计算机科学
COMPUTER SCIENCE

覆盖多粒度下的形式概念更新方法

王太滨, 李德玉, 翟岩慧

计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.230600049

覆盖多粒度下的形式概念更新方法

王太滨[1]　李德玉[1,2]　翟岩慧[1,2]
1 山西大学计算机科学与技术学院　太原 030006
2 计算智能与中文信息处理教育部重点实验室(山西大学)　太原 030006
(202022407050@email.sxu.edu.cn)

摘　要　多粒度形式概念分析是数据挖掘与知识发现的重要工具。文中研究了覆盖多粒度下的形式概念的粗化和细化更新方法。首先,举例说明了现有的概念粗化更新算法可能导致概念缺失,通过分析缺失概念的本质特征,对现有概念粗化算法进行补充,并证明了新算法的正确性。其次,举例说明了现有的概念细化更新算法可能会生成冗余概念,通过分析冗余细概念的内涵特性,对现有的概念细化更新算法进行了优化,并证明了新算法生成结果的无冗余性,具有更低的时间复杂度。最后,通过实验验证了所提算法的有效性。

关键词:粒计算;形式概念分析;多粒度形式背景;覆盖多粒度;概念更新
中图法分类号　TP18

Method of Updating Formal Concept Under Covering Multi-granularity

WANG Taibin[1], LI Deyu[1,2] and ZHAI Yanhui[1,2]
1 College of Computer Science and Technology, Shanxi University, Taiyuan 030006, China
2 Key Laboratory of Computational Intelligence and Chinese Information Processing (Shanxi University), Taiyuan 030006, China

Abstract　Multi-granularity formal concept analysis is an important tool for data mining and knowledge discovery. This paper studies the methods of coarsening and refining formal concepts under multi-granularity. Firstly, it is proved that the existing concept coarsening and updating algorithms will lead to concept deletion, and the concept coarsening algorithm is supplemented and improved by analyzing the characteristics of missing concepts. Secondly, it is proved that the existing concept refinement and updating algorithms will generate redundant concepts. The time complexity is high, so the existing concept refinement updating algorithm is optimized, and the performance advantages of the proposed concept refinement algorithm are verified by time complexity analysis and comparative experiments.

Keywords　Granular computing, Formal concept analysis, Muti-granularity formal context, Covering muti-granularity, Updating concept

1　引言

形式概念分析(Formal Concept Analysis,FCA)是 20 世纪 80 年代初由德国 Wille 教授提出的数据分析和知识发现方法,其核心概念为形式背景、形式概念[1]。概念格是 FCA 中支持数据分析和知识发现的核心数据结构,其根据形式背景中对象与属性之间的二元关系建立概念层次结构,刻画概念间的泛化与特化关系。目前 FCA 已经被广泛地应用到机器学习[2]、数据挖掘[3]、软件工程[4]、智能数据处理[5]等相关领域中。

粒计算(Granular Computing,GrC)起源于 Zadeh 提出的模糊信息粒化理论,是一种用于知识表示和数据挖掘的方法。GrC 强调从多角度、多层次理解和描述现实世界问题,它的基本思想是利用不同粒度的信息,将复杂问题分解成一系列更容易处理、更小的子问题。近年来,GrC 在数据挖掘[6]、模式识别[7]、智能控制[8]和复杂问题求解[9]等领域得到了广泛的应用。

经典的形式概念分析中,形式背景中的属性被认为是固定不变的。然而,在某些实际问题中,数据集的属性可能具有不同的粒度级别,相应地,导出的概念格可能揭示不同粒度下的信息和模式。因此,在形式概念分析中改变属性的粒度级别,以捕获数据中的相关模式的能力是一个自然的需求。近年来,人们将粒计算的思想和形式概念分析相结合,来对上述问题进行了研究。一般地,较细的属性粒度通常会导致更精确的推理,也会生成大量的冗余知识;较粗的属性粒度通常会生成较少的冗余知识,但也会导致更不精确的推理。Belohla-

到稿日期:2023-06-05　返修日期:2023-07-28
基金项目:国家自然科学基金(61972238,62072294)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61972238,62072294).
通信作者:李德玉(lidysxu@163.com)

vek 等[10]提出了属性粒化理论框架，通过定义属性粒度树对形式背景中的属性粒化（属性合并或提升），来实现概念知识的粗细转化。She 等[11-12]分别将属性粒化理论推广到经典的概念格模型，实现面向对象和面向属性的多粒度概念格快速构造。Li 等[13]提出了属性粒度树的剪枝方式和属性跨粒度组合方式。

在布尔形式背景中，经典属性粒化情形下，共享单一细属性的对象集形成的集族构成共享粗属性的对象集的划分[10]，其属性粒化方式并不适用于处理现实生活中复杂的粒化关系。因此，Hu 等[14]将属性粒化方式由划分情形拓展到覆盖情形，认为共享细属性的对象集构成共享粗属性的对象集合的覆盖。因为划分属性粒化获得的形式背景也可由原背景通过覆盖属性粒化获得，所以覆盖属性粒化方式[14]是划分属性粒化[10]的扩展。Hu 等[14]进一步提出了覆盖属性粒化下的多粒度概念格快速构造方法，其核心是概念粗化和概念细化的更新算法，可避免通过完全重建的方式来构建大规模形式背景概念结构所产生的巨大计算时间代价。

本文进一步研究了 Hu 等[14]提出的覆盖多粒度下的概念粗化和细化更新算法，发现了现有概念更新算法的局限性。具体地，概念粗化更新算法可能导致缺失概念。本文分析了导致缺失概念的原因，对概念粗化算法进行了补充和完善；另外，概念细化更新算法可能产生概念冗余，通过分析冗余细概念的内涵特性，本文对现有的概念细化更新算法进行了优化，结合时间复杂度分析和对比实验验证了本文提出的概念更新算法的有效性。

本文第 2 章简要介绍了形式概念分析、形式背景的属性粒化等相关的基本概念；第 3 章提出了覆盖属性粒化下形式概念更新算法；第 4 章给出了覆盖属性粒化下形式概念更新算法的对比实验分析；最后总结全文。

2 预备知识

2.1 形式概念分析

定义 1[1] 形式背景是一个三元组 (G,M,I)，G 为非空对象集，M 为非空属性集，$I\subseteq G\times M$ 为对象集和属性集上的二元关系，$(g,m)\in I$ 表示对象 g 具有属性 m，$(g,m)\notin I$ 表示对象 g 不具有属性 m。

定义 2[1] 设 (G,M,I) 为形式背景，对于 $X\subseteq G,B\subseteq M$，记 $X^{\uparrow}=\{m\in M\mid \forall g\in X,(g,m)\in I\}$，$B^{\downarrow}=\{g\in X\mid \forall m\in M,(g,m)\in I\}$。如果 $X^{\uparrow}=B,B^{\downarrow}=X$，那么称序对 $\mathscr{C}=(X,B)$ 为形式概念。其中，X 为形式概念的外延，记作 $Ext(\mathscr{C})$，B 为形式概念的内涵，记作 $Int(\mathscr{C})$。

定义 3[1] 设 (G,M,I) 为形式背景，所有形式概念的集合被标记为 $L(G,M,I)$。概念格 $L(G,M,I)$ 上的偏序关系的定义如下：对于 $(X_1,B_1),(X_2,B_2)\in L(G,M,I)$，$(X_1,B_1)\leqslant(X_2,B_2)\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2\Leftrightarrow B_1\supseteq B_2$。

对于 $(X_1,B_1),(X_2,B_2)\in L(G,M,I)$，显然 $(X_1,B_1)<(X_2,B_2)\Leftrightarrow X_1\subset X_2\Leftrightarrow B_1\supset B_2$。

定义 4[1] 设 (G,M,I) 为形式背景，$X,X_1,X_2\subseteq G,B,B_1,B_2\subseteq M$，则：

1）$X_1\subseteq X_2\Rightarrow X_2^{\uparrow}\subseteq X_1^{\uparrow}$，$B_1\subseteq B_2\Rightarrow B_2^{\downarrow}\subseteq B_1^{\downarrow}$；

2）$X\subseteq X^{\uparrow\downarrow}$，$B\subseteq B^{\downarrow\uparrow}$；

3）$X^{\uparrow}=X^{\uparrow\downarrow\uparrow}$，$B^{\downarrow}=B^{\downarrow\uparrow\downarrow}$；

4）$X\subseteq B^{\downarrow}\Leftrightarrow B\subseteq X^{\uparrow}$，$X\nsubseteq B^{\downarrow}\Leftrightarrow B\nsubseteq X^{\uparrow}$；

5）$(X_1\cup X_2)^{\uparrow}=X_1^{\uparrow}\cap X_2^{\uparrow}$，$(B_1\cup B_2)^{\downarrow}=B_1^{\downarrow}\cap B_2^{\downarrow}$；

6）$(X^{\uparrow\downarrow},X^{\uparrow})\in L(G,M,I)$，$(B^{\downarrow},B^{\downarrow\uparrow})\in L(G,M,I)$。

2.2 属性粒度

在一些实际问题中，粒度指存储数据的精炼或综合程度。其主要应用是实现不同粒度级别之间的最优粒度，使用户获得感兴趣的知识。属性粒度越细，对象的描述就越详细。例如，属性“通过”（[60，100]分）可以细分为其他级别的属性粒度：“及格”（[60，80]分）、“良”（[80，90]分）、“优”（[90，100]分）。

下面引入划分属性粒化的相关定义。

定义 5[10] 设 (G,M,I) 为形式背景，对于 $m\in M$，$C_m=\{m_1,\cdots,m_i,\cdots,m_j,\cdots,m_t\}$ 称为属性 m 粒化生成的划分粒层，若满足 $m_1^{\downarrow}\cup\cdots\cup m_i^{\downarrow}\cup\cdots\cup m_j^{\downarrow}\cup\cdots\cup m_t^{\downarrow}=m^{\downarrow}$ 且 $m_i^{\downarrow}\cap m_j^{\downarrow}=\varnothing$。

显然，属性粒化后，拥有细属性的对象集是拥有粗属性的对象集的划分。然而，在实际问题中，属性粒化关系更为复杂。例如，属性“动作电影”可以细分为粒层“功夫电影”“警匪电影”“战争电影”，一定存在一部电影既是“功夫电影”，也是“警匪电影”。为此，文献[14]提出，属性粒化后，拥有细属性的对象集构成拥有粗属性的对象集的覆盖，这种粒化方式被称为覆盖属性粒化方式。

下面引入覆盖属性粒化的相关定义。

定义 6[14] 设 (G,M,I) 为形式背景，对于 $m\in M$，$C_m=\{m_1,\cdots,m_i,\cdots,m_j,\cdots,m_t\}$ 称为属性 m 粒化生成的覆盖粒层，若满足 $m_1^{\downarrow}\cup\cdots\cup m_i^{\downarrow}\cup\cdots\cup m_j^{\downarrow}\cup\cdots\cup m_t^{\downarrow}=m^{\downarrow}$。

由定义 6 可知，相比划分属性粒化，覆盖粒层不要求 $m_i^{\downarrow}\cap m_j^{\downarrow}=\varnothing$。

定义 7[14] 设 (G,M,I) 为形式背景，称 (G,M_C,I_C) 为由 (G,M,I) 属性粒化生成的覆盖多粒度形式背景，其中 $M_C=\bigcup\limits_{m\in M}C_m$，$C_m$ 表示属性 m 粒化生成的覆盖粒层，$I_C\subseteq G\times M_C$ 为对象集 G 和属性集 M_C 上的二元关系。

