基于邻域系统的粗糙集模型的代数性质

刘银山, 王豪, 秦克云

计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.220800051

基于邻域系统的粗糙集模型的代数性质

刘银山　王　豪　秦克云
西南交通大学数学学院　成都 611756
(yinshanliu@foxmail.com)

摘　要　基于邻域系统的粗糙集模型是基于一般二元关系的广义粗糙集模型以及覆盖粗糙集模型的扩展。一般来说,不同的邻域系统可能生成相同的近似算子。给出不同邻域系统生成相同近似算子的条件,进而基于近似算子提出一种对邻域系统分类的方法。另外,给出基于邻域系统的粗糙近似算子的公理化描述方法。

关键词:邻域系统近似算子;邻域系统分类;公理化方法
中图法分类号　TP182

Algebraic Properties of Rough Set Model Based on Neighborhood System

LIU Yinshan,WANG Hao and QIN Keyun
School of Mathematics,Southwest Jiaotong University,Chengdu 611756,China

Abstract　The rough set model based on neighborhood system is an extension of generalized rough set model based on general binary relation and covering rough set model. In general,different neighborhood systems may generate the same approximation operator. This paper gives the conditions for different neighborhood systems to generate the same approximation operator,and then proposes a method to classify the neighborhood systems based on the approximation operator. In addition,the axiomatic description method of rough approximation operator based on neighborhood system is given.

Keywords　Neighborhood system approximation operator,Neighborhood system classification,Axiomatic method

1　引言

粗糙集理论是由波兰数学家 Pawlak[1] 于 1982 年提出的一种数据分析理论,是一种处理不精确或不确定信息的一种重要的数学工具。目前,粗糙集理论已经发展为粒计算[2]的重要模型,在数据挖掘、数据库知识发现、决策评估、智能控制等领域有着广泛的应用。

信息系统知识发现是粗糙集应用的重要研究方向。考虑到信息系统的多样性,为拓展粗糙集模型的应用范围,人们提出了多种形式的粗糙集拓展模型,如基于一般二元关系的广义粗糙集模型[3]、覆盖粗糙集模型[4]、模糊粗糙集模型[5]等。Lin 等[6-8]引入了基于邻域系统[9-10]的粗糙集模型。基于一般二元关系的广义粗糙集模型以及覆盖粗糙集模型,都是基于特殊邻域系统的粗糙集模型。基于邻域系统的粗糙集模型在数据库设计和知识操作方面有着重要应用,Atik[11]将邻域系统粗糙集模型运用到图论上,也有学者将邻域系统粗糙集模型运用到基因选择问题上。基于邻域系统的粗糙集模型将粒计算理论拓展到了机器学习、数据挖掘等多个领域并有着广泛应用。许多学者也对基于邻域系统的粗糙集模型中近似算子的性质进行了系统研究[12-13]。在邻域粗糙集模型中,不同的邻域或者二元关系生成不同的近似算子。而不同的邻域系统是否可能会生成相同的近似算子,是值得探讨的问题。另外,不同邻域系统诱导的近似算子之间的关系也值得深入研究。

粗糙集理论将知识理解为关于对象的分类能力,不确定性概念借助上、下近似算子,通过精确概念进行逼近。粗糙集模型研究主要包括构造性方法和公理化方法[14]。构造性方法通过对象之间的相似关系、论域的划分或覆盖、对象的邻域等构造近似算子并讨论近似算子的代数结构。公理化方法研究一般集值映射成为近似算子的条件或公理。许多学者都曾对粗糙集的公理化问题进行了深入研究。Lin 和 Liu[15]研究了 Pawlak 粗糙集模型的公理化问题,给出了近似算子的公理体系,其中包含 6 条公理。Zhu[16]指出文献[15]中的公理体系不是独立的,进而对其公理体系进行了改造,并给出了两个独立的公理集。Sun 等[17]在文献[16]的基础上进一步讨论近似算子的公理化问题,得到了更为精练的两组公理集;另外,提出了极小公理集的概念,并证明得到的两组公理集是极小的。Yao[18]和 Thiele[19]从不同角度系统地对基于一般二元关系的广义粗糙集模型研究了近似算子的公理化刻画方法。Zhang 等[20-21]研究了基于覆盖的粗糙近似算子的公理化问题,针对 3 对不同的近似算子分别给出了公理集,并证明得到的公理集都是独立的。Zhao 等[22]讨论了基于非平凡邻域系统的粗糙近似算子的公理化问题。另外,许多学者也对模糊粗糙近似算子、粗糙模糊近似算子、直觉模糊粗糙近似算子等扩展粗糙集模型公理化问题进行了相应研究[23-27]。

本文在以上研究基础上进一步讨论基于邻域系统的粗糙近似算子的性质及其公理化问题。第 2 节给出了基于邻域

基金项目:国家自然科学基金(61976130)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61976130).
通信作者:秦克云(keyunqin@263.net)

系统的粗糙近似算子的一些基本概念和性质；第 3 节给出了不同邻域系统生成相同近似算子的条件，进一步借助近似算子提出了一种邻域系统分类方法；第 4 节给出了邻域系统近似算子的公理化描述；最后总结全文。

