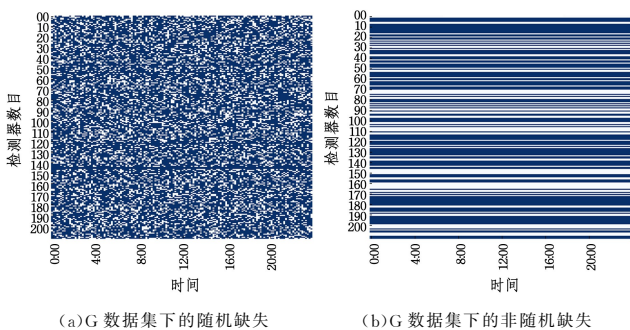


图 3 G 数据集缺失率为 30% 时的稀疏度

Fig. 3 Sparsity of G dataset with missing rate of 30%

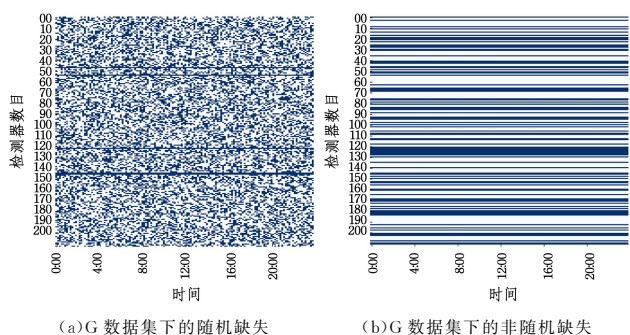


图 4 G 数据集缺失率为 60% 时的稀疏度

Fig. 4 Sparsity of G dataset with missing rate of 60%

在 WLRTC-TTNN 模型中, $\rho$  为每次的迭代步长,设置初始的迭代步长  $\rho=1.05$ ,通过  $\rho=\min(1.05 * \rho, \rho_{\max})$  来对  $\rho$  进行更新;对于截断参数  $r$ ,在随机缺失场景与非随机缺失场景中分别设置  $r$  为 0.1 和 0.05;对于收敛条件,用  $\|\mathcal{X}^{t+1} - \mathcal{X}^t\|_F / \|\mathcal{D}_n(\mathcal{X})\|_F$  来判断算法是否收敛,选取收敛精度限制  $\epsilon$ ,将  $\epsilon$  的值设置为  $1 \times 10^{-4}$ ;最后,以 G 数据集 60% 的随机缺失场景为例,WLRTC-TTNN 模型的迭代收敛曲线如图 5 所示。

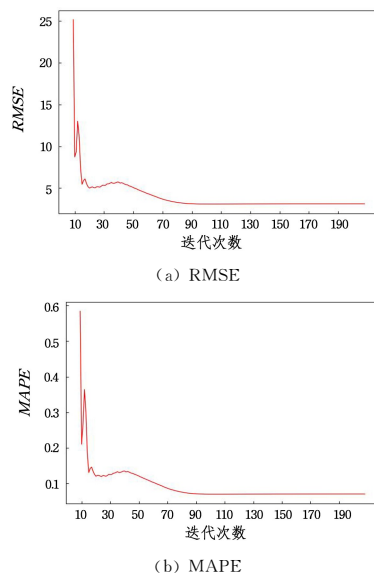


图 5 收敛曲线

Fig. 5 Convergence curve

当迭代到 130 时,模型已完全收敛,但考虑到未知因素,迭代参数  $k$  设置为 150。

### 5.5 实验对比

本文通过实验对 WLRTC-TTNN 模型的性能进行评估,并与现有的经典高精度补全模型进行对比,以突出其优势。

在随机缺失与非随机缺失场景下,设置 G 与 S 数据集的缺失率为 20%~80%,通过实验来对比不同场景与不同缺失率下算法的补全精度;而对于基线模型,设置 TRMF, BGCP, CP\_ALS 在 G 和 S 数据集随机缺失场景下的秩<sup>[11]</sup>分别为 80 和 50。在非随机缺失场景下的秩统一设置为 10,用 RMSE 与 MAPE 来判断补全性能的优劣,在整个实验过程中并不考虑噪声的影响, S 和 G 数据集在随机缺失场景下的对比如表 2 所列。

由表 2 可知,在 G 数据集和 S 数据集的随机缺失场景下,当缺失率为 20%~80% 时, WLRTC-TTNN 的补全精度一直优于其他模型。在 G 数据集中,随着缺失率提高, WLRTC-TTNN 模型的补全精度优势一直相对平稳,当缺失率为 80% 时, BGCP 的补全精度有所提升,但仍不如 WLRTC-TTNN 模型;在 S 数据集中,随着缺失率的不断提高, WLRTC-TTNN 的补全精度优势相较于 TRMF, BGCP, CP\_AL 模型不断减小,在极端缺失为 80% 的情况下, TRMF 的补全精度与 WLRTC-TTNN 较为接近,但仍不如 WLRTC-TTNN。整体来看, WLRTC-TTN 在 G 与 S 数据集的随机缺失情况下补全精度提高了 5.2%~28%。以 G 数据集为例,图 6、图 7 给出了在随机缺失率为 30% 和 60% 时的补全效果图。

