计算机科学
COMPUTER SCIENCE

δ-sober空间及其性质

王武, 谭彬, 张舜

计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.220900008

δ-sober 空间及其性质

王 武[1] 谭 彬[2] 张 舜[3]
1 天津理工大学中环信息学院基础课部 天津 300380
2 天津理工大学理学院 天津 300384
3 天津仁爱学院数理教学部 天津 300163

摘 要 文中讨论了 δ-sober 空间的一些基本性质,引入了 s_2-弱收敛空间的概念,并讨论了 δ-sober 空间和 s_2-弱收敛空间的关系。主要结论有:(1)δ-sober 空间的子空间为 δ-sober 空间;(2)设(X,τ)为 IDC 空间,则(X,τ)为 s_2-弱收敛空间当且仅当(X,τ)为 δ-sober 空间;(3)s_2-弱收敛的 IDC 空间上的拓扑 τ 与在特殊化序下的 σ_2-拓扑一致,并且 $\mathcal{O}(X)=\mathcal{O}_{\sigma_2}(X)=\mathcal{O}_{SI_2}(X)$;(4)设$(X,\tau)$为 SI_2-拟连续空间,则(X,τ_{SI_2})为 δ-sober 空间;(5)设(X,τ)为 δ-sober 的局部超紧空间,则(X,τ)为 s_2-拟连续偏序集。

关键词:SI_2-连续;SI_2-拓扑;δ-sober 空间;s_2-弱收敛;IDC 空间
中图法分类号 O153.1;O189.1

δ-sober Spaces and Its Properties

WANG Wu[1], TAN Bin[2] and ZHANG Shun[3]
1 Basic Course Department of Zhonghuan Information College, Tianjin University of Technology, Tianjin 300380, China
2 School of Science, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China
3 Mathematics Teaching Department of Tianjin Ren'ai College, Tianjin 301636, China

Abstract This paper discusses some basic properties of δ-sober spaces, introduces the concept of s_2-weakly convergent spaces, and discusses the relationship between δ-sober spaces and s_2-weakly convergent spaces. The main conclusions are as follows: 1) The subspaces of δ-sober spaces are δ-sober spaces. 2) If (X,τ) is an IDC space, then it is an s_2-weakly convergence space if and only if it is a δ-sober space. 3) The topology on the s_2-weakly convergence IDC space is consistent with the σ_2-topology and $\mathcal{O}(X)=\mathcal{O}_{\sigma_2}(X)=\mathcal{O}_{SI_2}(X)$. 4) If (X,τ) is an SI_2-quasicontinuous space, then it is a δ-sober space. 5) Let (X,τ) be a locally hyper-compact δ-sober space, then it is an s_2-quasi continuous poset.

Keywords SI_2-continuous, SI_2-topology, δ-sober space, s_2-weak convergence, IDC space

1 基本概念

Domain 是定义在偏序集上的特殊结构,为计算机程序式语言提供了数学模型,并在知识表示、模式识别、理论计算机等领域有着广泛的应用。拓扑学作为现代数学的重要分支,吸引了大量学者的关注。偏序集与 T_0 拓扑空间之间有着紧密的联系,给定一个偏序集,可以定义 Scott 拓扑、Lawson 拓扑、上拓扑、双 Scott 拓扑等[1-5]。

将 Domain 理论推广到拓扑空间是序结构理论的一个研究方向。Kou 等[6-7]在 T_0 拓扑空间中利用网的收敛定义了定向空间和连续空间,并给出了定向空间许多有意义的性质,如以定向空间为对象,连续函数为态射的范畴是 Cartesian 闭范畴。2019 年,Xu 等利用 T_0 拓扑空间的既约子集定义了新的二元关系$\ll_{SI_2}$和 SI_2-连续空间。这些都是 Domain 理论在 T_0 拓扑空间的推广。