2 预备知识

本节将介绍邻域系统的概念和一些相关结果。

Sierpinski 等[9-10]引入了邻域系统的概念，用于研究 Féchet(V)空间。它起源于几何学封闭性概念的抽象。

定义 1[9-10] 设 U 为论域，记 $P(U)$ 为 U 的幂集，将映射 $N:U\to P(P(U))$ 称为 U 上的邻域系统。对于任意 $x\in U$，$N(x)$ 由 U 的一个子集族构成（可能为空集，也可能包含空集），称为 x 的邻域系统。任意 $K\in N(x)$ 称为 x 的一个邻域（粒计算中称为一个信息粒）。

邻域系统代表关于论域中元素之间关系的信息或知识。直观地说，元素邻域中的元素在某种程度上接近或相似于该元素。x 的一个邻域系统 $N(x)$ 将论域 U 中的对象分成若干类。x 的不同邻域由具有不同类型或不同程度相似性的元素组成。x 的同一邻域中的元素被认为是不可分辨的，或者至少与 x 没有显著的区别。

与一般的二元关系类似，许多学者[12-13]讨论过一些特殊的邻域系统。

(1)若对于任意 $x\in U$，有 $N(x)\neq\emptyset$，则称邻域系统 N 非平凡。

(2)若对于任意 $x\in U$，有 $\emptyset\notin N(x)$，则称邻域系统 N 串行。

(3)若对于任意 $x\in U$ 和 $K\in N(x)$，有 $x\in K$，则称邻域系统 N 自反。

(4)若对于任意 $x,y\in U$，任意 $K\in N(x)$ 和任意 $V\in N(y)$，有 $x\in V\Rightarrow y\in K$，则称邻域系统 N 对称。

(5)若对于任意 $x,y,z\in U$，$K\in N(y)$ 和 $L\in N(z)$，$x\in K$ 和 $y\in L\Rightarrow x\in L$，则称邻域系统 N 传递。

(6)若对于任意 $x\in U$ 和 $K\in N(x)$，存在 $V\in N(x)$ 使得对于 $\forall y\in V$，存在 $V_y\in N(y)$ 使得 $V_y\subseteq K$，则称邻域系统 N 弱传递。

(7)若对于任意 $x\in U$ 和 $K,V\in N(x)$ 存在 $\exists M\in N(x)$ 使得 $M\subseteq K\cap V$，则称邻域系统 N 弱一元。

(8)若对于任意 $x\in U$，$K_x\in N(x)$，$K_x\in N(x)$ 存在 $V_x\in N(x)$ 使得对于任意 $y\in V_x$ 和任意 $V_y\in N(y)$ 有 $K_x\subseteq V_y$，则称邻域系统 N 欧几里得。

一般来说，我们并不要求邻域系统非平凡和串行，这样定义是有好处的。第一，这样的定义更加简洁，而不需要其他额外的条件来约束。第二，这样定义的邻域系统可包含其他数学结构，如在拓扑结构中，$\emptyset$ 作为其拓扑中的一个开集。

Lin[6-8]在 1990 年引入了基于邻域系统的粗糙集模型，其粗糙上下近似算子如下定义。

定义 2[6] 设 $N:U\to P(P(U))$ 为 U 上的邻域系统，则对于任意 $X\subseteq U$，其上下近似 $\overline{N}(X)$ 和 $\underline{N}(X)$ 定义为：

$\overline{N}(X)=\{x\in U\mid \forall K\in N(x)(K\cap X\neq\emptyset)\}$

$\underline{N}(X)=\{x\in U\mid \exists K\in N(x)(K\subseteq X)\}$

下面通过一个简单的例子来说明邻域系统的具体形式和其上、下近似算子的计算。

例 1 取论域 $U=\{a,b,c,d\}$，让 U 上的邻域系统 N 如下定义：

$N(a)=\{\{a\}\}$；$N(b)=\{\{b,c\},\{a,d\},\{b,c,d\}\}$；$N(c)=\{\{a,b,c\},\{c,d\}\}$；$N(d)=\{\{a,b,d\},\{a,c\}\}$

令 $X=\{a,d\}\subseteq U$，则有 $\overline{N}(X)=\{a,c,d\}$，$\underline{N}(X)=\{a,b\}$。

由下面的分析，我们可以知道基于一般二元关系的粗糙集模型[26]和基于覆盖的粗糙集模型[3,10]这两种主流的粗糙集模型都是基于邻域系统的粗糙集模型的特例。

设 R 为论域 U 上的一个二元关系，即 $R\subseteq U\times U$，称 (U,R) 为一个广义近似空间，对于任意 $X\subseteq U$，X 关于 (U,R) 的上、下近似分别定义为[27]：

$\overline{R}(X)=\{x\in U;R_s(x)\cap X\neq\emptyset\}$

$\underline{R}(X)=\{x\in U;R_s(x)\subseteq X\}$

其中，$R_s(x)=\{y\in U\mid (x,y)\in R\}$，称为 x 关于 R 的右邻域。令 $N_R:U\to P(P(U))$ 为：对任意 $x\in U$，有 $N_R(x)=\{R_s(x)\}$。则对于任意 $X\subseteq U$，有 $\underline{R}(X)=\underline{N_R}(X)$，$\overline{R}(X)=\overline{N_R}(X)$。即基于二元关系的广义粗糙近似算子是基于邻域系统近似算子的特例。

同样，基于覆盖的粗糙集模型也是基于邻域系统的粗糙集模型的特例。

对于论域 U 的一个非空子集族 $C=\{k_i\subseteq U\mid K_i\neq\emptyset,i\in I\}$，若 $\bigcup_{i\in I}=U$，则称 C 为 U 的一个覆盖，(U,C) 为一个覆盖近似空间。对于任意 $X\subseteq U$，X 关于 (U,C) 的上、下近似分别定义为[4,12]：