表2 S和G数据集在随机缺失场景下对比

Table 2 S vs. G in random missing scenario

缺失率	TRMF	BGCP	HaLRTC	CP_ALS	WLRTC-TTNN
20%	3.14/7.47	3.57/8.28	3.33/8.13	3.59/8.33	2.68/6.11
30%	3.19/7.56	3.59/8.31	3.46/8.48	3.60/8.33	2.77/6.32
40%	3.25/7.76	3.59/8.29	3.61/8.86	3.61/8.37	2.86/6.52
G 50%	3.34/8.02	3.77/9.31	3.77/9.30	3.66/8.49	2.97/6.75
60%	3.47/8.37	3.96/9.83	3.96/9.82	3.72/8.61	3.10/7.06
70%	3.70/8.97	4.18/10.45	4.18/10.45	3.82/8.84	3.28/7.46
80%	4.04/9.89	3.80/8.76	4.47/11.32	4.13/9.38	3.54/8.11
20%	3.71/5.96	4.50/7.45	3.47/5.93	4.49/7.42	3.21/5.04
30%	3.75/6.07	4.52/7.51	3.64/6.33	4.57/7.63	3.30/5.24
40%	3.79/6.16	4.54/7.58	3.83/6.76	4.55/7.58	3.40/5.42
S 50%	3.84/6.29	4.08/7.31	4.07/7.30	4.61/7.71	3.51/5.64
60%	3.91/6.46	4.34/7.91	4.34/7.90	4.63/7.77	3.64/5.89
70%	4.07/6.84	4.76/8.89	4.76/8.89	4.65/7.78	3.86/6.28
80%	4.38/7.59	4.68/7.84	5.31/10.25	4.81/8.12	4.17/6.89

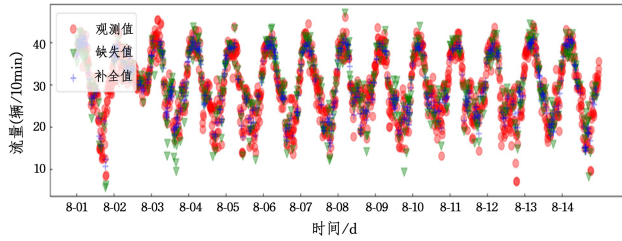


图6 随机缺失率为30%的补全效果图

Fig. 6 Completion effect diagram with random miss rate of 30%

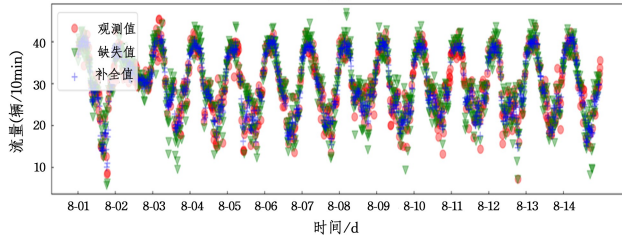


图7 随机缺失率为60%的补全效果图

Fig. 7 Completion effect diagram with random miss rate of 60%

3%~37%。以G数据集为例,图8、图9给出了在非随机缺失率为30%和60%时的补全效果图。

表3 S和G数据集在非随机缺失场景下的对比

Table 3 S vs. G in non-random absence scenario

缺失率	TRMF	BGCP	HaLRTC	CP_ALS	WLRTC-TTNN
20%	4.27/10.24	4.27/10.20	4.21/10.45	4.29/10.27	4.11/9.74
30%	4.32/10.27	4.31/10.25	4.27/10.60	4.33/10.29	4.17/9.78
40%	4.37/10.37	4.32/10.25	4.38/10.88	4.32/10.28	4.20/9.83
G 50%	4.46/10.57	4.52/11.31	4.52/11.30	4.45/10.48	4.28/10.00
60%	4.53/10.80	4.69/11.81	4.69/11.80	4.58/10.73	4.33/10.12
70%	4.68/11.31	4.96/12.65	4.97/12.66	4.90/11.09	4.40/10.36
80%	4.87/11.85	5.32/11.88	5.77/14.61	5.24/11.64	4.59/10.74
20%	5.26/9.12	5.65/9.93	4.69/8.79	5.63/9.95	4.48/7.66
30%	5.27/9.14	5.68/9.96	4.96/9.51	5.74/10.20	4.62/7.96
40%	5.30/9.19	5.68/9.94	5.27/10.19	5.70/10.04	4.85/8.33
S 50%	5.38/9.44	5.64/11.20	5.64/11.19	5.78/10.34	5.00/8.77
60%	4.27/10.24	4.27/10.20	4.21/10.45	4.29/10.27	4.11/9.74
70%	4.32/10.27	4.31/10.25	4.27/10.60	4.33/10.29	4.17/9.78
80%	4.37/10.37	4.32/10.25	4.38/10.88	4.32/10.28	4.20/9.83