Sober 空间在非 Hausdroff 拓扑与 Domain 理论中扮演着重要角色,吸引了广大学者的关注[8-9]。将 sober 空间推广,得到了比 sober 空间更强的超 sober 空间以及弱于 sober 空间的 k-有界 sober 空间[10-11]。本文将研究介于 sober 空间和 k-有界 sober 空间的一种特殊空间:δ-sober 空间。主要结论有:(1)δ-sober 空间的子空间为 δ-sober 空间;(2)设(X,τ)为 IDC 空间,则(X,τ)为 s_2-弱收敛空间当且仅当(X,τ)为 δ-sober 空间;(3)s_2-弱收敛的 IDC 拓扑空间上的拓扑 τ 与在特殊化序下的 σ_2-拓扑一致,并且 $\mathcal{O}(X)=\mathcal{O}_{\sigma_2}(X)=\mathcal{O}_{SI_2}(X)$;(4)设$(X,\tau)$为 SI_2-拟连续空间,则(X,τ_{SI_2})为 δ-sober 空间;(5)设(X,τ)为 δ-sober 的局部超紧空间,则(X,τ)为 s_2-拟连续偏序集。

介绍偏序集理论中的一些基本概念[12]。设 L 为偏序集,子集 $D\subseteq L$,如果任意 $x,y\in D$,存在 $z\in D$ 使得 $x,y\leqslant z$,则称 D 为定向集。如果 L 的任意定向子集有上确界,则称 L 为定向完备偏序集(dcpo)。任给 $A\subseteq L$,记 $\uparrow A=\{x:\exists a\in A, x\geqslant a\}$,$\downarrow A=\{x:\exists a\in A, x\leqslant a\}$。

如果 A 为单点集$\{a\}$,则记 $\uparrow A=\uparrow a$,$\downarrow A=\downarrow a$。$A^{\uparrow}$ 与 $A^{\downarrow}$ 分别表示 A 所有上界和所有下界的集合,令 $A^{\delta}=(A^{\uparrow})^{\downarrow}$,

基金项目:天津市教委科研计划项目(2018KJ147);2021 年高等学校大学数学教学研究与发展中心教学改革项目(CMC20210115)
This work was supported by the Scientific Research Plan Project of Tianjin Education Commission(2018KJ147) and Teaching Reform Project of University Mathematics Teaching Research and Development Center of Colleges and Universities in 2021(CMC20210115).
通信作者:王武(wangwu@alu.scu.edu.cn)

$\delta(L)=\{A^{\delta}:A\subseteq L\}$。显然，如果 $A\subseteq B$，则 $A^{\delta}\subseteq B^{\delta}$。

设 L 为偏序集，$P^{w}(L)$ 为 L 的所有非空有限子集的集合，$x,y\in L$，如果任意定向集 $D\subseteq L$，$y\in D^{\delta}$ 意味着 $D\cap\uparrow x\neq\emptyset$，则称 x 逼近 y，记为 $x\ll y$。记 $\Uparrow x=\{y:x\ll y\}$，$\Downarrow x=\{y:y\ll x\}$。

如果任意 $x\in L$，$\Downarrow x$ 是定向的且 $x=\bigvee\Downarrow x$，则称 L 为 s_2-连续偏序集。事实上，条件 $x=\bigvee\Downarrow x$ 等价于 $x\in(\Downarrow x)^{\delta}$。

任意集合 $G,H\subseteq L$。定义如下二元关系：$G\ll H$ 当且仅当如果任意定向集 $D\subseteq L$，$\uparrow H\cap D^{\delta}\neq\emptyset$ 蕴含 $\uparrow G\cap D\neq\emptyset$。特别地，$G\ll\{x\}$ 简记为 $G\ll x$，$\{y\}\ll H$ 简记 $y\ll H$。令 $fin(x)=\{E\subseteq\mathscr{P}^{w}(L):E\ll x\}$。