$\overline{C}(X)=\{x\in U\mid \forall K\in C(x\in K\to K\cap X\neq\emptyset)\}$

$\underline{C}(X)=\{x\in U\mid \exists K\in C(x\in K\wedge K\subseteq X)\}$

令 $N_C:U\to P(P(U))$ 为：对任意 $x\in U$，有

$N_C(x)=\{K\in C\mid x\in K\}$

则对于任意 $X\subseteq U$，有 $\overline{C}(X)=\overline{N_C}(X)$，$\underline{C}(X)=\underline{N_C}(X)$。

下面介绍一些邻域系统近似算子的基本性质。

由邻域系统上下近似算子的定义，直接有以下命题。

命题 1[12-13] N 为论域 U 上的邻域系统，则有：

(1) $\overline{N}(\emptyset)=\emptyset$，$\underline{N}(U)=U$；

(2) $X\subseteq Y\Rightarrow \overline{N}(X)\subseteq\overline{N}(Y)$，$\underline{N}(X)\subseteq\underline{N}(Y)$。

一些特殊的邻域系统的近似算子有以下性质。

定理 1[12-13] N 为论域 U 上的邻域系统，则有：

(1) N 是串行的 $\Leftrightarrow \underline{N}(\emptyset)=\emptyset\Leftrightarrow\overline{N}(U)=U$；

(2) N 是自反的 $\Leftrightarrow \forall X\subseteq U,\underline{N}(X)\subseteq X\Leftrightarrow \forall X\subseteq U,X\subseteq\overline{N}(X)$；

(3) N 是弱传递的 $\Leftrightarrow \forall X\subseteq U,\underline{N}(X)\subseteq\underline{N}(\underline{N}(X))\Leftrightarrow \forall X\subseteq U,\overline{N}(X)\supseteq\overline{N}(\overline{N}(X))$；

(4) N 是弱一元的 $\Leftrightarrow \forall X,Y\subseteq U,\underline{N}(X\cap Y)=\underline{N}(X)\cap\underline{N}(Y)\Leftrightarrow \forall X,Y\subseteq U,\overline{N}(X\cup Y)=\overline{N}(X)\cup\overline{N}(Y)$。

命题 2[12-13,22] N 为论域 U 上的邻域系统，则有：

(1)若 N 是对称的，则 $\forall X\subseteq U$，$X\subseteq\underline{N}(\overline{N}(X))$，$X\supseteq\underline{N}((\overline{N}(X))$，$X\supseteq\overline{N}(\underline{N}(X))$；

(2)若 N 是传递的，则 $\forall X\subseteq U$，$\underline{N}(X)\subseteq\underline{N}(\underline{N}(X))$，$\overline{N}(X)\supseteq\overline{N}(\overline{N}(X))$；

(3)若 N 是欧几里得的，则 $\forall X\subseteq U$，$\overline{N}(X)\subseteq\underline{N}(\overline{N}(X))$，$\underline{N}(N)\supseteq\overline{N}(\underline{N}(X))$。

3 不同邻域系统生成相同近似算子的条件

在广义粗糙集模型（基于一般二元关系或邻域）中，对于任意 $x,y\in U$，有 $(x,y)\in R\Leftrightarrow y\in R_s(x)\Leftrightarrow x\in\overline{R}(\{y\})$。因此，二元关系 R 可由上近似算子确定，即不同的二元关系生成不同的近似算子。然而，在基于邻域系统的粗糙集模型中，不同的邻域系统可能生成相同的近似算子。

接下来讨论不同邻域系统生成相同近似算子的条件。

定义 3[29] 设 $N:U\rightarrow P(P(U))$ 为邻域系统，称 N 是良基（well-founded）的，如果对于任意 $x\in U$ 及 $M\in N(x)$，存在 $N(x)$ 中的极小元 M'（关于集合的包含关系）使得 $M'\subseteq M$。

我们发现绝大多数邻域系统都是良基的，但是也有不是良基的邻域系统。

例 2 设 $U=[0,1]$，N 为 U 上的邻域系统，且 $N(0)=\{[0,x)\mid 0<x<0.5\}$，则 N 不是良基的。

通过上面的定义，可以得到，若 U 是有限集，或者对于 $\forall x\in U$，$N(x)$ 有限，则 N 是良基的。

给定 U 上的良基的邻域系统 N，可以定义其极小邻域系统 N_m。

定义 4 设 N 是 U 上良基的邻域系统，N 的极小邻域系统 $N_m:U\rightarrow P(P(U))$ 定义为：

$N_m(x)=\{M\in N(x)\mid \forall A\in N(x)(A\subseteq M\rightarrow A=M)\}$

即 $N_m(x)$ 是 $N(x)$ 关于包含关系的所有极小元构成的集合。

另一方面，可以定义 N 的最大邻域系统 N_s。

定义 5 设 N 是 U 上良基的邻域系统，N 的最大邻域系统 $N_s:U\rightarrow P(P(U))$ 定义为：

$N_s(x)=N(x)\cup\{M\mid M\subseteq U$ 且存在 $A\in N(x),A\neq\varnothing$ 使得 $A\subseteq M)\}$

显然，若 N 是串行的，则其最大邻域系统 N_s 是单调的（$\forall x\in U,K\in N(x),V\subseteq U$，若 $K\subseteq V$，有 $V\in N(x)$，则称 N 单调）。若 N 是单调的，则 $N_s=N$。