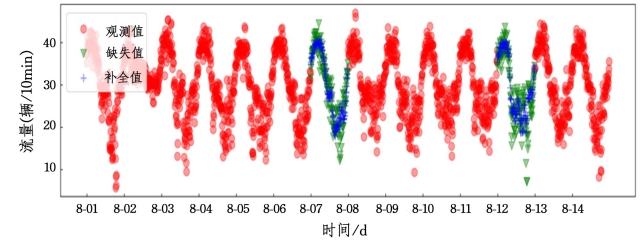


图8 非随机缺失率为30%的补全效果图

Fig. 8 Completion effect diagram with non-random miss rate of 30%

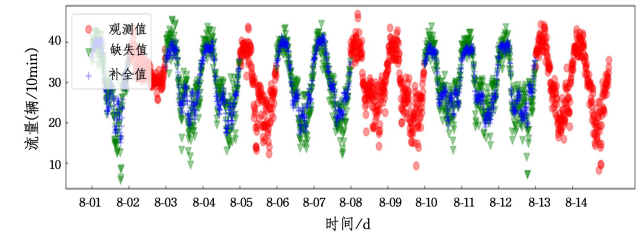


图9 非随机缺失率为60%的补全效果图

Fig. 9 Completion effect diagram with non-random miss rate of 60%

由表2、图6和图7可以看出,在随机缺失情况下,数据变得更为稀疏,但仍保留了足够多的内部相关性信息,而张量交通数据内部相关性信息保留越多,WLRTC-TTNN的补全精度越高。由表3、图8和图9可以看到,在非随机缺失情况下,时空交通数据内部的邻近信息很难被利用,因此,交通数据的不完全周期性特征是进行补全的关键。三向加权的方式充分利用了张量每个模态的相关性信息,截断核范数的方式将相关性信息进行了压缩提取,补全后的交通流量数据比原始数据更为平滑,可以将其看作是原始观测值的光滑包络,但不能补全到极端尖锐点的流量值。

**结束语** WLRTC-TTNN是一个改进的LRTC模型,它综合了T-SVD的多向性与交通数据低秩性的双重优势,通过对模型方向加权与截断核范数的方式,减小了数据输入方向的依赖性影响,同时利用交通数据时间层面与空间层面的特征,最大程度地提取了交通数据张量模式与低秩特性所带来的相关性信息。

S和G数据集在非随机缺失场景下的对比如表3所列。

在G数据集的非随机缺失场景下,缺失率为20%~80%时,WLRTC-TTNN在起始阶段与BGCP,TRMF,CP\_ALS相比补全优势较为突出,随着缺失率的提高,TRMF的补全精度逐渐与WLRTC-TTNN接近,但WLRTC-TTNN仍优于TRMF;当缺失率达到80%时,TRMF发生了极端的偏移,相比之下,WLRTC-TTNN仍较为稳定。在S数据集非随机缺失场景下,当缺失率为20%~80%时,经典模型HaLRTC在低缺失率的情况下补全精度与WLRTC-TTNN模型相近,但随着缺失率的提高,WLRTC-TTNN的精度优势逐渐体现出来,在缺失率为20%~70%的情况下,BGCP,TRMF,CP\_ALS的补全精度都稳定在一个阈值区间,并且缺失率对补全精度的影响较小;但当缺失率为80%时,这些模型都出现了失真的情况,发生了严重的漂移,补全精度并不理想,而WLRTC-TTNN模型的补全精度虽然在稳定递减,但仍高于其他基线模型。整体来看,WLRTC-TTNN模型在非随机缺失场景、不同缺失率情况下一直优于其他基线模型,并且在时空交通数据的极端缺失情况下补全效果仍然稳定,补全精度提高了

基于两个真实的时空交通数据集, WLRTC-TTNN 模型在两种缺失情况下的补全精度比现行的其他模型分别高 5.2%~28% 和 3%~37%, 并且在极端情况下没有失真。