3 概念更新算法

在形式背景中，属性粒化可以看作添加粒度已更改的属性列，同时删除具有原始粒度的属性列。

显然，属性粒化前后，派生出的概念结构具有一定的内在联系。因此，发现并利用这种内在联系，提出高效的覆盖属性粒化下的概念更新算法就成为了一个重要的问题。

事实上，多个属性细化可以通过依次细化单个属性实现，多个覆盖属性粒层粗化可以通过依次粗化单个覆盖属性粒层来实现。因此，下面只讨论单个属性和单个覆盖属性粒层之间粒化后的概念更新情况。

设 $\mathscr{F}_1=(G,M,I)$ 为形式背景，$\mathscr{F}_2=(G,M_a,I_a)$ 为由 (G,M,I) 覆盖属性粒化派生的形式背景，其中 $M_a=M\backslash\{a\}\cup A$，$a$ 是粗粒度属性，$A=\{a_1,\cdots,a_t\}$ 是 a 粒化生成的覆盖粒层。

为了表述方便，将$\mathscr{F}_1$和$\mathscr{F}_2$分别称为粗背景和细背景，其中的概念生成算子分别记作$(\uparrow_1, \downarrow_1)$和$(\uparrow_2, \downarrow_2)$。$\mathscr{F}_1$和$\mathscr{F}_2$派生的概念分别称为粗概念和细概念，粗概念集合和细概念集合分别记为$L(\mathscr{F}_1)$和$L(\mathscr{F}_2)$。将$L(\mathscr{F}_1)$更新为$L(\mathscr{F}_2)$称为概念细化，$L(\mathscr{F}_2)$更新为$L(\mathscr{F}_1)$称为概念粗化。同时，将形式概念$\mathscr{C}$的子概念集合和父概念集合分别记为$Succ(\mathscr{C})$和$Pred(\mathscr{C})$。将形式背景$\mathscr{F}$派生的内涵集合和外延集合分别记作$Int(\mathscr{F})$和$Ext(\mathscr{F})$。

为方便讨论，首先给出粗背景和细背景上一些运算的基本性质。

性质 1　设(G,M,I)和(G,M_a,I_a)分别为粗背景和细背景，记$E=M\backslash\{a\}$。若$g\in G, m\in E, X\subseteq G, B\subseteq E$，则：

1) $(g,m)\in I \Leftrightarrow (g,m)\in I_a$；

2) $X^{\uparrow_1}\cap E = X^{\uparrow_2}\cap E$；

3) $B^{\downarrow_1}=B^{\downarrow_2}$；

4) $X^{\uparrow_1}=(X^{\uparrow_1}\cap E)\cup(X^{\uparrow_1}\cap\{a\})$，$X^{\uparrow_2}=(X^{\uparrow_2}\cap E)\cup(X^{\uparrow_2}\cap A)$。

证明：1) 显然正确。

2) 由 1) 可知，$m\in X^{\uparrow_1}\cap E$ 当且仅当 $m\in E$ 且 $m\in X^{\uparrow_1}$，当且仅当 $m\in E$ 且对任意的 $g\in X\subseteq G$ 有 $(g,m)\in I$，当且仅当 $m\in E$ 且对任意的 $g\in X\subseteq G$ 有 $(g,m)\in I_a$，当且仅当 $m\in E$ 且 $m\in X^{\uparrow_2}$，当且仅当 $m\in X^{\uparrow_2}\cap E$。故 $X^{\uparrow_1}\cap E = X^{\uparrow_2}\cap E$。

3) 由 1) 可知，$g\in B^{\downarrow_1}\subseteq G$ 当且仅当对于任意的 $m\in B\subseteq E$ 有 $(g,m)\in I$，当且仅当对于任意的 $m\in B\subseteq E$ 有 $(g,m)\in I_a$，当且仅当 $g\in B^{\downarrow_2}$。故 $B^{\downarrow_1}=B^{\downarrow_2}$。

4) 容易得出，$X^{\uparrow_1}=X^{\uparrow_1}\cap M = X^{\uparrow_1}\cap(M\backslash\{a\}\cup\{a\}) = X^{\uparrow_1}\cap(E\cup\{a\})=(X^{\uparrow_1}\cap E)\cup(X^{\uparrow_1}\cap\{a\})$。类似可知，$X^{\uparrow_2}=X^{\uparrow_2}\cap M_a = X^{\uparrow_1}\cap(M\backslash\{a\}\cup A)=X^{\uparrow_1}\cap(E\cup A)=(X^{\uparrow_2}\cap E)\cup(X^{\uparrow_2}\cap A)$。

性质 2　设(G,M,I)和(G,M_a,I_a)分别为粗背景和细背景，A 是 a 粒化生成的覆盖粒层，$X\subseteq G$。有以下两个结论：

1) 若$A_i\subseteq A$ 且$A_i\neq\emptyset$，则$A_i^{\downarrow_2}\subseteq a^{\downarrow_1}$；

2) 若存在 $A_i\subseteq A$ 且 $A_i\neq\emptyset$，使得 $X\subseteq A_i^{\downarrow_2}$，则 $X^{\uparrow_2\downarrow_2}\subseteq X^{\uparrow_1\downarrow_1}$。

证明：1) 由于$A_i\neq\emptyset$，因此 $\exists a_i\in A_i\subseteq A$，进而有$A_i^{\downarrow_2}\subseteq a_i^{\downarrow_2}$，结合 $\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant t} a_i^{\downarrow_2}=a^{\downarrow_1}$ 可知$A_i^{\downarrow_2}\subseteq a^{\downarrow_1}$。

2) 由性质 1 中的 4) 可知 $X^{\uparrow_2\downarrow_2}=((X^{\uparrow_2}\cap E)\cup(X^{\uparrow_2}\cap A))^{\downarrow_2}=(X^{\uparrow_2}\cap E)^{\downarrow_2}\cap(X^{\uparrow_2}\cap A)^{\downarrow_2}$。此时，由性质 1 中的 2) 可知 $X^{\uparrow_2}\cap E=X^{\uparrow_1}\cap E$，进而可得 $(X^{\uparrow_2}\cap E)^{\downarrow_2}=(X^{\uparrow_1}\cap E)^{\downarrow_2}$，再由 $X^{\uparrow_1}\cap E\subseteq E$ 和性质 1 中的 3) 可知 $(X^{\uparrow_2}\cap E)^{\downarrow_2}=(X^{\uparrow_1}\cap E)^{\downarrow_2}=(X^{\uparrow_1}\cap E)^{\downarrow_1}$；由于存在 $A_i\subseteq A$ 且 $A_i\neq\emptyset$，使得 $X\subseteq A_i^{\downarrow_2}$，因此 $X^{\uparrow_2}\cap A\subseteq A$ 且 $X^{\uparrow_2}\cap A\neq\emptyset$，再由 1) 可知 $(X^{\uparrow_2}\cap A)^{\downarrow_2}\subseteq a^{\downarrow_1}$，而由 $X^{\uparrow_1}\cap\{a\}\subseteq\{a\}$ 可知 $a^{\downarrow_1}\subseteq(X^{\uparrow_1}\cap\{a\})^{\downarrow_1}$，因此 $(X^{\uparrow_2}\cap A)^{\downarrow_2}\subseteq(X^{\uparrow_1}\cap\{a\})^{\downarrow_1}$。因此 $X^{\uparrow_2\downarrow_2}=(X^{\uparrow_2}\cap E)^{\downarrow_2}\cap(X^{\uparrow_2}\cap A)^{\downarrow_2}\subseteq(X^{\uparrow_1}\cap E)^{\downarrow_1}\cap(X^{\uparrow_1}\cap\{a\})^{\downarrow_1}$，再由性质 1 中的 4) 可知 $X^{\uparrow_1\downarrow_1}=(X^{\uparrow_1}\cap E)^{\downarrow_1}\cap(X^{\uparrow_1}\cap\{a\})^{\downarrow_1}$，故 $X^{\uparrow_2\downarrow_2}\subseteq X^{\uparrow_1\downarrow_1}$。

表 1　一对粗细形式背景的对照表

Table 1　A cross-reference to a pair of coarse and fine formal context

$\mathscr{F}_1$	a	b	c	d	e	f	$\mathscr{F}_2$	a_1	a_2	a_3	b	c	d	e	f
1	×	×	×				1	×			×	×			
2	×	×	×				2	×	×		×	×			
3	×	×	×	×			3		×		×	×	×		
4	×			×	×		4			×			×	×	
5		×		×	×	×	5				×		×	×	×

下面分别介绍覆盖属性粒化下的概念粗化更新算法和概念细化更新算法。

3.1　概念粗化算法

文献[14]首先根据细概念的外延与粗属性的关系以及内涵与细属性的关系，将细概念分为 3 类，如引理 1 所示。

引理 1[14]　令$\mathscr{F}_1=(G,M,I)$和$\mathscr{F}_2=(G,M_a,I_a)$为粗背景和细背景，$A$ 是 a 粒化生成的覆盖粒层。假设$(X,B)\in L(\mathscr{F}_2)$，则有：

1) 若 $A\cap B=\emptyset$ 且 $X\nsubseteq a^{\downarrow_1}$，则$(X,B)\in L(\mathscr{F}_1)$；

2) 若 $A\cap B=\emptyset$ 且 $X\subseteq a^{\downarrow_1}$，则$(X,B\cup\{a\})\in L(\mathscr{F}_1)$；

3) 若 $A\cap B\neq\emptyset$，则$((B\backslash A\cup\{a\})^{\downarrow_1}, B\backslash A\cup\{a\})\in L(\mathscr{F}_1)$。

将引理 1 生成的粗概念集合分别记作L_1,L_2,L_3，即：

$L_1=\{(X,B)\mid(X,B)\in L(\mathscr{F}_2), B\cap A=\emptyset, X\nsubseteq a^{\downarrow_1}\}$

$L_2=\{(X,B\cup\{a\})\mid(X,B)\in L(\mathscr{F}_2), B\cap A=\emptyset, X\subseteq a^{\downarrow_1}\}$

$L_3=\{((B\backslash A\cup\{a\})^{\downarrow_1}, B\backslash A\cup\{a\})\mid(X,B)\in L(\mathscr{F}_2), B\cap A\neq\emptyset\}$

文献[14]的结论表明，$L_1\cup L_2\cup L_3=L(\mathscr{F}_1)$。然而，该概念更新方法可能产生概念缺失。

例 1　粗背景$\mathscr{F}_1$和细背景$\mathscr{F}_2$如表 1 所列，计算可知：

$L(\mathscr{F}_1)=\{(G,\emptyset),(\{1,2,3,4\},\{a\}),(\{1,2,3,5\},\{b\}),(\{3,4,5\},\{d\}),(\{1,2,3\},\{a,b,c\}),(\{3,4\},\{a,d\}),(\{3,5\},\{b,d\}),(\{4,5\},\{d,e\}),(\{3\},\{a,b,c,d\}),(\{4\},\{a,d,e\}),(\{5\},\{b,d,e,f\}),(\emptyset,M)\}$

$L(\mathscr{F}_2)=\{(G,\emptyset),(\{1,2,3,5\},\{b\}),(\{3,4,5\},\{d\}),(\{1,2,3\},\{b,c\}),(\{3,5\},\{b,d\}),(\{4,5\},\{d,e\}),(\{1,2\},\{a_1,b,c\}),(\{2,3\},\{a_2,b,c\}),(\{2\},\{a_1,a_2,b,c\}),(\{3\},\{a_2,b,c,d\}),(\{4\},\{a_3,d,e\}),(\{5\},\{b,d,e,f\}),(\emptyset,M_a)\}$