由以上的定义很容易有下面的命题。

命题 3 设 $N:U\rightarrow P(P(U))$ 为良基的邻域系统，则对于任意 $X\subseteq U$，有 $\overline{N}(X)=\overline{N_m}(X)=\overline{N_s}(X)$，$\underline{N}(X)=\underline{N_m}(X)=\underline{N_s}(X)$。

接下来讨论以上定义的两个特殊邻域系统的一些性质。

引理 1 设 $N:U\rightarrow P(P(U))$ 是良基的邻域系统，则有 $(N_s)_m=N_m$，$((N_m)_s=N_s$。

证明：先证 $(N_s)_m=N_m$。

首先有 $\forall x\in U$，$N_m(x)\subseteq(N_s)_m(x)$。事实上，有 $\forall x\in U$，$N_m(x)\subseteq N(x)\subseteq N_s(x)$。若存在 $M\in N_m(x)$ 使得 $M\notin(N_s)_m(x)$，则存在 $M_1\in N_s(x)$ 使得 $M_1\subseteq M_1$ 且 $M_1\neq M$。若 $M_1\in N(x)$，这与 $M\in N_m(x)$ 矛盾。若存在 $M_2\in N(x)$，$M_2\neq\varnothing$ 且 $M_2\subseteq M_1$，则有 $M_2\subseteq M$，$M_2\neq M$，这与 $M\in M_m(x)$ 矛盾。

然后有 $\forall x\in U$，$(N_s)_m(x)\subseteq N_m(x)$。$\forall M\in(N_s)_m(x)$，由其定义知存在 $M_1\in N(x)$ 且 $M_1\subseteq M$。由 $M_1\in N(x)\subseteq(N_s)(x)$ 可得 $M_1=M$，即有 $M\in N(x)$。若 $M\notin N_m(x)$，则存在 $M_2\in N(x)$ 使得 $M_2\subseteq M$，$M_2\neq M$。再由 $M_2\in N_s(x)$，这与 $M\in(N_s)_m(x)$ 矛盾。

再证 $(N_m)_s=N_s$。

首先 $\forall x\in U$，$(N_m)_s(x)\subseteq N_s(x)$ 显然成立。

若 $M\in N_s(x)$，则存在 $M_1\in N(x)$ 使得 $M_1\subseteq M$，又 N 是良基的，则存在 $M_2\in N_m(x)$ 使得 $M_2\subseteq M_1$，由 $M_2\in N_m(x)$ 且 $M_2\subseteq M$ 可知 $M\in(N_s)_m(x)$。

引理 2 设 $N:U\rightarrow P(P(U))$ 是良基的邻域系统，则有 $(N_s)_s=N_s$。

证明：只需证明 $\forall x\in U$，$(N_s)_s(x)\subseteq N_s(x)$。任意 $M\in(N_s)_s(x)$，由 $(N_s)_s(x)=N_s(x)\cup\{M\mid M\subseteq U$ 且存在 $M_1\in N_s(x)$，$M_1\neq\varnothing$ 使得 $M_1\subseteq M\}$。假设存在 $M_1\in N_s(x)$，$M_1\neq\varnothing$ 使得 $M_1\subseteq M$。若 $M_1\in N(x)$，则由 N_s 定义知 $M\in N_s(x)$。若存在 $M_2\in N(x)$，$M_2\neq\varnothing$ 使得 $M_2\subseteq M_1$，则有 $M_2\subseteq M$，则由 N_s 定义知 $M\in N_s(x)$。

定理 2 设 $N:U\rightarrow P(P(U))$ 是良基的邻域系统，则有 $\overline{N_1}=\overline{N_2}$，$\underline{N_1}=\underline{N_2}$ 当且仅当 $(N_1)_m=(N_2)_m$。

证明：充分性由命题 3 显然成立，下面证明其必要性。

假设 $\forall X\subseteq U$ 有 $\underline{N_1}(X)=\underline{N_2}(X)$，从而 $\underline{(N_1)_m}(X)=\underline{(N_2)_m}(X)$。对于任意 $x\in U$ 以及 $M\in(N_1)_m(x)$，有 $x\in\underline{(N_1)_m}(M)=\underline{(N_2)_m}(M_1)$，故有 $M_1\in(N_2)_m(x)$ 使得 $M_1\subseteq M$。再由 $M_1\in(N_2)_m(x)$ 知 $x\in\underline{(N_2)_m}(M_1)$，从而 $x\in\underline{(N_1)_m}(M_1)$，故存在 $M_2\in(N_1)_m(x)$ 使得 $M_2\subseteq M_1$。从而 $M_2\subseteq M_1\subseteq M$，又因为 $M_2,M\in(N_1)_m(x)$，故 $M_2=M$，则有 $M_2=M_1=M$。于是 $(N_1)_m(x)\subseteq(N_2)_m(x)$。类似地可证得 $(N_2)_m(x)\subseteq(N_1)_m(x)$。从而 $(N_1)_m(x)=(N_2)_m(x)$。

有了上面的准备工作，接下来讨论不同邻域系统生成相同近似算子的条件。

令 $\mathbb{N}=\{N\mid N:U\rightarrow P(P(U))$ 且 N 是良基的$\}$，可以定义 $\mathbb{N}$ 上的两个二元关系“$\sqsubseteq$”和“$\approx$”。