WLRTC-TTNN 模型修复后的数据是原始时空交通数据的平滑包络, 具有很高的修复精度, 但在极端尖锐点无法修复, 后续将考虑引入稀疏性的问题。

## 参 考 文 献

- [1] LI H, LI M, LIN X, et al. A spatiotemporal approach for traffic data imputation with complicated missing patterns[J]. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2020, 119(11):102730. 1-102730. 23.
- [2] LI Q, TAN H, WU Y, et al. Traffic Flow Prediction With Missing Data Imputed by Tensor Completion Methods[J]. *IEEE Access*, 2020, 8:63188-63201.
- [3] YUAN H, CHEN Z H. Short-term Traffic Flow Prediction Based on Temporal Convolutional Networks [J]. *Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition)*, 2020, 48(11):107-113.
- [4] YU H F, RAO N, DHILLON I S. Temporal regularized matrix factorization for high-dimensional time series prediction[C] // *NeurIPS*. 2016:847-855.
- [5] CHEN X B, CHEN C, CHEN L, et al. Missing value interpolation of traffic volume data based on improved low-rank matrix completion [J]. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2019, 19(5):180-190.
- [6] SUN L, CHEN X. Bayesian temporal factorization for multidimensional time series prediction[J]. *arXiv:1910.06366*, 2021.
- [7] CHEN X B, LIANG S R, KE J, et al. Traffic Data Recovery Method based on Graph regularization and Schatten-p norm [J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2022(6):1326-1333.
- [8] TAN H, FENG G, FENG J, et al. A tensor-based method for missing traffic data completion [J]. *Transportation Research Part C*, 2013, 28:15-27.
- [9] LIU J, MUSIALSK P, WONKA P, et al. Tensor completion for estimating missing values in visual data[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, 35(1):208-220.
- [10] CHEN X, YANG J, SEN L. A Nonconvex Low-Rank Tensor Completion Model for Spatiotemporal Traffic Data Imputation [J]. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2020, 117(8), 102673. 1-102673. 12.
- [11] CHEN X Y, CHEN Y X, SAUNIER N, et al. Scalable low-rank tensor learning for spatiotemporal traffic data imputation[J]. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2021, 129, 103226. 1-103226. 13.
- [12] CHEN X, LEI M, SAUNIER N, et al. Low-Rank Autoregressive Tensor Completion for Spatiotemporal Traffic Data Imputation [J]. *arXiv:2104.14936*, 2021.
- [13] ZHANG Z M, AERON S. Exact Tensor Completion Using t-SVD[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017(6):1511-1526.
- [14] LIU C S, SHAN H, CHEN C L. Tensor p-shrinkage nuclear norm for low-rank tensor completion [J]. *Neurocomputing*, 2020, 387:255-267.
- [15] LU C, FENG J, CHEN Y, et al. Tensor Robust Principal Component Analysis with A New Tensor Nuclear Norm[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2020, 42(4):925-938.
- [16] SONG Y, LI J, CHEN X, et al. An efficient tensor completion method via truncated nuclear norm[J]. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2020, 70:102791. 1-102791. 8.
- [17] SU Y, WU X, LIU W. Low-rank Tensor Completion by Sum of Tensor Nuclear Norm Minimization[J]. *IEEE Access*, 2019, 7:134943-134953.
- [18] WANG Y, YIN W, ZENG J. Global Convergence of ADMM in Nonconvex Nonsmooth Optimization [J]. *arXiv:1511.06324*, 2018.
- [19] BENTBI A H, HACHIMI A E, JBILOU K, et al. On the tensor nuclear norm and the total variation regularization for image and video completion[J]. *arXiv:2102.10393*, 2021.
- [20] ZUO W, MENG D, ZHANG L, et al. A generalized iterated shrinkage algorithm for non-convex sparse coding[C] // 2013 IEEE International Conference on Computer Vision. 2013:1-8.
- [21] CUI Z, KE R, PU Z, et al. Deep Bidirectional and Unidirectional LSTM Recurrent Neural Network for Network-wide Traffic Speed Prediction[J]. *arXiv:1801.02143*, 2018.
- [22] TAN H C, YANG Z X, FENG G D, et al. Correlation Analysis for Tensor-based Traffic Data Imputation Method[J]. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 2013, 96:2611-2620.
- [23] BATTAGLINO C, BALLARD G, KOLDA T G. A practical randomized CP tensor decomposition [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2018, 39:876-901.
- [24] CHEN X, HE Z, SUN L. A Bayesian tensor decomposition approach for spatiotemporal traffic data imputation[J]. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2019, 98:73-84.
- [25] CHEN X, HE Z, WANG J, et al. Spatial-temporal traffic speed patterns discovery and incomplete data recovery via svd-combined tensor decomposition [J]. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2018, 86:59-77.



**WU Jiannan**, born in 1998, postgraduate. His main research interests include data mining and machine learning.



**ZHANG Hongmei**, born in 1970, Ph.D., professor. Her main research interests include information assurance and systems engineering.