设 L 为偏序集，任意 $x\in L$，如果(1) $fin(x)$ 为定向集族，即任意 $E,F\in fin(x)$，存在 $H\in fin(x)$ 使得 $\uparrow H\subseteq\uparrow E\cap\uparrow F$；(2) $\uparrow x=\bigcap_{F\in fin(x)}\uparrow E$，则称 L 为 s_2-拟连续偏序集。任给子集 $U\subseteq L$，如果 $U=\uparrow U$ 且对任意的定向集 $D\subseteq L$，$U\cap D^{\delta}\neq\emptyset$ 蕴含 $U\cap D\neq\emptyset$，则称 U 为 σ_2-开集。所有的 σ_2-开集构成一个拓扑，称为 σ_2-拓扑[13]。本文用 (X,τ_{σ_2}) 表示 σ_2-拓扑空间，$\mathscr{O}_{\sigma_2}(X)$ 表示所有 σ_2-开集的集合。

设 (X,τ) 是一个 T_0 拓扑空间，定义偏序关系 $x\leqslant y$ 当且仅当 $x\in cl_{\tau}(\{y\})$，其中 $cl_{\tau}(\{y\})$ 表示单点集 $\{y\}$ 在 τ 中的闭包，则 $(X,\leqslant)$ 为一个偏序集，类似一般的偏序集可以定义上集、下集、dcpo 等。特别地，关于特殊化序，拓扑空间 (X,τ) 中的开集都是上集，闭集都是下集。

如果拓扑空间 (X,τ) 的一个非空子集 F 满足任意闭集 $A,B\subseteq X$，$F\subseteq A\cup B$ 蕴含 $F\subseteq A$ 或者 $F\subseteq B$，则称 F 为既约的，记 $Irr_{\tau}(X)$ 为 (X,τ) 的所有既约子集的集合。既约集与定向集之间有着紧密的联系，一方面对于给定的 T_0 拓扑空间，在其特殊化序下，(X,τ) 中的定向子集都是既约集；另一方面对于任意偏序集 P，其 Alexandroff 空间中的既约集恰好为偏序集 P 中的定向集。

定义 1[14] 设 (X,τ) 为拓扑空间。

1) 如果 X 的任意既约闭集 F，都存在唯一 $x\in X$，使得 $F=cl_{\tau}(x)$，则称 (X,τ) 为 sober 空间。

2) 如果 X 的每一个上确界存在的既约闭集 F，都存在唯一 $x\in X$，使得 $F=cl_{\tau}(x)$，则称 (X,τ) 为 k-有界 sober 空间。

命题 1[15] 设 (X,τ) 为拓扑空间，Y 为 X 的子空间，τ_Y 为 Y 上的遗传拓扑。则任意 $A\subseteq Y$，下列等价：

1) A 为 (Y,τ_Y) 的既约子集；

2) A 为 (X,τ) 的既约子集；

3) $cl_{\tau}(A)$ 为 (X,τ) 的既约闭集。

定义 2[16] 设 (X,τ) 为 T_0 拓扑空间且 $x,y\in X$。如果任意 $F\in Irr_{\tau}(X)$，$y\in F^{\delta}$ 蕴含 $x\in\downarrow F$，则 $x\ll_{SI_2}y$。记 $\Downarrow_{SI_2}x=\{y:y\ll_{SI_2}x\}$，$\Uparrow_{SI_2}x=\{y:x\ll_{SI_2}y\}$。

定义 3[16] 设 (X,τ) 为 T_0 拓扑空间，$U\subseteq X$，$\mathscr{O}(X)$ 为拓扑空间 (X,τ) 所有开集的集合。如果(1) $U\in\mathscr{O}(X)$；(2) 对任意的 $F\in Irr_{\tau}(X)$，如果 $F^{\delta}\cap U\neq\emptyset$ 能够蕴含 $F\cap U\neq\emptyset$，则称 U 为 SI_2-开集。易知，所有的 SI_2-开集构成一个拓扑，称这个拓扑为 SI_2-拓扑。本文用 (X,τ_{SI_2}) 表示 SI_2-拓扑空间，所有 SI_2-开集的集合记为 $\mathscr{O}_{SI_2}(X)$。