定义 6 $N_1\sqsubseteq N_2\Leftrightarrow\forall x\in U,N_1(x)\subseteq N_2(x)$；

$N_1\approx N_2\Leftrightarrow\forall X\subseteq U,\overline{N_1}(X)=\overline{N_2}(X)$（或者 $\Leftrightarrow\forall X\subseteq U$，$\underline{N_1}(X)=\underline{N_2}(X)$）。

显然“$\sqsubseteq$”为 $\mathbb{N}$ 上的偏序关系，“$\approx$”为 $\mathbb{N}$ 上的等价关系。

定理 3 对于任意 $N\in\mathbb{N}$，记 $[N]_\approx=\{N_1\in\mathbb{N}\mid\underline{N_1}=\underline{N}\}$ 为 N 关于“$\approx$”的等价类，则有：(1) $N_m\in[N]_\approx$；(2) 若 $N_1\in[N]\approx$，则有 $N_m\sqsubseteq N_1$。即 N_m 是 $[N]_\approx$ 中关于偏序关系“$\sqsubseteq$”的最小元。

证明：(1) 由前面的命题 3 可知 $\underline{N_m}=\underline{N}$，所以有 $N_m\approx N$，即 $N_m\in[N]_\approx$。

(2) 若 $N_1\in[N]_\approx$，则有 $\underline{N_1}=\underline{N}$，由定理 2 知 $(N_1)_m=(N)_m$，从而有 $N_m=(N_1)_m\sqsubseteq N_1$，所以 N_m 是 $[N]_\approx$ 中的最小元。

定理 4 $N_s\in[N]_\approx$，即 N_s 是 $[N]_\approx$ 中关于偏序关系“$\approx$”的最大元。

证明：由引理 1 可知 $(N_s)_m=N_m$，从而有 $\underline{N_s}=\underline{(N_s)_m}=\underline{N_m}=\underline{N}$，所以 $N_s\in[N]_\approx$。

若 $N_1\in[N]_\approx$，则 $N_1\sqsubseteq N_s$。事实上，$\forall N_1\in[N]_\approx$ 有 $\underline{N_1}=\underline{N}$，从而有 $((N_1)_s)_m=(N_1)_m=N_m=(N_s)_m$，从而 $N_1\sqsubseteq(N_1)_s=((N_1)_s)_s=(((N_1)_s)_m)_s=((N_s)_m)_s=(N_s)_s=N_s$。

显然，$\forall N'\in\mathbb{N}$，若 $N_m\sqsubseteq N'\sqsubseteq N_s$，则有 $N'\in[N]_\approx$。事实上，若 $\forall x\in U$，$N_m(x)\subseteq N'(x)\subseteq N_s(x)$，则有 $\forall X\subseteq U$，$\underline{N_m}(X)\subseteq\underline{N'}(X)\subseteq\underline{N_s}(X)$，又 $\underline{N_m}(X)=\underline{N_s}(X)$，从而 $N'\in[N]_\approx$。这里对上近似算子的讨论完全类似。

换句话说，我们已经给出了不同的邻域系统生成相同近似算子的条件，即 $\forall N_1,N_2\in\mathbb{N}$，若 $(N_1)_m\sqsubseteq N_2\sqsubseteq(N_1)_s$（或者 $(N_2)_m\sqsubseteq N_1\sqsubseteq(N_2)_s$），则有 $\underline{N_1}=\underline{N_2}$，$\overline{N_1}=\overline{N_2}$；并用近似算子

将邻域系统进行了分类。

下面两个定理用构造性的方法说明上面结论是成立的，即的确存在不同的邻域系统生成相同的近似算子，且两邻域系统之间存在包含关系。在本篇文章中，对于任意的 $A\subseteq U$，令 $A'=U-A$ 为 A 的补集。

定理 5 设 N 为论域 U 上邻域系统，构造 U 上另一邻域系统 Φ，其定义为：

$$\forall x\in U,\Phi(x)=\{M\mid M\subseteq U\wedge x\notin \overline{N}(M')\}$$

则有 $\overline{\Phi}=\overline{N}$，且有 $N\subseteq\Phi\subseteq N_s$。

证明：先证 $\overline{\Phi}=\overline{N}$，只需证明 $\forall X\subseteq U, x\notin\overline{\Phi}(X)\Leftrightarrow x\notin\overline{N}(X)$。若 $x\notin\overline{\Phi}(X)$，则存在 $M\in\Phi(x)$ 使得 $M\cap X=\varnothing$，由 $M\in\Phi(x)$ 知 $x\notin\overline{N}(M')$，又 $X\subseteq M$，利用 $\overline{N}$ 的单调性知 $\overline{N}(X)\subseteq\overline{N}(M')$，所以 $x\notin\overline{N}(X)$。反过来，若 $x\notin\overline{N}(X)$，按照 Φ 的定义有 $X'\in\Phi(x)$，从而 $x\notin\overline{\Phi}(X)$。

再证 $N\subseteq\Phi\subseteq N_s$。$\forall x\in U,\forall M\in N(x)$，由 $M\cap M'=\varnothing$，则 $x\notin\overline{N}(M')$，从而 $M\in\Phi(x)$，即有 $N(x)\subseteq\Phi(x)$。$\forall x\in U$，$\forall M\in\Phi(x)$，由 Φ 定义知 $x\notin\overline{N}(M')$，从而存在 $K\in N(x)$ 使得 $K\subseteq M(K\cap M'=\varnothing)$，所以有 $M\in N_s(x)$，从而 $\Phi(x)\subseteq N_s(x)$。