下面验证概念$(\{3,4\},\{a,d\})\in L(\mathscr{F}_1)$不在$L_1\cup L_2\cup L_3$中，计算可知：

$L_1=\{(\{1,2,3,5\},\{b\}),(\{3,4,5\},\{d\}),(\{3,5\},\{b,d\}),(\{4,5\},\{d,e\}),(\{5\},\{b,d,e,f\})\}$

$L_2=\{(\{1,2,3\},\{a,b,c\})\}$

$L_3=\{(\{3\},\{a,b,c,d\}),(\{4\},\{a,d,e\})\}$

因此概念$(\{3,4\},\{a,d\})\in L(\mathscr{F}_1)$不在$L_1\cup L_2\cup L_3$中。

例 1 表明，文献[14]中概念粗化更新方法可能会产生概念缺失，换言之，存在$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$，$(Y,D)\notin L_1\cup L_2\cup L_3$。为了分析$(Y,D)$所具有的特征，记：

$$P_A((Y,D))=\{A_i\subseteq A\mid A_i\neq\emptyset, Y\cap A_i^{\downarrow_2}\nsubseteq Y', \forall(Y',D')<(Y,D)\}$$

有下面的结论。

引理 2 令$\mathscr{F}_1=(G,M,I)$和$\mathscr{F}_2=(G,M_a,I_a)$为粗背景和细背景，$A$是$a$粒化生成的覆盖粒层。若$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$且$P_A((Y,D))=\varnothing$，则$Y^{\uparrow_2}\cap A=\varnothing$。

证明：若$Y^{\uparrow_2}\cap A\neq\varnothing$，则存在$A_i=Y^{\uparrow_2}\cap A\subseteq Y^{\uparrow_2}$，即有$Y=Y^{\uparrow_2\downarrow_2}\subseteq A_i^{\downarrow_2}$，因此$Y\cap A_i^{\downarrow_2}=Y$。由于$A_i=Y^{\uparrow_2}\cap A\subseteq A$和$A_i=Y^{\uparrow_2}\cap A\neq\varnothing$，而且对于任意的$(Y',D')<(Y,D)$，由于$Y'\subset Y$，因此$Y'\subset Y\cap A_i^{\downarrow_2}$，$Y\cap A_i^{\downarrow_2}\not\subseteq Y'$，$A_i\in P_A((Y,D))$，与$P_A((Y,D))=\varnothing$矛盾，故$Y^{\uparrow_2}\cap A=\varnothing$。

性质 3 令$\mathscr{F}_1=(G,M,I)$和$\mathscr{F}_2=(G,M_a,I_a)$为粗背景和细背景，$A$是$a$粒化生成的覆盖粒层。若$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$满足以下条件：

1)$a\in D$；

2)$P_A((Y,D))=\varnothing$；

3)$D\backslash\{a\}\in Int(\mathscr{F}_1)$；

则$(Y,D)\notin L_1\cup L_2\cup L_3$。

证明：若$(Y,D)\in L_1\cup L_2$，则(Y,D)可由$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_2)$或$(Y,D\backslash\{a\})\in L(\mathscr{F}_2)$通过引理1中的1)或2)生成，此时有$Y\in Ext(\mathscr{F}_2)$。

下面证明$Y\notin Ext(\mathscr{F}_2)$。由于$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$且满足条件2)，由引理2可知$Y^{\uparrow_2}\cap A=\varnothing$；记$E=M\backslash\{a\}$，则由性质1中的2)有$Y^{\uparrow_2}\cap E=Y^{\uparrow_1}\cap E=D\cap E=D\cap(M\backslash\{a\})=D\backslash\{a\}$，其中$Y^{\uparrow_1}=D$是因为$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$。因此，由性质1中的4)可知$Y^{\uparrow_2}=(Y^{\uparrow_2}\cap E)\cup(Y^{\uparrow_2}\cap A)=D\backslash\{a\}\cup\varnothing=D\backslash\{a\}$。进一步，由于$D\backslash\{a\}\subseteq M\backslash\{a\}=E$，由性质1中的3)可知$Y^{\uparrow_2\downarrow_2}=(D\backslash\{a\})^{\downarrow_2}=(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1}$。此时，由条件3)可知$((D\backslash\{a\})^{\downarrow_1},D\backslash\{a\})\in L(\mathscr{F}_1)$，而条件1)表明$D\backslash\{a\}\neq D$，因此$((D\backslash\{a\})^{\downarrow_1},D\backslash\{a\})\neq(Y,D)$，即有$(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1}\neq Y$，故$Y^{\uparrow_2\downarrow_2}=(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1}\neq Y$，因此$Y\notin Ext(\mathscr{F}_2)$，与$Y\in Ext(\mathscr{F}_2)$矛盾。故$(Y,D)\notin L_1\cup L_2$。

若$(Y,D)\in L_3$，则存在$(X,B)\in L(\mathscr{F}_2)$通过引理1中的3)可以获得$(Y,D)$，其中$(X,B)$满足$B\cap A\neq\varnothing$，使得$(B\backslash A\cup\{a\})^{\downarrow_1}=Y$且$B\backslash A\cup\{a\}=D$。下面证明若$(Y,D)\in L_3$，则$(Y,D)$不满足条件2)。

由于$B\cap A\neq\varnothing$，因此可令$A_i=B\cap A$，则$A_i^{\downarrow_2}=(B\cap A)^{\downarrow_2}$，故$Y\cap A_i^{\downarrow_2}=Y\cap(B\cap A)^{\downarrow_2}=(B\backslash A\cup\{a\})^{\downarrow_1}\cap(B\cap A)^{\downarrow_2}=(B\backslash A)^{\downarrow_1}\cap a^{\downarrow_1}\cap(B\cap A)^{\downarrow_2}$。由于$B\backslash A\subseteq M_a\backslash A=M\backslash\{a\}=E$，由性质1中的3)可知$(B\backslash A)^{\downarrow_1}=(B\backslash A)^{\downarrow_2}$；由于$B\cap A\subseteq A$且$B\cap A\neq\varnothing$，由性质2中的1)可知$(B\cap A)^{\downarrow_2}\subseteq a^{\downarrow_1}$，因此$a^{\downarrow_1}\cap(B\cap A)^{\downarrow_2}=(B\cap A)^{\downarrow_2}$。故$Y\cap A_i^{\downarrow_2}=(B\backslash A)^{\downarrow_1}\cap a^{\downarrow_1}\cap(B\cap A)^{\downarrow_2}=(B\backslash A)^{\downarrow_2}\cap(B\cap A)^{\downarrow_2}=(B\backslash A\cup(B\cap A))^{\downarrow_2}=B^{\downarrow_2}=X$，即$Y\cap A_i^{\downarrow_2}=X$。因此$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1}=X^{\uparrow_1}=(X^{\uparrow_1}\cap E)\cup(X^{\uparrow_1}\cap\{a\})$，由性质1中的2)可知$X^{\uparrow_1}\cap E=X^{\uparrow_2}\cap E=B\cap E=B\cap(M\backslash\{a\})=B\cap(M_a\backslash A)=B\backslash A$，故$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1}=X^{\uparrow_1}=(X^{\uparrow_1}\cap E)\cup(X^{\uparrow_1}\cap\{a\})=B\backslash A\cup(X^{\uparrow_1}\cap\{a\})$。

此时，由$A_i=B\cap A\subseteq B=X^{\uparrow_2}$可知$X=X^{\uparrow_2\downarrow_2}\subseteq A_i^{\downarrow_2}$，结合$\bigcup_{1\leqslant i\leqslant t}a_i^{\downarrow_2}=a^{\downarrow_1}$可知$X\subseteq a^{\downarrow_1}$，进而有$a\in X^{\uparrow_1}$，因此可得$X^{\uparrow_1}\cap\{a\}=\{a\}$。因此$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1}=B\backslash A\cup(X^{\uparrow_1}\cap\{a\})=B\backslash A\cup\{a\}=D$。

此时，对于任意的$(Y',D')<(Y,D)$，由$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1}=D\subset D'$可知$D'\not\subseteq(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1}$，因此$Y\cap A_i^{\downarrow_2}\not\subseteq D'^{\downarrow_1}=Y'$（否则，由$Y\cap A_i^{\downarrow_2}\subseteq D'^{\downarrow_1}$可知$D'=D'^{\downarrow_1\uparrow_1}\subseteq(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1}$，与$D'\not\subseteq(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1}$矛盾）。因此，$A_i$满足对任意的$(Y',D')<(Y,D)$有$Y\cap A_i^{\downarrow_2}\not\subseteq Y'$，再由于$A_i=B\cap A\subseteq A$和$A_i=B\cap A\neq\varnothing$可知，$A_i\in P_A((Y,D))$，与条件2)矛盾。故$(Y,D)\notin L_3$。

综合可知，$(Y,D)\notin L_1\cup L_2\cup L_3$。

在性质3中分析了现有概念粗化更新方法所产生的缺失概念的本质特征，接下来举例验证性质3所描述的概念的存在性。

例2 由例1可知$(\{3,4\},\{a,d\})\in L(\mathscr{F}_1)$，下面验证$(\{3,4\},\{a,d\})$是性质3中所描述的概念：1)显然$a\in\{a,d\}$；2)由表1可知$A=\{a_1,a_2,a_3\}$且$\{A_i^{\downarrow_2}\mid A_i\subseteq A,A_i\neq\varnothing\}=\{\{1,2\},\{2,3\},\{4\},\{2\},\{\varnothing\}\}$，因此$\{\{3,4\}\cap A_i^{\downarrow_2}\mid A_i\subseteq A,A_i\neq\varnothing\}=\{\{\varnothing\},\{3\},\{4\}\}$。再由例1可知$\{(Y',D')\mid(Y',D')<(\{3,4\},\{a,d\})\}=\{(\{3\},\{a,b,c,d\}),(\{4\},\{a,d,e\}),(\varnothing,M)\}$，故不存在$A_i\subseteq A$且$A_i\neq\varnothing$，使得任意的$(Y',D')<(\{3,4\},\{a,d\})$满足$\{3,4\}\cap A_i^{\downarrow_2}\not\subseteq Y'$，因此$P_A((\{3,4\},\{a,d\}))=\varnothing$；3)由例1可知$(\{3,4,5\},\{d\})\in L(\mathscr{F}_1)$，因此$\{d\}\in Int(\mathscr{F}_1)$。因此$(\{3,4\},\{a,d\})$是性质3中所描述的缺失概念，且由例1可知$(\{3,4\},\{a,d\})\notin L_1\cup L_2\cup L_3$。

下面证明性质3所描述的概念为引理1所指的缺失的所有粗概念。首先证明下面的引理3。

引理 3 令$\mathscr{F}_1=(G,M,I)$和$\mathscr{F}_2=(G,M_a,I_a)$为粗背景和细背景，$A$是$a$粒化生成的覆盖粒层。若$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$且$a\in D$且$P_A((Y,D))\neq\varnothing$，则对于任意的$A_i\in P_A((Y,D))$有：

1)$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}\cap A\neq\varnothing$；

2)$(Y\cap A_i^{\downarrow_2},(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2})\in L(\mathscr{F}_2)$；

3)$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}\backslash A\cup\{a\}=D$。

证明：1)由$Y\cap A_i^{\downarrow_2}\subseteq A_i^{\downarrow_2}$可知$A_i^{\downarrow_2\downarrow_2}\subseteq(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}$，结合$A_i\subseteq A_i^{\downarrow_2\downarrow_2}$可知$A_i\subseteq(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}$。此时，由$A_i\in P_A((Y,D))$可知$A_i\subseteq A$且$A_i\neq\varnothing$，故$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}\cap A\supseteq A_i\neq\varnothing$。