定义 4 设 (X,τ) 为 T_0 拓扑空间。

1) 如果任意 $x\in X$，$\Downarrow_{SI_2}x$ 为既约集且 $x=\bigvee\Downarrow_{SI_2}x$，则称 (X,τ) 为 Irr_2-连续空间。

2) 如果任意 $x\in X$，(1) $\Uparrow_{SI_2}x$ 为开集；(2) $\Downarrow_{SI_2}x$ 为既约集且 $x=\bigvee\Downarrow_{SI_2}x$，则称 (X,τ) 为 $SI_2{}^{-}$-连续空间[16]。

3) 如果任意 $x\in X$，(1) $\Uparrow_{SI_2}x$ 为开集；(2) $\Downarrow_{SI_2}x$ 为定向集且 $x=\bigvee\Downarrow_{SI_2}x$，则称 (X,τ) 为 SI_2-连续空间[17]。

事实上，因为有 $\Downarrow_{SI_2}x\subseteq\downarrow x$ 成立，则显然有 $x=\bigvee\Downarrow_{SI_2}x$ 当且仅当 $x\in(\Downarrow_{SI_2}x)^{\delta}$。当 (X,τ) 为 SI_2-连续空间时，$\{\Uparrow_{SI_2}x:x\in X\}$ 为 (X,τ_{SI_2}) 的基[17]。

设 (X,τ) 为 T_0 拓扑空间，$G,H\subseteq X$。定义如下的二元关系：$G\ll_{SI_2}H$ 当且仅当任意 $F\in Irr_{\tau}(X)$，如果 $\uparrow H\cap F^{\delta}\neq\emptyset$ 蕴含 $\uparrow G\cap F\neq\emptyset$。本文中将 $G\ll_{SI_2}\{x\}$ 简记为 $G\ll_{SI_2}x$，$\{y\}\ll_{SI_2}H$ 简记 $y\ll_{SI_2}H$。令

$\Uparrow_{SI_2}G=\{x:G\ll_{SI_2}x\}$，$\Downarrow_{SI_2}H=\{y:x\ll_{SI_2}H\}$

$fin_{SI}(x)=\{E\subseteq\mathscr{P}w(X):E\ll_{SI_2}x\}$

定义 5[17] 设 (X,τ) 为 T_0 拓扑空间。任意 $x\in X$，如果 1) 对任意 $E\in\mathscr{P}^{w}(X)$，$\Uparrow_{SI_2}E$ 为 (X,τ) 中开集；2) $fin_{SI}(x)$ 为定向集族；3) $\uparrow x=\bigcap_{E\in fin_{SI}(x)}\uparrow E$，则称 (X,τ) 为 SI_2-拟连续空间。

命题 2[17] 设 (X,τ) 为 SI_2-拟连续空间，有如下结论：

1) 如果非空有限集 $H\subseteq X$，则 $\Uparrow_{SI_2}H=\mathrm{int}_{\tau_{SI_2}}(\uparrow H)$；

2) 设 $U\subseteq X$，则 U 为 SI_2-开集当且仅当 $U=\bigcup\{\Uparrow_{SI_2}E:E\in\mathscr{P}^{w}(X),\uparrow E\subseteq U\}$；

3) $\{\Uparrow_{SI_2}E:E\in\mathscr{P}^{w}(X)\}$ 为 (X,τ_{SI_2}) 的基。

2 δ-sober 空间

定义 6[16] 设 (X,τ) 为 T_0 拓扑空间。如果任意既约闭集 $F\in Irr_{\tau}(X)$ 满足 $F=F^{\delta}$，则称 (X,τ) 为 δ-sober 空间。

δ-sober 空间是弱于 sober 空间、强于 k-有界 sober 空间的空间。设 (X,τ) 为 T_0 拓扑空间，任意上确界存在的既约闭集 F，显然 $F^{\delta}=\downarrow\sup F$。1) 如果 (X,τ) 为 sober 空间，则对任意既约闭子集有 $F=\downarrow\sup F$，即 $F=F^{\delta}$，(X,τ) 为 δ-sober 空间；2) 如果 (X,τ) 为 δ-sober 空间，则对上确界存在的既约闭子集有 $F=\downarrow\sup F=F^{\delta}$，则 (X,τ) 为 k-有界 sober 空间。