对于下近似算子，也有类似的结果。

定理 6 设 N 为论域 U 上的邻域系统，构造 U 上另一邻域 系统 Ψ，其定义为：

$$\forall x\in U,\forall x\in U,\Psi(x)=\{M\mid M\subseteq U\wedge x\in \underline{N}(M)\}$$

则有 $\underline{\Psi}=\underline{N}$，且有 $N\subseteq\Psi\subseteq N_s$。

证明：先证 $\underline{\Psi}=\underline{N}$，只需证明 $\forall X\subseteq U, x\in\underline{\Psi}(X)\Leftrightarrow x\in\underline{N}(X)$。若 $x\in\underline{\Psi}(X)$，则存在 $M\in\Psi(x)$ 使得 $M\subseteq X$，由 $M\in\Psi(x)$ 知 $x\in\underline{N}(M)$，再由 $\underline{N}$ 的单调性知 $\underline{N}(M)\subseteq\underline{N}(X)$，所以 $x\in\underline{N}(X)$。反过来，若 $x\in\underline{N}(X)$，由 Ψ 的定义知 $X\in\Psi(x)$，所以有 $x\in\underline{\Psi}(X)$。

再证 $N\subseteq\Psi\subseteq N_s$。$\forall x\in U$，$\forall M\in N(x)$，则有 $x\in\underline{N}(M)$，从而 $M\in\Psi(x)$，即 $N(x)\subseteq\Psi(x)$。$\forall x\in U$，$\forall M\in\Psi(x)$，由 Ψ 定义知 $x\in\underline{N}(M)$，则存在 $K\in N(x)$ 使得 $K\subseteq M$，则有 $M\in N_s(x)$，即 $\Psi(x)\subseteq N_s(x)$。

4 近似算子的公理化

Zhao[22] 针对非平凡邻域系统诱导的近似算子，研究其公理化问题，给出了公理化描述方法。

命题 4[22] 设 $f:P(U)\to P(U)$ 为一集值映射。存在 U 上非平凡邻域系统 N 使得 $f=\overline{N}$，当且仅当 f 满足：

(1) $f(\varnothing)=\varnothing$；

(2) 对于任意 $A\subseteq B\subseteq U$，有 $f(A)\subseteq f(B)$。

命题 5[22] 设 $f:P(U)\to P(U)$ 为一集值映射。存在 U 上非平凡邻域系统 N 使得 $f=\underline{N}$，当且仅当 f 满足：

(1) $f(U)=U$；

(2) 对于任意 $A\subseteq B\subseteq U$，有 $f(A)\subseteq f(B)$。

本节讨论基于一般邻域系统的粗糙集近似算子的公理化问题，给出相关邻域系统新的构造方法。

4.1 上近似算子的公理化

定理 7 令 $f:P(U)\to P(U)$ 为一集值映射，则存在一个邻域系统 N 使得 $f=\overline{N}$，当且仅当 f 满足 $U1$：$A\subseteq B\Rightarrow f(A)\subseteq f(B)$。

证明：充分性的证明由命题 1 可以得到。

证明其必要性。令 $f:P(U)\to P(U)$ 为满足条件 $U1$ 的映射。然后定义邻域系统 N_f 为：

$$\forall x\in U,N_f(x)=\{A\mid A\subseteq U\wedge x\notin f(A')\}$$

接下来说明 $f=\overline{N}$，只需证明 $\forall X\subseteq U, x\notin\overline{N_f}(X)\Leftrightarrow x\notin f(X)$ 即可。若 $x\notin\overline{N_f}(X)$，则存在 $M\in N_f(x)$ 使得 $M\cap X=\varnothing$。再由 $M\in N_f(x)$ 知 $x\notin f(M')$，又 $X\subseteq M'$，利用条件 $U1$ 有 $f(X)\subseteq f(M')$，所以 $x\notin f(X)$。若 $x\notin f(X)$，则由 N_f 的定义有 $X'\in N_f(x)$，从而 $x\notin\overline{N_f}(X)$。

我们也可以对一些特殊的邻域系统的上近似算子进行公理化描述。

定理 8 令 $f:P(U)\to P(U)$ 为一集值映射，则存在一个串行的邻域系统 N 使得 $f=\overline{N}$，当且仅当 f 满足 $U1$ 和 $U2$：$f(U)=U$。

证明：(充分性)让 N 为串行的邻域系统且 $f=\overline{N}$，由定理 1 可知 $f=\overline{N}$ 满足 $U1$ 和 $U2$。

(必要性)让集值映射 f 满足 $U1$ 和 $U2$，其生成的邻域系统 N_f 按照定理 7 必要性证明中的定义方式，可知 $f=\overline{N_f}$，再根据定理 1 和 $U2$，得到的邻域系统 N_f 是串行的。

定理 9 令 $f:P(U)\to P(U)$ 为一集值映射，则存在一个自反的邻域系统 N 使得 $f=\overline{N}$，当且仅当 f 满足 $U1$ 和 $U3$：$\forall X\subseteq U, X\subseteq f(X)$。

证明：(充分性)让 N 为自反的邻域系统且 $f=\overline{N}$，由定理 1 可知 $f=\overline{N}$ 满足 $U1$ 和 $U3$。

(必要性)让集值映射 f 满足 $U1$ 和 $U3$，其生成的邻域系统 N_f 按照定理 7 必要性证明中的定义方式，可知 $f=\overline{N_f}$，再根据定理 1 和 $U3$，得到的邻域系统 N_f 是自反的。