2)由于$A_i\subseteq A$且$A_i\neq\varnothing$和$Y\cap A_i^{\downarrow_2}\subseteq A_i^{\downarrow_2}$，由性质2中的2)可知$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2\downarrow_2}\subseteq(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1\downarrow_1}$。由$Y\cap A_i^{\uparrow_2}\subseteq Y$可知$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1\downarrow_1}\subseteq Y^{\uparrow_1\downarrow_1}=Y$，其中$Y^{\uparrow_1\downarrow_1}=Y$是因为$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$。因此，$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2\downarrow_2}\subseteq Y$。进一步，由于$Y\cap A_i^{\downarrow_2}\subseteq A_i^{\downarrow_2}$，因此$A_i\subseteq(Y\cap a_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}$，进而有$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2\downarrow_2}\subseteq A_i^{\downarrow_2}$，故$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2\downarrow_2}\subseteq Y\cap A_i^{\downarrow_2}$。结合$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2\downarrow_2}\supseteq Y\cap A_i^{\downarrow_2}$可知$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2\downarrow_2}=Y\cap A_i^{\downarrow_2}$，因此$(Y\cap A_i^{\downarrow_2},(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2})\in L(\mathscr{F}_2)$。

3)由于$Y\cap A_i^{\downarrow_2}\subseteq Y$，因此$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1\downarrow_1}\subseteq Y^{\uparrow_1\downarrow_1}=Y$，结合$((Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1\downarrow_1},(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1})\in L(\mathscr{F}_1)$可知$((Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1\downarrow_1},(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1})\leqslant(Y,D)$。此时，由$A_i\in P_A((Y,D))$可知，若$(Y',D')<(Y,D)$，则$Y\cap A_i^{\downarrow_2}\not\subseteq Y'$，而由$Y\cap A_i^{\downarrow_2}\subseteq(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1\downarrow_1}$可知，$((Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1\downarrow_1},(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1})\not<(Y,D)$。因此$((Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1\downarrow_1},(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1})=(Y,D)$，即有$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1}=D$。记$E=M\backslash\{a\}$，由性质1中的2)可知$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1}\cap E=(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}\cap E=(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}\cap(M\backslash\{a\})=(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}\cap(M_a\backslash A)=(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}\backslash A$；由$Y\cap A_i^{\downarrow_2}\subseteq Y$可知$Y^{\uparrow_1}\subseteq(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1}$，结合$a\in D=Y^{\uparrow_1}$可知$a\in$

$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1}$，进而有$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1}\cap\{a\}=\{a\}$。因此，由性质 1 中的 4）可知$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1}=((Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1}\cap E)\cup((Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1}\cap\{a\})=(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}\backslash A\cup\{a\}$。再由$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_1}=D$可知$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}\backslash A\cup\{a\}=D$。

下面的性质验证了性质 3 描述的概念正是引理 1 缺失的所有概念。

性质 4 将性质 3 中描述的缺失概念记为L_4，即：

$$L_4=\{(Y,D)\mid a\in D,P_A((Y,D))=\emptyset,D\backslash\{a\}\in Int(\mathscr{F}_1)\}$$

则$L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4=L(\mathscr{F}_1)$。

证明：显然$L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4\subseteq L(\mathscr{F}_1)$。下面证明$L(\mathscr{F}_1)\subseteq L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4$。令$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$，分为以下几种情况：

1）$a\notin D$。首先证明$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_2)$。由于$a\notin D=Y^{\uparrow_1}$，因此$Y\not\subseteq a^{\downarrow_1}$。结合$\bigcup_{1\leqslant i\leqslant t}a_i^{\downarrow_2}=a^{\downarrow_1}$可知，对于任意的$a_i\in A$有$Y\not\subseteq a_i^{\downarrow_2}$，因此有$a_i\notin Y^{\uparrow_2}$，可得$Y^{\uparrow_2}\cap A=\emptyset$；记$E=M\backslash\{a\}$，则由性质 1 中的 2）有$Y^{\uparrow_2}\cap E=Y^{\uparrow_1}\cap E=D\cap E=D\cap(M\backslash\{a\})=D\backslash\{a\}=D$，其中$D\backslash\{a\}=D$是因为$a\notin D$。因此，由性质 1 中的 4）有$Y^{\uparrow_2}=(Y^{\uparrow_2}\cap E)\cup(Y^{\uparrow_2}\cap A)=D\cup\emptyset=D$。同时，由于$D=D\backslash\{a\}\subseteq E=M\backslash\{a\}$，由性质 1 中的 3）可知$D^{\downarrow_2}=D^{\downarrow_1}=Y$，故$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_2)$。其次证明$A\cap D=\emptyset$。由于$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$，因此$A\cap D=\emptyset$。因为$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_2)$且$A\cap D=\emptyset$且$Y\not\subseteq a^{\downarrow_1}$，所以$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$可以由$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_2)$通过引理 1 中的 1）获得，因此$(Y,D)\in L_1$。

2）$a\in D$且$P_A((Y,D))\neq\emptyset$。令$A_i\in P_A((Y,D))$，则由引理 3 可知$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\downarrow_2}\cap A\neq\emptyset$，$(Y\cap A_i^{\downarrow_2},(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2})\in L(\mathscr{F}_2)$和$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}\backslash A\cup\{a\}=D$均成立。因此$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$可以由$(Y\cap A_i^{\downarrow_2},(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2})\in L(\mathscr{F}_2)$通过引理 1 中的 3）可以获得，因此$(Y,D)\in L_3$。

3）$a\in D$且$P_A((Y,D))=\emptyset$且$D\backslash\{a\}\notin Int(\mathscr{F}_1)$。首先证明$(Y,D\backslash\{a\})\in L(\mathscr{F}_2)$。由于$D\backslash\{a\}\notin Int(\mathscr{F}_1)$，因此$(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1}\neq D\backslash\{a\}$，结合$(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1}\supseteq D\backslash\{a\}$可知$(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1}\supset D\backslash\{a\}$。此时，由于$D\backslash\{a\}\subseteq D$，因此$(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1}\subseteq D^{\downarrow_1\uparrow_1}=D$，故$(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1}=D$，$(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1\downarrow_1}=D^{\downarrow_1}=Y$。进一步，由于$D\backslash\{a\}\subseteq E=M\backslash\{a\}$，由性质 1 中的 3）可知$(D\backslash\{a\})^{\downarrow_2}=(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1}=(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1\downarrow_1}=Y$。同时，由于$(Y,D)\in L(F_1)$且$P_A((Y,D))=\emptyset$，由引理 2 可知$Y^{\uparrow_2}\cap A=\emptyset$，因此$Y^{\uparrow_2}=(Y^{\uparrow_2}\cap E)\cup(Y^{\uparrow_2}\cap A)=D\backslash\{a\}\cup\emptyset=D\backslash\{a\}$，其中由性质 1 中的 2）可知$Y^{\uparrow_2}\cap E=Y^{\uparrow_1}\cap E=D\cap E=D\cap(M\backslash\{a\})=D\backslash\{a\}$。故$(Y,D\backslash\{a\})\in L(F_2)$。其次证明$D\backslash\{a\}\cap A=\emptyset$。由于$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$，因此$D\cap A=\emptyset$，进而有$D\backslash\{a\}\cap A=\emptyset$。最后证明$Y\subseteq a^{\downarrow_1}$。由于$a\in D=Y^{\uparrow_1}$，因此$a\in Y^{\uparrow_1}$，即有$Y\subseteq a^{\downarrow_1}$。因为$(Y,D\backslash\{a\})\in L(\mathscr{F}_2)$且$D\backslash\{a\}\cap A=\emptyset$且$Y\subseteq a^{\downarrow_1}$，所以$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$可以由$(Y,D\backslash\{a\})\in L(\mathscr{F}_2)$通过引理 1 获得，故$(Y,D)\in L_2$。

4）$a\in D$且$P_A((Y,D))=\emptyset$且$D\backslash\{a\}\in Int(F_1)$。由性质 3 可知$(Y,D)\in L_4$。

由性质 4 可知，L_4是引理 1 缺失的全部概念，因此希望通过生成L_4来完善概念粗化算法。

下面提出了一个新的定理，通过部分细概念来生成缺失概念L_4。

定理 1 令$\mathscr{F}_1=(G,M,I)$和$\mathscr{F}_2=(G,M_a,I_a)$为粗背景和细背景，$A$是$a$粒化生成的覆盖粒层，$(X,B)\in L(\mathscr{F}_2)$。若$(X,B)$满足$A\cap B=\emptyset$，$X\not\subseteq a^{\downarrow_1}$，且对任意的$(X',B')<(X,B)$有$X\cap a^{\downarrow_1}\not\subseteq X'$，则有$(X\cap a^{\downarrow_1},B\cup\{a\})\in L(\mathscr{F}_1)$。

证明：记$E=M\backslash\{a\}$，因为$A\cap B=\emptyset$，所以$B=B\backslash A$，故$B=B\backslash A\subseteq M_a\backslash A=M\backslash\{a\}=E$。由于$B\subseteq E$，由性质 1 中的 3）可知$(B\cup\{a\})^{\downarrow_1}=B^{\downarrow_1}\cap a^{\downarrow_1}=B^{\downarrow_2}\cap a^{\downarrow_1}=X\cap a^{\downarrow_1}$，其中$B^{\downarrow_2}=X$是因为$(X,B)\in L(\mathscr{F}_2)$。

下面证明$(X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_1}=B\cup\{a\}$。由于$X\cap a^{\downarrow_1}\subseteq X$，因此$(X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_2\downarrow_2}\subseteq X^{\uparrow_2\downarrow_2}=X$，进而可得$((X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_2\downarrow_2},(X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_2})\leqslant(X,B)$；由假设可知，若$(X',B')<(X,B)$，则$X\cap a^{\downarrow_1}\not\subseteq X'$，结合$X\cap a^{\downarrow_1}\subseteq(X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_2\downarrow_2}$可知$((X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_2\downarrow_2},(X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_2})\not<(X,B)$。因此$((X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_2\downarrow_2},(X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_2})=(X,B)$，即有$(X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_2}=B$。进一步，由性质 1 中的 2）可知$(X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_1}\cap E=(X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_2}\cap E=(X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_2}\cap(M\backslash\{a\})=B\cap(M_a\backslash A)=B\backslash A=B$，进而由性质 1 中的 4）可知$(X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_1}=((X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_1}\cap E)\cup((X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_1}\cap\{a\})=B\cup\{a\}$，其中$(X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_1}\cap\{a\}=\{a\}$的原因是，由$X\cap a^{\downarrow_1}\subseteq a^{\downarrow_1}$可知$\{a\}\subseteq(X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_1}$。

综合$(B\cup\{a\})^{\downarrow_1}=X\cap a^{\downarrow_1}$且$(X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_1}=B\cup\{a\}$，可知$(X\cap a^{\downarrow_1},B\cup\{a\})\in L(\mathscr{F}_1)$。

在下面的性质中表明，定理 1 生成了所有的缺失概念L_4。

性质 5 将定理 1 生成的粗概念记作L_5，即：

$$L_5=\{(X\cap a^{\downarrow_1},B\cup\{a\})\mid(X,B)\in L(\mathscr{F}_2),B\cap A=\emptyset,$$
$$X\not\subseteq a^{\downarrow_1},X\cap a^{\downarrow_1}\not\subseteq X',\forall(X',B')<(X,B)\}$$

则$L_4\subseteq L_5$。

证明：若$(Y,D)\in L_4$，令$X=(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1}$且$B=D\backslash\{a\}$，下面证明$(X,B)$满足以下 4 个条件：$(X,B)\in L(\mathscr{F}_2)$，$B\cap A=\emptyset$，$X\not\subseteq a^{\downarrow_1}$，对任意的$(X',B')<(X,B)$有$X\cap a^{\downarrow_1}\not\subseteq X'$。