参考文献[16]中定义 5.2 定义了 $SI_2{}^{-}$-连续空间(原定义中称为 SI_2-连续空间，为了区分符号本文记为 $SI_2{}^{-}$-连续空间)，并在定理 5.5 中证明了 $SI_2{}^{-}$-连续空间中，二元关系 $\ll_{SI_2}$ 满足插入性，即如果 $x\ll_{SI_2}y$，则存在 $z\in X$ 使得 $x\ll_{SI_2}z\ll_{SI_2}y$。

设 (X,τ) 是 T_0 拓扑空间，如果任意 $y\in U\in\tau$，存在 $x\in X$ 使得 $y\in(\uparrow x)_{\tau}^{\circ}\subseteq U$，其中 $(\uparrow x)^{\circ}{}_{\tau}$ 表示 $\uparrow x$ 在拓扑 τ 中的内部，则称 (X,τ) 为 C-空间。

命题 3[16] 拓扑空间 (X,τ) 为 SI_2^{-}-连续空间的充分必要条件为任意 $x\in X$，有(1) $\Uparrow_{SI_2}x\in_{SI_2}(X)$；(2) $\Downarrow_{SI_2}x$ 为定向集且 $x=\bigvee\Downarrow_{SI_2}x$。

命题 4[16] 设 (X,τ) 为 T_0 拓扑空间。则下列叙述成立：

1) (X,τ) 为 δ-sober 空间当且仅当 $\mathscr{O}(X)=\mathscr{O}_{SI_2}(X)$；

2) (X,τ) 为 $SI_2{}^{-}$-连续空间当且仅当 (X,τ_{SI_2}) 为 C-空间；

3) 如果 (X,τ) 为 $SI_2{}^{-}$-连续空间，则 (X,τ_{SI_2}) 为 δ-sober 空间；

4) 如果 (X,τ) 为 δ-sober 的 C-空间，则 (X,τ) 与特殊化序下的 (X,τ_{σ_2}) 为同一拓扑，即 $\mathscr{O}(X)=\mathscr{O}_{\sigma_2}(X)$。

推论 1 设 (X,τ) 为 T_0 拓扑空间。如果 (X,τ) 为 SI_2-连续的，则 (X,τ_{SI_2}) 为 δ-sober 的 C-空间。

由命题 3 知，$SI_2{}^{-}$-连续性与 SI_2-连续性等价，故当 (X,τ) 为 SI_2-连续空间时，易知由 (X,τ) 生成的特殊化序和由 $(X,$

τ_{SI_2})生成的特殊化序一致,故 X 上的 σ_2-拓扑是唯一的。则 1)(X,τ_{SI_2})为 δ-Sober 的 C-空间,且$_{SI_2}(X)={}_{\sigma_2}(X)$。从而当($X,\tau$)为 δ-sober 空间时,$\mathcal{O}(X)=\mathcal{O}_{\sigma_2}(X)=\mathcal{O}_{SI_2}(X)$。2)任意 $x,y\in X$,$\{\Uparrow x:x\in X\}$和$\{\Uparrow_{SI_2}x:x\in X\}$都是($X,\tau_{\sigma_2}$)的基,且 $x\ll y$ 当且仅当 $x\ll_{SI_2}y$。下面从另一个角度直接证明上述结论。

定义 7[18]　设(X,τ)为 T_0 拓扑空间。如果对任意的既约子集 $F\subseteq X$,存在定向集 $D\subseteq\downarrow F$ 使 $D^\delta=F^\delta$,则称 X 为 IDC 空间。

设(X,τ)为拓扑空间,如果任意 $x\in U\in(X)$,存在有限集 $F\subseteq X$ 使得 $x\in\mathrm{int}_\tau(\uparrow F)\subseteq\uparrow F\subseteq U$,则($X,\tau$)称为局部超紧的。文献[17]中引理 3.5 说明了局部超紧空间为 IDC 空间,而 C-空间为局部超紧空间,故 C-空间都是 IDC 空间。