定理 10 令 $f:P(U)\to P(U)$ 为一集值映射，则存在一个弱传递的邻域系统 N 使得 $f=\overline{N}$，当且仅当 f 满足 $U1$ 和 $U4$：$f(M)\subseteq f(X), f(X)\supseteq f(f(X))$。

证明：(充分性)让 N 为弱传递的邻域系统且 $f=\overline{N}$，由定理 1 可知 $f=\overline{N}$ 满足 $U1$ 和 $U4$。

(必要性)让集值映射 f 满足 $U1$ 和 $U4$，其生成的邻域系统 N_f 按照定理 7 必要性证明中的定义方式，可知 $f=\overline{N_f}$，再根据定理 1 和 $U4$，得到的邻域系统 N_f 是弱传递的。

定理 11 令 $f:P(U)\to P(U)$ 为一集值映射，则存在一个弱一元的邻域系统 N 使得 $f=\overline{N}$，当且仅当 f 满足 $U1$ 和 $U5$：$\forall X,Y\in U, f(X\cup Y)=f(X)\cup f(Y)$。

证明：(充分性)让 N 为弱传递的邻域系统且 $f=\overline{N}$，由定理 1 可知 $f=\overline{N}$ 满足 $U1$ 和 $U5$。

(必要性)让集值映射 f 满足 $U1$ 和 $U5$，其生成的邻域系统 N_f 按照定理 7 必要性证明中的定义方式，可知 $f=\overline{N_f}$，再根据定理 1 和 $U4$，得到的邻域系统 N_f 是弱一元的。

4.2 下近似算子的公理化

类似地，可以对下近似算子进行公理化。

定理 12 令 $f:P(U)\to P(U)$ 为一集值映射，则存在一个邻域系统 N 使得 $f=\underline{N}$，当且仅当 f 满足 $L1$：$A\subseteq B\Rightarrow f(A)\subseteq f(B)$。

证明：充分性的证明由命题 1 可以得到。

证明其必要性。令 $f:P(U)\to P(U)$ 为满足条件 $L1$ 的映射。然后定义邻域系统 N_f 为：

$$\forall x\in U,N_f(x)=\{A\mid A\subseteq U\wedge x\in f(A)\}$$

接下来说明 $f=\underline{N}$，只需证明 $\forall X\subseteq U, x\in\underline{N_f}(X)\Leftrightarrow x\in$

$f(X)$即可。若 $x\in\underline{N_f}(X)$,则存在 $M\in N_f(x)$使得 $M\subseteq X$。再由 $M\in N_f(x)$知 $x\in f(M)$,利用条件 $L1$ 有 $f(M)\subseteq f(X)$,所以 $x\in f(X)$。若 $x\in f(X)$,则由 N_f 的定义有 $X\in N_f(x)$,从而 $x\in\underline{N_f}(X)$。

特殊邻域系统的下近似算子的公理化描述也是类似的,这里只列出相应的定理,其证明和上近似算子的证明过程完全类似。

定理 13 令 $f:P(U)\to P(U)$为一集值映射,则存在一个串行的邻域系统 N 使得 $f=\underline{N}$,当且仅当 f 满足 $L1$ 和 $L2$: $f(\varnothing)=\varnothing$。

定理 14 令 $f:P(U)\to P(U)$为一集值映射,则存在一个自反的邻域系统 N 使得 $f=\underline{N}$,当且仅当 f 满足 $L1$ 和 $L3$: $\forall X\subseteq U,X\supseteq f(X)$。

定理 15 令 $f:P(U)\to P(U)$为一集值映射,则存在一个弱传递的邻域系统 N 使得 $f=\underline{N}$,当且仅当 f 满足 $L1$ 和 $L4$: $\forall X\subseteq U,f(X)\subseteq f(f(X))$。

定理 16 令 $f:P(U)\to P(U)$为一集值映射,则存在一个弱一元的邻域系统 N 使得 $f=\underline{N}$,当且仅当 f 满足 $L1$ 和 $L5$: $\forall X,Y\subseteq U,f(X\cap Y)=f(X)\cap f(Y)$。

4.3 公理集生成邻域系统的不唯一性

对于邻域系统近似算子的公理化,需要讨论公理集生成邻域系统的唯一性。

通过对邻域系统上下近似算子的公理化,我们发现两者都只要求集值映射满足单调性条件即可,即 $X\subseteq Y\Rightarrow f(X)\subseteq f(Y)$。所以有以下命题:

命题 6 设 $f:P(U)\to P(U)$是满足单调性条件的集值映射,则存在邻域系统 N_1,N_2 使得$\underline{N_1}=f,\overline{N_2}=f$。

证明:由定理 7 和定理 12 得到。

显然由上面的命题知邻域系统近似算子的公理化得到邻域系统并不唯一,而是两个邻域系统。更进一步,根据第 3 节的内容,不同的邻域系统生成相同的近似算子。反过来,同一个近似算子作为多个邻域系统的近似算子,这些不同的邻域系统构成一个等价类,其中有最大邻域系统和最小邻域系统。所以当 $f:P(U)\to P(U)$为满足单调性条件的集值映射时,f 便作为邻域系统的近似算子,而这样的邻域系统是两个等价类,其中 f 分别作为两个等价类的上近似算子和下近似算子。

结束语 文中介绍了邻域系统的一些重要概念和性质;进一步通过近似算子定义了邻域系统之间的一种等价关系,得到了邻域系统等价类,并给出了不同邻域系统生成相同近似算子的条件。反过来,也利用近似算子对邻域系统作了分类。本文还给出了邻域系统的公理化条件和根据公理构造邻域系统的一种方式,我们发现得到的邻域系统并不唯一,由一个满足相应公理集的集值映射得到的是两个邻域系统的等价类(映射分别作为两个邻域系统等价类的上近似算子和下近似算子)。

未来的工作将在模糊环境下讨论基于邻域系统的粗糙集模型的性质。

参 考 文 献

[1] PAWLAK Z. Rough sets [J]. International Journal of Computer & Information Sciences,1982,11(5):341-356.