由于$(Y,D)\in L_4$，由性质 3 可知$D\backslash\{a\}\in Int(\mathscr{F}_1)$，因此$(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1}=D\backslash\{a\}$。再由于$a\notin D\backslash\{a\}$，因此$a\notin(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1}=X^{\uparrow_1}$，即有$X\not\subseteq a^{\downarrow_1}$，结合$\bigcup_{1\leqslant i\leqslant t}a_i^{\downarrow_2}=a^{\downarrow_1}$可知，对于任意的$a_i\in A$有$X\not\subseteq a_i^{\downarrow_2}$，进而有$a_i\notin X^{\uparrow_2}$，因此可得$X^{\uparrow_2}\cap A=\emptyset$。进一步，记$E=M\backslash\{a\}$，由性质 1 中的 2）可知$X^{\uparrow_2}\cap E=X^{\uparrow_1}\cap E=(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1}\cap E=(D\backslash\{a\})\cap E=(D\backslash\{a\})\cap(M\backslash\{a\})=D\backslash\{a\}=B$，因此，由性质 1 中的 4）有$X^{\uparrow_2}=(X^{\uparrow_2}\cap E)\cup(X^{\uparrow_2}\cap A)=B\cup\emptyset=B$。同时，由于$B=D\backslash\{a\}\subseteq M\backslash\{a\}=E$，由性质 1 中的 3）可知$B^{\downarrow_2}=B^{\downarrow_1}=(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1}=X$，故$(X,B)\in L(\mathscr{F}_2)$。

由于$(Y,D)\in L_4$，由性质 3 可知$D\backslash\{a\}\in Int(\mathscr{F}_1)$，因此$B\cap A=D\backslash\{a\}\cap A=\emptyset$。

由$a\notin D\backslash\{a\}$可知$a\notin(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1}=X^{\uparrow_1}$，即有$X\not\subseteq a^{\downarrow_1}$。

若存在$(X',B')\in L(\mathscr{F}_2)$使得$(X',B')<(X,B)$且$X\cap a^{\downarrow_1}\subseteq X'$，则$B'=X'^{\uparrow_2}\subseteq(X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_2}$，结合$B\subset B'$可知$B\subset$

$B'\subseteq(X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_2}$。由性质 1 中的 2)可知$(X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_2}\cap E=(X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_1}\cap E=((D\backslash\{a\})^{\downarrow_1}\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_1}\cap E=(D\backslash\{a\}\cup\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1}\cap E=D^{\downarrow_1\uparrow_1}\cap E=D\cap E=D\cap(M\backslash\{a\})=D\backslash\{a\}=B$,其中 $D\backslash\{a\}\cup\{a\}=D$ 是因为 $a\in D$,$D^{\downarrow_1\uparrow_1}=D$ 是因为$(Y,D)\in L(F_1)$。进一步,由性质 1 中的 4)可知$(X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_2}=((X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_2}\cap E)\cup((X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_2}\cap A)=B\cup((X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_2}\cap A)\subseteq B\cup A$。再由 $B\subset B'\subseteq(X\cap a^{\downarrow_1})^{\uparrow_2}$ 可知 $B\subset B'\subseteq B\cup A$,因此$B'\cap A\neq\emptyset$。进一步,因为 $B=D\backslash\{a\}\subseteq M\backslash\{a\}$,所以$B\cap A=\emptyset$,故$B'\backslash A\cup\{a\}=B\cup\{a\}=D\backslash\{a\}\cup\{a\}=D$。综合结论$(X',B')\in L(\mathscr{F}_2)$,$B'\cap A\neq\emptyset$ 和$B'\backslash A\cup\{a\}=D$ 可知,(Y,D)可以由(X',B')通过引理 1 中的 3)获得,即$(Y,D)\in L_3$,与$(Y,D)\in L_4$矛盾。故不存在$(X',B')<(X,B)$满足 $X\cap a^{\downarrow_1}\subseteq X'$,即任意的$(X',B')<(X,B)$均满足 $X\cap a^{\downarrow_1}\not\subseteq X'$。

因此,若$(Y,D)\in L_4$,令 $X=(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1}$ 且 $B=D\backslash\{a\}$,则$(X,B)\in L(\mathscr{F}_2)$,$B\cap A=\emptyset$,$X\not\subseteq a^{\downarrow_1}$ 且对任意的$(X',B')<(X,B)$有 $X\cap a^{\downarrow_1}\not\subseteq X'$。又因为 $X\cap a^{\downarrow_1}=(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1}\cap a^{\downarrow_1}=(D\backslash\{a\}\cup\{a\})^{\downarrow_1}=D^{\downarrow_1}=Y$ 且 $B\cup\{a\}=D\backslash\{a\}\cup\{a\}=D$,因此应用定理 1 到$(X,B)$可以获得$(Y,D)$,即有$(Y,D)\in L_5$。因此$L_4\subseteq L_5$。

由性质 5 可知$L_4\subseteq L_5$,因此定理 1 不仅生成了L_4,还可能生成其他粗概念。理论上,只需生成L_4,即L_5的一个特定子集。然而,从实践上,由于需要生成所有的粗概念,且$L_5\subseteq L(\mathscr{F}_1)$,因此不需要区分$L_5$中的概念是否属于$L_4$。因此,可组合引理 1 和定理 1 得到属性粒化情形下形式概念粗化更新算法,如算法 1 所示。

算法 1 概念粗化算法

输入:$L(\mathscr{F}_2)$

输出:$L(\mathscr{F}_1)$

1. $L(\mathscr{F}_1)\leftarrow\{\}$;
2. for each $(X,B)\in L(F_2)$ do:
3.   if $A\cap B=\emptyset$:
4.   if $X\not\subseteq a^{\downarrow_1}$:
5. $L(\mathscr{F}_1)\leftarrow L(\mathscr{F}_1)\cup(X,B)$;
6.   if $\forall(X',B')<(X,B)$有 $X\cap a^{\downarrow_1}\not\subseteq X'$:
7. $L(\mathscr{F}_1)\leftarrow L(\mathscr{F}_1)\cup(X\cap a^{\downarrow_1},B\cup\{a\})$;
8.   else if $X\subseteq a^{\downarrow_1}$:
9. $L(\mathscr{F}_1)\leftarrow L(\mathscr{F}_1)\cup(X,B\cup\{a\})$;
10.   else if $A\cap B\neq\emptyset$:
11. $L(\mathscr{F}_1)\leftarrow L(\mathscr{F}_1)\cup((B\backslash A\cup a)^{\downarrow_1},B\backslash A\cup\{a\})$.

算法 1 通过更新 $L(\mathscr{F}_2)$来生成 $L(\mathscr{F}_1)$(见算法 1 中的步骤 2—步骤 11)。若$(X,B)\in L(\mathscr{F}_2)$满足 $A\cap B=\emptyset$ 且 $X\not\subseteq a^{\downarrow_1}$,则可应用引理 1 中的 1)生成$L_1$(见算法 1 中的步骤 5);若$(X,B)$满足 $A\cap B=\emptyset$,$X\not\subseteq a^{\downarrow_1}$ 且对任意的$(X',B')<(X,B)$有 $X\cap a^{\downarrow_1}\not\subseteq X'$,则可应用定理 1 生成$L_5$($L_5$包含$L_4$)(见算法 1 中的步骤 7);若$(X,B)$满足 $A\cap B=\emptyset$ 且 $X\subseteq a^{\downarrow_1}$,则可应用引理 1 中的 2)生成$L_2$(见算法 1 中的步骤 9);若$(X,B)$满足 $A\cap B\neq\emptyset$,则可应用引理 1 中的 2)生成L_3(见算法 1 中的步骤 11)。

下面分析算法 1 的时间复杂度。总体上看,算法 1 只需要遍历一次 $L(\mathscr{F}_2)$即可生成 $L(\mathscr{F}_1)$,因此算法 1 的时间复杂度正比于 $L(\mathscr{F}_2)$中的概念数。事实上,算法 1 中最复杂的步骤为步骤 6,该步骤需要对所有小于(X,B)的概念(X',B')判断 $X\cap a^{\downarrow_1}\not\subseteq X'$ 是否成立,因此算法的最坏时间复杂度为 $O(|L(\mathscr{F}_2)|^2)$。

3.2 概念细化算法

文献[14]首先根据粗概念的外延与细属性的关系以及内涵与粗属性的关系,将粗概念分为 3 类,如引理 4 所示。

引理 4[14] 令$\mathscr{F}_1=(G,M,I)$和$\mathscr{F}_2=(G,M_a,I_a)$为粗背景和细背景,$A$ 是 a 粒化生成的覆盖粒层。假设$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$,则有:

1)若 $a\notin D$,则$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_2)$;

2)若 $a\in D$ 且 $\forall a_i\in A$ 有 $Y\not\subseteq a_i^{\downarrow_2}$,则$((D\backslash\{a\})^{\downarrow_2},D\backslash\{a\})\in L(\mathscr{F}_2)$;

3)若 $a\in D$,记 $C_A(Y)=\{A_i\subseteq A\mid A_i\neq\emptyset,Y\cap A_i^{\downarrow_2}\neq\emptyset\}$,则对任意的$A_i\in C_A(Y)$有$(Y\cap A_i^{\downarrow_2},(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2})\in L(\mathscr{F}_2)$。

将引理 4 中生成的细概念集合分别记作H_1,H_2,H_3,即:

$H_1=\{(Y,D)\mid(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1),a\notin D\}$

$H_2=\{((D\backslash\{a\})^{\downarrow_2},D\backslash\{a\})\mid(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1),a\in D,\forall a_i\in A$ 有 $Y\not\subseteq a_i^{\downarrow_2}\}$

$H_3=\{(Y\cap A_i^{\downarrow_2},(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2})\mid(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1),a\in D,A_i\in C_A(Y)\}$

文献[14]的结论表明,$L(\mathscr{F}_1)=H_1\cup H_2\cup H_3$。

下面分析引理 4 生成细概念的时间复杂度,指出其中较为耗时的步骤,并给出改进方法。

显然,引理 4 也只需要遍历一次 $L(\mathscr{F}_1)$即可生成 $L(\mathscr{F}_2)$,因此其时间复杂度正比于 $L(\mathscr{F}_1)$中的概念数。引理 4 对满足不同条件的粗概念采取不同的更新方法,下面分 3 种情况讨论时间复杂度。设$\mathscr{F}_1$和$\mathscr{F}_2$中属性数为m_1和m_2,对象数为 n,容易得出:

1)引理 4 中的 1)生成H_1的时间复杂度为 $O(|L(\mathscr{F}_1)|m_1)$;

2)引理 4 中的 2)生成H_2的时间复杂度为 $O(|L(\mathscr{F}_1)|m_2n)$;

3)引理 4 中的 3)生成H_3的时间复杂度为 $O(|L(\mathscr{F}_1)|2^{|A|}m_2n)$。

由于引理 4 中的 2)和 3)的时间复杂度较高,且均与$|L(\mathscr{F}_1)|m_2n$ 相关,因此下文将改进引理 4 中的 2)和 3),降低算法的时间复杂度。

首先,发现H_1与H_2中存在相同的细概念,即存在细概念可以同时被引理 4 中的 1)和 2)生成,如例 3 所示。

例 3 由表 1 计算可知:

$H_1=\{(\{1,2,3,5\},\{b\}),(\{3,4,5\},\{d\}),(\{3,5\},\{b,d\}),(\{4,5\},\{d,e\}),(\{5\},\{b,d,e,f\})\}$

$H_2=\{(\{1,2,3\},\{b,c\}),(\{3,4,5\},\{d\})\}$

$H_3=\{(\{1,2\},\{a_1,b,c\}),(\{2,3\},\{a_2,b,c\}),(\{2\},\{a_1,a_2,b,c\}),(\{4\},\{a,d,e\}),(\{3\},\{a,b,c,d\})\}$

因此$H_2\cap H_1=\{(\{3,4,5\},\{d\})\}\neq\emptyset$。

定理 2 由例 3 可知,在已生成H_1和H_3的前提下,只需生成$H_2\backslash H_1$便可获得全部细概念。下面对引理 4 中的 2)进

行优化，使得恰好生成$H_2 \backslash H_1$。令$\mathscr{F}_1=(G,M,I)$和$\mathscr{F}_2=(G,M_a,I_a)$为粗背景和细背景，$A$是$a$粒化生成的覆盖粒层。若$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$且满足以下条件：

1) $a\in D$；

2) $\forall a_i\in A$有$Y\not\subseteq a_i^{\downarrow_2}$；

3) $D\backslash\{a\}\notin Int(\mathscr{F}_1)$

则$(Y,D\backslash\{a\})\in L(\mathscr{F}_2)$。进一步，将满足上述条件生成的细概念记为$H_4$，即：

$$H_4=\{(Y,D\backslash\{a\})\mid(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1),a\in D,\forall a_i\in A \text{ 有 } Y\notin a_i^{\downarrow_2},D\backslash\{a\}\notin Int(\mathscr{F}_1)\}$$

则$H_4=H_2\backslash H_1$。

证明：由$D\backslash\{a\}\notin Int(\mathscr{F}_1)$可知$D\backslash\{a\}\neq(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1}$，结合$D\backslash\{a\}\subseteq(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1}$可知$D\backslash\{a\}\subset(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1}$。同时，由$D\backslash\{a\}\subseteq D$可知$(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1}\subseteq D^{\downarrow_1\uparrow_1}=D$，故$D\backslash\{a\}\subset(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1}\subseteq D$，此时必有$a\in(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1}=D$，即$(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1\downarrow_1}=D^{\downarrow_1}=Y$。进一步，由于$D\backslash\{a\}\subseteq M\backslash\{a\}$，由性质1中的3)可知$(D\backslash\{a\})^{\downarrow_2}=(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1}=(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1\downarrow_1}=Y$。此时，由引理4中的2)可知$((D\backslash\{a\})^{\downarrow_2},D\backslash\{a\})\in L(\mathscr{F}_2)$，故$(Y,D\backslash\{a\})\in L(\mathscr{F}_2)$。

进一步，若$(X,B)\in H_4$，则存在$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$满足$a\in D$，$\forall a_i\in A$有$Y\not\subseteq a_i^{\downarrow_2}$和$D\backslash\{a\}\notin Int(\mathscr{F}_1)$，使得$Y=X$且$D\backslash\{a\}=B$。下面证明$(X,B)\in H_2\backslash H_1$。

由于$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$且$a\in D$且$\forall a_i\in A$有$Y\not\subseteq a_i^{\downarrow_2}$，由引理4中的2)可知$((D\backslash\{a\})^{\downarrow_1},D\backslash\{a\})\in L(\mathscr{F}_2)$，因此$((D\backslash\{a\})^{\downarrow_1},D\backslash\{a\})\in H_2$。由于$D\backslash\{a\}=B$，为了证明$(X,B)=((D\backslash\{a\})^{\uparrow_1},D\backslash\{a\})\in H_2$，只需证明$(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1}=X$。事实上，由于$(X,B)\in L(\mathscr{F}_2)$，因此$B^{\downarrow_2}=X$，结合$D\backslash\{a\}=B$可知$(D\backslash\{a\})^{\downarrow_2}=X$。此时，记$E=M\backslash\{a\}$，由于$D\backslash\{a\}\subseteq E$，由性质1中的3)可知$(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1}=(D\backslash\{a\})^{\downarrow_2}$，故$(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1}=X$。

此时，若$(X,B)\in H_1$，则存在$(Y',D')\in L(\mathscr{F}_1)$通过引理4中的1)可以获得$(X,B)$，$(Y',D')$满足$a\notin D'$，$Y'=X$且$D'=B$，因此有$(X,B)=(Y',D')\in L(\mathscr{F}_1)$。然而，由于$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$且$a\in D$，因此$(Y,D\backslash\{a\})\notin L(\mathscr{F}_1)$，即$(X,B)\notin L(\mathscr{F}_1)$，与$(X,B)\in L(\mathscr{F}_1)$矛盾，故$(X,B)\notin H_2$。综合$(X,B)\in H_2$和$(X,B)\notin H_2$，可得$(X,B)\in H_2\backslash H_1$。

反之，若$(X,B)\in H_2\backslash H_1$，则存在$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$通过引理4中的2)可以获得$(X,B)$，$(Y,D)$满足$a\in D$，$\forall a_i\in A$有$Y\not\subseteq a_i^{\downarrow_2}$，$Y=X$且$D\backslash\{a\}=B$。下面证明$(X,B)\in H_4$，只需证$(Y,D)$满足$D\backslash\{a\}\notin Int(\mathscr{F}_1)$。

由于$D\backslash\{a\}\subseteq M\backslash\{a\}$，由性质1中的3)可知$(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1}=(D\backslash\{a\})^{\downarrow_2}$，因此$(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1}=(D\backslash\{a\})^{\downarrow_2\uparrow_1}=B^{\downarrow_2\uparrow_1}=X^{\uparrow_1}=Y^{\uparrow_1}=D$。此时，由于$a\in D$，因此$D\neq D\backslash\{a\}$，故$(D\backslash\{a\})^{\downarrow_1\uparrow_1}=D\neq D\backslash\{a\}$，$D\backslash\{a\}\notin Int(\mathscr{F}_1)$。

下面分析定理2中生成$H_2\backslash H_1$的时间复杂度。为了应用定理2，需要判断$D\backslash\{a\}\notin Int(\mathscr{F}_1)$，此时需要遍历$L(\mathscr{F}_1)$。在实践中，可以将$L(\mathscr{F}_1)$中的全部概念内涵用哈希表存储起来，此时判断$D\backslash\{a\}\notin Int(\mathscr{F}_1)$的时间复杂度为$O(1)$。由于判断定理2中的2)的时间复杂度为$O(|L(\mathscr{F}_1)|(m_1+|A|n))$，因此定理2中生成$H_2\backslash H_1$的时间复杂度为$O(|L(\mathscr{F}_1)|(m_1+|A|n))$，优于引理4中的2)生成$H_2$的时间复杂度$O(|L(\mathscr{F}_1)|m_2 n)$。因此，定理2通过减少冗余概念的生成，降低了原有算法的时间复杂度。

接下来对引理4中的3)进行优化。当应用引理4中的3)生成$(Y\cap A_i^{\downarrow_2},(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2})\in H_3$时，首先生成外延$Y\cap A_i^{\downarrow_2}$，再通过计算$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}$生成内涵，而计算$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}$需要遍历所有的属性，因此时间复杂度较高。

下面对引理4中的3)进行优化。首先根据内涵的属性数对$L(\mathscr{F}_1)$中的粗概念降序排序。此时，记$(Y_1,D_1)\prec(Y_2,D_2)$表示排序后(Y_1,D_1)先于(Y_2,D_2)。显然，若$(Y_1,D_1)\prec(Y_2,D_2)$，则$|D_2|\leqslant|D_1|$；反之，若$(Y_1,D_1),(Y_2,D_2)\in L(\mathscr{F}_1)$且$|D_2|\leqslant|D_1|$，则$(Y_1,D_1)\prec(Y_2,D_2)$。另外，当应用引理4中的3)生成某个$(Y\cap A_i^{\downarrow_2},(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2})$时，记已生成的细概念外延集合$E^{(Y,D)}=E_1^{(Y,D)}\cup E_3^{(Y,D)}\cup E_4^{(Y,D)}$，其中$E_1^{(Y,D)}$，$E_3^{(Y,D)}$，$E_4^{(Y,D)}$分别表示应用引理4中的1)、引理4中的3)和定理2生成的细概念外延集合。

定理3 令$\mathscr{F}_1=(G,M,I)$和$\mathscr{F}_2=(G,M_a,I_a)$为粗背景和细背景，$A$是$a$粒化生成的覆盖粒层。若$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$且$a\in D$，记$C_A(Y)=\{A_i\subseteq A\mid A_i\neq\emptyset,Y\cap A_i^{\downarrow_2}\neq\emptyset\}$，$R_A((Y,D))=\{A_i\in C_A(Y)\mid Y\cap A_i^{\downarrow_2}\notin E^{(Y,D)}\}$。若$A_i\in R_A((Y,D))$，则$(Y\cap A_i^{\downarrow_2},D\backslash\{a\}\cup(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_A})\in L(\mathscr{F}_2)$，其中$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_A}=(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}\cap A$。进一步，将由此生成的细概念记作$H_5$，即：

$$H_5=\{(Y\cap A_i^{\downarrow_2},D\backslash\{a\}\cup(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_A})\mid(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1),a\in D,A_i\in R_A((Y,D))\}$$则$H_5=H_3$。

证明由引理4中的3)，只需证$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}=D\backslash\{a\}\cup(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_A}$。记：

$$P_A((Y,D))=\{A_i\subseteq A\mid A_i\neq\emptyset,Y\cap A_i^{\downarrow_2}\not\subseteq Y',\forall(Y',D')\prec(Y,D)\}$$

首先证明$A_i\in P_A((Y,D))$。若$A_i\notin P_A((Y,D))$，由于$A_i\in R_A((Y,D))\subseteq C_A(Y)$，有$A_i\neq\emptyset$，因此存在$(Y',D')\prec(Y,D)$有$Y\cap A_i^{\downarrow_2}\subseteq Y'$，结合$Y\cap A_i^{\downarrow_2}\subseteq A_i^{\downarrow_2}$可知$Y\cap A_i^{\downarrow_2}\subseteq Y'\cap A_i^{\downarrow_2}$。此时，由$Y'\subset Y$可知$Y'\cap A_i^{\downarrow_2}\subseteq Y\cap A_i^{\downarrow_2}$，故$Y'\cap A_i^{\downarrow_2}=Y\cap A_i^{\downarrow_2}$。再由$A_i\in C_A(Y)$可知$Y'\cap A_i^{\downarrow_2}=Y\cap A_i^{\downarrow_2}\neq\emptyset$，因此$A_i\in C_A(Y')$。

此时，由$(Y',D')\prec(Y,D)$可知$D\subset D'$，结合$a\in D$可知$a\in D\subset D'$，故(Y',D')可应用引理4中的3)生成$(Y'\cap A_i^{\downarrow_2},(Y'\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2})\in L(\mathscr{F}_2)$。

此时，由$(Y',D')\prec(Y,D)$可知$D\subset D'$，$|D|<|D'|$，因此可得$(Y',D')\prec(Y,D)$，即在使用(Y,D)生成$(Y\cap A_i^{\downarrow_2},D\backslash\{a\}\cup(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_A})$之前，$(Y',D')$已经生成了$(Y'\cap A_i^{\downarrow_2},(Y'\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2})$，故$Y'\cap A_i^{\downarrow_2}\in E_3^{(Y,D)}$，结合$Y'\cap A_i^{\downarrow_2}=Y\cap A_i^{\downarrow_2}$可知$Y\cap A_i^{\downarrow_2}\in E_3^{(Y,D)}\subseteq E^{(Y,D)}$。再结合$A_i\in C_A(Y)$可知$A_i\notin R_A((Y,D))$，与$A_i\in R_A((Y,D))$矛盾。故$A_i\in P_A((Y,D))$。