[2] WANG G Y,FU S,YANG J,et al. A Review of Research on Multi-Granularity Cognition Based Intelligent Computing[J]. Chinese Journal of Computers,2022 45(6):1161-1175.

[3] YAO Y Y,LIN T Y. Generalization of rough sets using modal logics[J]. Intelligent Automation & Soft Computing,1996,2(2):103-119.

[4] ZAKOWSKI W. Approximations in the space(u,π)[J]. Demonstratio Mathematica,1983,16(3):761-770.

[5] DUBOIS D,PRADE H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets [J]. International Journal of General System,1990,17(2/3): 191-209.

[6] LiN T Y,HUANG K J,LIU Q,et al. Rough sets,neighborhood systems and approximation[C]//Proceedings of the Fifth International Symposium on Methodologies of Intelligent Systems. 1990:130-141.

[7] LIN T Y. Topological and fuzzy rough sets[M]//Intelligent Decision Support. Springer,Dordrecht,1992:287-304.

[8] LIN T Y. Neighborhood systems-A qualitative theory for fuzzy and rough sets[J]. Advances in Machine Intelligence and Soft Computing,1997,4:132-155.

[9] SIERPINSKI W. General topology[M]. Courier Dover Publications,2020.

[10] DAY M M. Convergence,closure and neighborhoods[J]. Duke Mathematical Journal,1944,11(1):181-199.

[11] ATIK E,EL FATTAH A,NAWAR A,et al. Rough approximation models via graphs based on neighborhood systems[J]. Granular Computing,2021,6(4):1025-1035.

[12] SYAU Y R,LIN E B. Neighborhood systems and covering approximation spaces[J]. Knowledge-Based Systems,2014,66: 61-67.

[13] ZHANG Y L,LI C Q,LIN M L,et al. Relationships between generalized rough sets based on covering and reflexive neighborhood system[J]. Information Sciences,2015,319:56-67.

[14] WANG G Y,YAO Y Y,YU H. A survey on rough set theory and applications [J]. Chinese Journal of Computers, 2009, 32(7):1229-1246.

[15] LIN T Y,LIU Q. Rough approximate operators:axiomatic rough set theory[M]//Rough Sets,Fuzzy Sets and Knowledge Discovery. Springer,London,1994:256-260.

[16] ZHU F,HE H C. The axiomatization of the rough set[J]. Chinese Journal of Computers(Chinese Edition),2000,23(3):330-333.

[17] SUN H,LIU D Y,LI W. The minimization of axiom groups of rough set[J]. Chinese Journal of Computers(Chinese Edition), 2002,25(2):202-209.

[18] YAO Y Y. Constructive and algebraic methods of the theory of rough sets [J]. Information Sciences, 1998,109(1/2/3/4): 21-47.

[19] Thiele H. On axiomatic characterisations of crisp approximation operators[J]. Information Sciences,2000,129(1/2/3/4):221-226.

[20] ZHANG Y L,LI J,WU W Z. On axiomatic characterizations of three pairs of covering based approximation operators[J]. Information Sciences,2010,180(2):274-287.

[21] ZHANG Y L,LUO M K. On minimization of axiom sets charac-

terizing covering-based approximation operators[J]. Information Sciences, 2011, 181(14): 3032-3042.
[22] ZHAO F, LI L. Axiomatization on generalized neighborhood system-based rough sets[J]. Soft Computing, 2018, 22(18): 6099-6110.
[23] MORSI N N, YAKOUT M M. Axiomatics for fuzzy rough sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 100(1/2/3): 327-342.
[24] THIELE H. On axiomatic characterizations of fuzzy approximation operators[C]// International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing. Berlin: Springer, 2000: 277-285.
[25] THIELE H. On axiomatic characterization of fuzzy approximation operators. II. The rough fuzzy set based case[C]// Proceedings 31st IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic. IEEE, 2001: 330-335.
[26] WU W Z, LEUNG Y, MI J S. On characterizations of (I, T)-fuzzy rough approximation operators[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 154(1): 76-102.
[27] ZHOU L, WU W Z. On generalized intuitionistic fuzzy rough approximation operators[J]. Information Sciences, 2008, 178(11): 2448-2465.
[28] YAO Y Y. Relational interpretations of neighborhood operators and rough set approximation operators [J]. Information Sciences, 1998, 111(1/2/3/4): 239-259.
[29] LIAU C J, LIN E B, SYAU Y R. On consistent functions for neighborhood systems[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2020, 121: 39-58.

LIU Yinshan, born in 1998, postgraduate. His main research interests include rough set theory, formal concept analysis and fuzzy logic.

QIN Keyun, born in 1962, Ph.D, professor, Ph.D supervisor. His main research interests include rough set theory, formal concept analysis and fuzzy logic.