此时有$(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$，$a\in D$且$A_i\in P_A((Y,D))\neq\emptyset$，由引理3可知$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}\backslash A\cup\{a\}=D$，因为$a\notin(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}$，所以$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}\backslash A=D\backslash\{a\}$，结合$(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}\backslash A=(Y\cap$

$A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}\cap(M_a\setminus A)=(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}\cap E$ 可知 $(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}\cap E=D\setminus\{a\}$。因此，由性质 1 中的 4) 可知 $(Y\cap A_i)^{\uparrow_2}=((Y\cap A_i)^{\uparrow_2}\cap E)\cup((Y\cap A_i)^{\uparrow_2}\cap A)=D\setminus\{a\}\cup((Y\cap A_i)^{\uparrow_2}\cap A)=D\setminus\{a\}\cup(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_A}$。故 $(Y\cap A_i^{\downarrow_2},D\setminus\{a\}\cup(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_A}\in L(\mathscr{F}_2)$。

下面证明 $H_5=H_3$。

若 $(X,B)\in H_3$，则存在 $(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$ 通过引理 4 中的 3) 可以获得 (X,B)，其中 (Y,D) 满足 $a\in D$，且存在 $A_i\in C_A(Y)$ 使得 $Y\cap A_i^{\downarrow_2}=X$ 和 $(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}=B$。

由 $Y\cap A_i^{\downarrow_2}\subseteq A_i^{\downarrow_2}$ 可知 $A_i^{\downarrow_2\uparrow_2}\subseteq(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}$，结合 $A_i\subseteq A_i^{\downarrow_2\uparrow_2}$ 可知 $A_i\subseteq(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}$，再由于 $(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}=B$，有 $A_i\subseteq B$，因此 $B\cap A\supseteq A_i\neq\emptyset$。此时，假设 $(X,B)\in H_1\cup H_4$，则 $B\cap A=\emptyset$，与 $B\cap A\neq\emptyset$ 矛盾，故 $(X,B)\notin H_1\cup H_4$，可得 $X\notin E_1^{(Y,D)}\cup E_4^{(Y,D)}$。

此时，假设 (Y,D) 可以最早通过引理 4 中的 3) 获得 (X,B)，故在 (Y,D) 生成 (X,B) 之前，$X\notin E_3^{(Y,D)}$，即 $X\notin E^{(Y,D)}$。结合 $Y\cap A_i^{\downarrow_2}=X$ 可知 $Y\cap A_i^{\downarrow_2}\notin E_3^{(Y,D)}$，结合 $A_i\in C_A(Y)$ 可知 $A_i\in R_A((Y,D))$。再由 $(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$ 且 $a\in D$ 且 $Y\cap A_i^{\downarrow_2}=X$ 可知，(X,B) 可由 (Y,D) 通过定理 3 生成，即 $(X,B)\in H_5$。

反之，若 $(X,B)\in H_5$，则存在 $(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$ 可以获得 (X,B)，其中 (Y,D) 满足 $a\in D$，且存在 $A_i\in R_A((Y,D))$ 使得 $Y\cap A_i^{\downarrow_2}=X$。

由 $A_i\in R_A((Y,D))$ 可知 $A_i\in C_A(Y)$。此时，由于 $(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$ 且 $a\in D$ 且 $Y\cap A_i^{\downarrow_2}=X$，故 (X,B) 可由 (Y,D) 通过引理 4 中的 3) 生成，即 $(X,B)\in H_3$。

下面分析定理 3 生成 H_5 的时间复杂度。由于判定定理 3 时需要对 $L(\mathscr{F}_1)$ 排序，因此计算对 $L(\mathscr{F}_1)$ 排序所需时间复杂度。首先，排序前需要计算 $L(\mathscr{F}_1)$ 中每个概念内涵包含的属性数量，所需时间复杂度为 $O(|L(\mathscr{F}_1)|m_1)$；其次，对 $L(\mathscr{F}_1)$ 排序所需时间复杂度为 $O(|L(\mathscr{F}_1)|\log|L(\mathscr{F}_1)|)$，结合 $|L(\mathscr{F}_1)|\leqslant 2^{m_1}$ 可知 $O(|L(\mathscr{F}_1)|\log|L(\mathscr{F}_1)|)O\leqslant(|L(\mathscr{F}_1)|m_1)$。因此，对 $L(\mathscr{F}_1)$ 排序所需时间复杂度为 $O(|L(\mathscr{F}_1)|m_1)$。由定理 3 可知，计算 $(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2}$ 只需要遍历细属性，无需遍历所有的属性，降低了时间复杂度，故定理 3 生成 H_5 的时间复杂度为 $O(|L(\mathscr{F}_1)|2^{|A|}|A|n+|L(\mathscr{F}_1)|m_1)$，优于引理 4 中的 3) 生成 H_3 的时间复杂度 $O(|L(\mathscr{F}_1)|2^{|A|}m_2n)$。因此，定理 3 有效地利用了已生成细概念的外延集合 $E^{(Y,D)}$ 来更新生成新的细概念，从而降低原有算法的时间复杂度。

结合引理 4 中的 1)、定理 2 和定理 3，可以得到属性粒化情形下形式概念细化更新算法，如算法 2 所示。

算法 2　概念细化算法

输入：$L(\mathscr{F}_1)$

输出：$L(\mathscr{F}_2)$

1. $L(\mathscr{F}_2)\leftarrow\{(\emptyset,M_a)\}$；
2. $E^{(Y,D)}=\{\}$；
3. 根据 $|D|$ 对 $L(\mathscr{F}_1)$ 中 (Y,D) 降序排序
4. for each $(Y,D)\in L(\mathscr{F}_1)$ do：
5. 　if $a\notin D$：
6. 　　$L(\mathscr{F}_2)\leftarrow L(\mathscr{F}_2)\cup(Y,D)$；
7. 　if $a\in D$：
8. 　　if $\forall a_i\in A$ 有 $Y\not\subseteq a_i^{\downarrow_2}$ and $D\setminus\{a\}\notin Int(\mathscr{F}_1)$：
9. 　　　$L(\mathscr{F}_2)\leftarrow L(\mathscr{F}_2)\cup(Y,D\setminus\{a\})$；
10. 　　for each $A_i\subseteq A,A_i\neq\emptyset$ do：
11. 　　　if $Y\cap A_i^{\downarrow_2}\neq\emptyset$ and $Y\cap A_i^{\downarrow_2}\notin E^{(Y,D)}$：
12. 　　　　$L(\mathscr{F}_2)\leftarrow L(\mathscr{F}_2)\cup(Y\cap A_i^{\downarrow_2},(Y\cap A_i^{\downarrow_2})^{\uparrow_2})$；
13. 　　　$E^{(Y,D)}\leftarrow E^{(Y,D)}\cup\{Y\cap A_i^{\downarrow_2}\}$

算法 2 通过更新 $L(\mathscr{F}_1)$ 来生成 $L(\mathscr{F}_2)$（见算法 2 中的步骤 4—步骤 13）。若 (Y,D) 满足 $a\notin D$，则可应用引理 4 中的 1) 生成 H_1（见算法 2 中的步骤 6）；若 (Y,D) 满足 $a\in D$，$\forall a_i\in A$ 有 $Y\not\subseteq a_i^{\downarrow_2}$ 且 $D\setminus\{a\}\notin Int(F_1)$，则可应用定理 2 生成 $H_2\setminus H_1$（见算法 2 中的步骤 9）；若 (Y,D) 满足 $a\in D$，且存在 $A_i\subseteq A,A_i\neq\emptyset$，使得 $Y\cap A_i^{\downarrow_2}\neq\emptyset$ 且 $Y\cap A_i^{\downarrow_2}\notin E^{(Y,D)}$，则可应用定理 3 生成 H_3（见算法 2 中的步骤 12）。

4　实验及分析

为了验证算法的有效性，在 Intel i7-7700 3.60GHz、16.0GB 内存的微机，Windows 10 操作系统下，使用 python 实现了 Hu 等[14]提出的概念更新算法和本文提出的概念更新算法，并从 UCI 中选取了 5 个数据集进行实验验证，分别为 Zoo，Balance Scale，Concrete，Car Evaluation，Abalone。由于这 5 个数据集都具有多值属性或连续属性，因此本文对数据进行预处理，将原始数据转化为 0-1 布尔值的形式背景。具体步骤如下：针对多值属性，多值属性的每一个取值视作新的属性；针对连续属性，将属性取值归一化到[0,1]区间，对[0,1]区间进行离散化，并将每个区间看作一个属性。预处理后的数据集如表 2 所列（为了表述方便，将预处理后得到的数据集分别命名为数据集 1—数据集 5）。

表 2　预处理后的数据集

Table 2　Pre-processed dataset

数据集	对象个数	属性个数
1	101	19
2	625	23
3	1 030	18
4	1 728	25
5	4 177	19

本文将预处理后的数据集作为细背景，并且随机将数据集中相邻的布尔属性进行“或”运算合并，以产生相对应的粗背景（需要说明的是，虽然随机合并的属性在语义上并不具有粒度关系，但在数据上能够体现覆盖粒化的特点）。此时，通过细背景中已生成的细概念，更新生成粗背景中的粗概念便是概念粗化算法，与之相反则是概念细化算法。

实验 1　对比本文提出的概念粗化更新算法（记作 MCO）与 Hu 等[14]提出的概念粗化更新算法（记作 CO）生成粗概念的数量。

实验中 $|A|$ 表示将细背景中的 $|A|$ 个属性合并为一个粗属性，实验结果如表 3 所列。从表 3 可以看出，CO 算法产生的粗概念的数量总是少于 MCO 算法产生的粗概念的数量。因此可知 Hu 等[14]提出的概念粗化更新算法（CO 算法）生成的粗概念是不完整的，容易导致概念丢失，而本文提出的概念

粗化更新算法(MCO 算法)对现有算法进行了补充和完善。

表 3 概念粗化更新算法的实验结果

Table 3 Experimental results of coarsening concept algorithm

数据集	$\|A\|=2$		$\|A\|=3$		$\|A\|=4$	
	MCO	CO	MCO	CO	MCO	CO
1	374	366	363	351	1352	330
2	2027	2001	1816	1779	1595	1534
3	5353	5294	5136	4985	4465	4324
4	11374	11335	9966	9850	9228	9115
5	4500	4479	3984	3961	3396	3327

实验 2 对比本文提出的概念细化更新算法(记作 MFINE)与 Hu 等[14]提出的概念细化更新算法(记作 FINE)的性能。

分别对比 MFINE 与 FINE 在相同数据集下生成 H_2, H_3 和 $L(\mathscr{F}_1)$ 所需的时间(由于生成 H_1 所需的时间接近 0,因此不进行对比)。实验结果如表 4—表 6 所列,其中 $|A|$ 表示将细背景中的 $|A|$ 个属性合并为一个粗属性,表中时间单位为 s。

表 4 $|A|=2$ 时概念细化更新算法的实验结果

Table 4 Experimental results at $|A|=2$

数据集	MFINE			FINE		
	H_2	H_3	$L(\mathscr{F}_1)$	H_2	H_3	$L(\mathscr{F}_1)$
1	0.008	0.15	0.158	0.35	1.10	1.45
2	0.020	0.11	0.130	2.30	0.90	3.20
3	0.150	5.80	5.98	31.00	38.00	69.00
4	0.170	1.50	1.67	42.00	15.00	57.00
5	0.400	16.00	16.40	130.00	102.00	232.00

表 5 $|A|=3$ 时概念细化更新算法的实验结果

Table 5 Experimental results at $|A|=3$

数据集	MFINE			FINE		
	H_2	H_3	$L(\mathscr{F}_1)$	H_2	H_3	$L(\mathscr{F}_1)$
1	0.009	0.33	0.339	0.33	1.78	2.11
2	0.040	0.21	0.250	3.50	1.30	4.80
3	0.180	10.00	10.180	33.00	53.00	86.00
4	0.270	2.50	2.770	56.00	22.00	78.00
5	0.500	31.00	31.500	142.00	165.00	307.00

表 6 $|A|=4$ 时概念细化更新算法的实验结果

Table 6 Experimental results at $|A|=4$

数据集	MFINE			FINE		
	H_2	H_3	$L(\mathscr{F}_1)$	H_2	H_3	$L(\mathscr{F}_1)$
1	0.012	0.50	0.512	0.38	2.3	2.68
2	0.050	0.32	0.370	4.20	1.8	6.00
3	0.200	15.00	15.20	35.00	65.0	100.00
4	0.330	4.50	4.830	64.00	28.0	92.00
5	0.900	45.00	45.90	173.00	197.0	370.00

由表 4—表 6 可知,MFINE 在 5 个数据集中的性能都要优于 FINE。

为了方便比较 MFINE 与 FINE 性能,引入优化度 $S=t_{\mathrm{FINE}}/t_{\mathrm{MFINE}}$ 进行度量,其中 t_{FINE}, t_{MFINE} 分别为执行 FINE 和 MFINE 消耗的时间,若 $S>1$,则 MFINE 性能优于 FINE。下面进一步分析数据集中的属性数 m_2、对象数 n 和细属性数 $|A|$ 等因素对优化度 S 的影响。

为了分析属性数 m_2 对优化度 S 的影响,本文随机生成 5 个数据集,其对象数均为 500,属性数分别为 10,20,30,40,50,且 $|A|=3$,数据集中对象属性间存在关系的概率为 0.30,实验结果如图 1 所示。

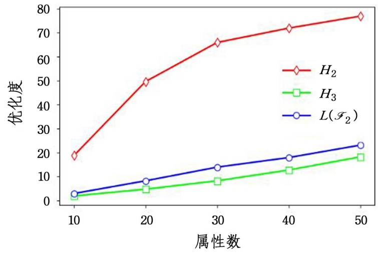


图 1 $n=100$, $|A|=3$ 时属性数对优化度的影响

Fig. 1 Effect of the number of attributes on optimization degree at $n=100$, $|A|=3$

由图 1 可以看出,对 H_2 和 H_3 的优化度均随着属性数的增加而提高,从而导致对 $L(\mathscr{F}_1)$ 的优化度提高。事实上,由于 MFINE 和 FINE 计算 H_2 的时间复杂度分别为 $O(|L(\mathscr{F}_1)|(m_1+|A|n))$ 和 $O(|L(\mathscr{F}_1)|m_2n)$,因此当 m_2 增大时,$O(|L(\mathscr{F}_1)|m_2n)$ 增长的幅度要大于 $O(|L(\mathscr{F}_1)|(m_1+|A|n))$,故 MFINE 对 H_2 的优化度与 m_2 正相关,即在 $|A|$ 相同的情况下,数据集中的属性越多,MFINE 对 H_2 的优化度就越高。同理,由于 MFINE 和 FINE 计算 H_3 的时间复杂度分别为 $O(|L(\mathscr{F}_1)|2^{|A|}|A|n+|L(\mathscr{F}_1)|m_1)$ 和 $O(|L(\mathscr{F}_1)|2^{|A|}m_2n)$,因此 MFINE 对 H_3 的优化度与 $m_2/|A|$ 正相关。在 $|A|$ 相同的情况下,数据集中的属性越多,MFINE 对 H_3 的优化度越高。因此,数据集中的属性个数越多,MFINE 的性能就越好。

为了分析对象数对优化度 S 的影响,本文随机生成 5 个数据集,其属性数均为 20,对象数分别为 100,200,300,400,500,且 $|A|=3$,数据集中对象属性间存在关系的概率为 0.30,实验结果如图 2 所示。

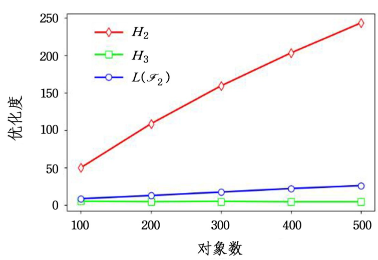


图 2 $m_2=20$, $|A|=3$ 时对象数对优化度的影响

Fig. 2 Effect of the number of attributes on optimization degree at $m_2=20$, $|A|=3$

由图 2 可知,随着对象数的增加,对 H_2 的优化度提高,对 H_3 的优化度基本不变,因此导致对 $L(\mathscr{F}_1)$ 的优化度提高。事实上,由于 MFINE 和 FINE 计算 H_2 的时间复杂度分别为 $O(|L(\mathscr{F}_1)|(m_1+|A|n))$ 和 $O(|L(\mathscr{F}_1)|m_2n)$,因此当 n 增大时,$O(|L(\mathscr{F}_1)|m_2n)$ 增长的幅度大于 $O(|L(\mathscr{F}_1)|(m_1+|A|n))$,故 MFINE 对 H_2 的优化度与 n 正相关,即在 $|A|$ 相同的情况下,数据集中的对象越多,MFINE 对 H_2 的优化度就越高。因此,数据集中对象个数越多,MFINE 的性能就越好。

为了分析 $|A|$ 对优化度 S 的影响,本文随机生成 1 个数据集,其对象数为 500,属性数为 10,数据集中对象属性间存在关系的概率为 0.30,对 $|A|$ 分别取值 2,3,4,5,6,7,8,9,实验结果如图 3 所示。

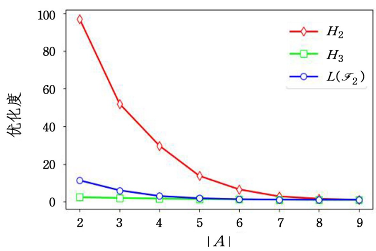


图 3 $n=500, m_2=10$ 时 $|A|$ 对优化度的影响

Fig. 3 Effect of the number of attributes on optimization degree at $n=500, m_2=10$

由图 3 可以看出,对 H_2 和 H_3 的优化度随 $|A|$ 的增大而减低,因此导致对 $L(\mathscr{F}_1)$ 的优化度降低。事实上,由于 MFINE 和 FINE 计算 H_2 的时间复杂度分别为 $O(|L(\mathscr{F}_1)|(m_1+|A|n))$ 和 $O(|L(\mathscr{F}_1)|m_2n)$,因此当 $|A|$ 增大时,$O(|L(\mathscr{F}_1)|(m_1+|A|n))$ 会随之增大,而 $O(|L(\mathscr{F}_1)|m_2n)$ 不会改变,因此 MFINE 对 H_2 的优化度与 $|A|$ 负相关,即 $|A|$ 增大会导致 MFINE 对 H_2 的优化度降低。在极端情况下,$|A|$ 接近 m_2,导致 $O(|L(\mathscr{F}_1)|(m_1+|A|n))$ 和 $O(|L(\mathscr{F}_1)|m_2n)$ 接近,MFINE 对 H_2 的优化度会接近 1。结合前文可知,MFINE 对 H_3 的优化度与 $m_2/|A|$ 正相关,因此 $|A|$ 增大会导致 MFINE 对 H_3 的优化度降低,并且当 $|A|$ 接近 m_2 时,MFINE 对 H_3 的优化度会接近 1。因此,$|A|$ 越大,MFINE 的性能就越差,在极端情况下,MFINE 的性能与 FINE 接近。

总之,可得出如下 3 个结论:

1) 本文提出的覆盖概念更新算法在相同数据集下的性能优于 Hu 等[14]提出的覆盖概念更新算法。

2)在相同数据集下,随着细属性的增大,本文算法的性能降低,但总是优于文献[14]提出的算法。

3)数据的规模越大,本文算法的性能就越好。

结束语 本文研究了覆盖多粒度下的形式概念的粗化和细化更新方法。覆盖属性粒化下,属性粒度影响从数据中提取的形式概念的结构,提出覆盖属性粒化下的形式概念更新方法,可避免通过完全重建的方式构建大规模形式背景概念结构所产生的巨大计算时间代价。通过分析现有的覆盖多粒度下的概念更新算法的局限和不足,对现有的概念更新算法进行完善和优化,并且结合时间复杂度进行分析和对比实验,验证了本文所提概念更新算法的有效性。

尽管通过概念更新算法可以避免通过完全重建的方式构建大规模形式背景概念结构所产生的巨大计算时间代价,但是由于选取适当的属性粒度级别更多的是一个依赖于领域的交互式过程,在这个过程中不断地更新概念仍然会产生较高的时间代价。因此,希望进一步研究覆盖多粒度下最优属性粒度级别选取问题,避免多次更新概念,从而进一步降低时间代价。

参 考 文 献

[1] GANTER B, WILLE R. Formal concept analysis-mathematical foundations[M]. Berlin:Springer,1999.

[2] ZHAI Y H, JIA N, ZHANG S X, et al. Study on deduction process and inference methods of decision implications[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2022, 13(7):1959-1979.

[3] ZHAI Y H, QI J J, LI D Y, et al. The structure theorem of three-way concept lattice[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2022, 146:157-173.

[4] SAMPATH S, SPRENKLE S, GIBSON E, et al. Applying concept analysis to user-session-based testing of web applications [J]. IEEE Transactions on Software Engineering, 2007, 33(10): 643-658.

[5] ZHANG S X, LI D Y, ZHAI Y H, et al. A comparative study of decision implication, concept rule and granular rule[J]. Information Sciences, 2020, 508:33-49.

[6] HAO C, FAN M, LI J H, et al. Optimal Scale Selection in Multiscale Contexts Based on Granular Scale Rules[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2016, 29(3):272-280.

[7] NIU J J, CHEN D G, LI J H, et al. A dynamic rule-based classification model via granular computing[J]. Information Sciences, 2022, 584:325-341.

[8] LI J H, WU W Z, DENG S. Multi-scale theory in formal concept analysis[J]. Journal of Shandong University (Nature Science), 2019, 54(2):30-40.

[9] LI J H, WANG F, WU W Z, et al. Review of Multi-granularity Data Analysis Methods Based on Granular Computing[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2021, 36(3):418-435.

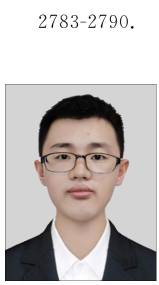
[10] BELOHLAVEK R, DE BAETS B, KONECNY J. Granularity of attributes in formal concept analysis[J]. Information Sciences, 2014, 260:149-170.

[11] SHE Y H, HE X L, QIAN T, et al. A theoretical study on object-oriented and property-oriented multi-scale formal concept analysis[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2019, 10:3263-3271.

[12] SHAO M W, LV M M, LI K W, et al. The construction of attribute(object)-oriented multi-granularity concept lattices[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2020, 11:1017-1032.

[13] LI J H, HE J J. Uncertainty measurement and optimal granularity selection for multi-granularity formal context[J]. Journal of Control and Decision, 2022, 37(5):1299-1308.

[14] HU Q, QIN K Y. The construction of multi-granularity concept lattices[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2020, 39: 2783-2790.



WANG Taibin, born in 1998, master. His main research interests include granular computing and multi-scale analysis.

LI Deyu, born in 1965, Ph.D. His main research interests include data mining, artificial intelligence and multi-label learning.

(责任编辑:喻藜)