命题 5　设(X,τ)为 SI_2-连续空间,则 $x\ll_{SI_2}y$ 当且仅当 $x\ll y$。

证明:显然 $x\ll_{SI_2}y$ 蕴含 $x\ll y$。设 $x\ll y$,由(X,τ_{SI_2})为 C-空间知 X 为 IDC 空间,故任意既约子集 F,则存在定向集 $D\subseteq\downarrow F$ 使得 $D^\delta=F^\delta$。若 $y\in F^\delta=D^\delta$,则 $D\cap\uparrow x\neq\emptyset$,显然 $F\cap\uparrow x\neq\emptyset$,从而 $x\ll_{SI_2}y$。

命题 6　设(X,τ)为 T_0 拓扑空间。若(X,τ)为 IDC 空间,则 $\Downarrow_{SI_2}x$ 为既约集当且仅当 $\Downarrow_{SI_2}x$ 为定向集。

证明:必要性显然。设 X 为 IDC 空间,$\Downarrow_{SI_2}x$ 为既约集。由 X 为 IDC 空间可知,存在定向集 $D\subseteq\downarrow(\Downarrow_{SI_2}x)$使得 $D^\delta=(\Downarrow_{SI_2}x)^\delta$。任意 $a,b\in\Downarrow_{SI_2}x$,因为 $x\in(\Downarrow_{SI_2}x)^\delta=D^\delta$,则存在 $m,n\in D$ 使得 $a\leqslant m,b\leqslant n$。由于 $D\subseteq\downarrow(\Downarrow_{SI_2}x)$为定向集,则存在 $c\in D$,$m,n\leqslant c$,即 $a,b\leqslant c$。故可知 $\Downarrow_{SI_2}x$ 为定向集。

命题 4 和命题 6 在 Irr_2-连续空间中,(X,τ)为 IDC 空间或者 $\Uparrow_{SI_2}x$ 为开集,都能确保 $\Downarrow_{SI_2}x$ 为定向集。参考文献[11]中定理 3.9 也证明了 SI_2-连续空间中关系$\ll_{SI_2}$满足插入性质,而且证明过程说明只需 $\Downarrow_{SI_2}x$ 为定向集且 $x=\vee\Downarrow_{SI_2}x$,关系$\ll_{SI_2}$就满足插入性质。从而 Irr_2-连续的 IDC 空间中关系$\ll_{SI_2}$满足插入性质,插入性质在 Domain 理论中占据着重要的地位,从而 Irr_2-连续的 IDC 空间也具有较好的性质。

下面给出 δ-Sober 空间的遗传性。

命题 7　设(X,τ)为 δ-sober 空间,(Y,τ_Y)为(X,τ)的子空间,则(Y,τ_Y)为 δ-sober 空间。

证明:设 (Y,τ_Y)为(X,τ)子空间。显然任意子集 $A\subseteq Y$,$A_Y^\delta=A_X^\delta\cap Y$。设 $F\subseteq Y$ 为 Y 的既约闭子集,则由命题 1 可知 $cl_X(F)$为 X 的既约闭子集。由于 X 为 δ-Sober 空间,则 $cl_X(F)=(cl_X(F))^\delta$。

下面说明 $F=cl_X(F)\cap Y$。因为 $F\subseteq cl_X(F)$,则显然 $cl_X(F)\cap Y$ 为 Y 中的闭集且 $F\subseteq cl_X(F)\cap Y$。另一方面,设 $V\subseteq X$ 为 X 中的闭集且 $F=V\cap Y$,则 $F\subseteq V$。由于 $cl_X(F)$为 X 中包含 F 的最小闭集,则 $cl_X(F)\subseteq V$,即 $cl_X(F)\cap Y\subseteq F$。故$F=cl_X(F)\cap Y$。

显然 $F_Y^\delta=F_X^\delta\cap Y\subseteq(cl_X(F))^\delta\cap Y=cl_X(F)\cap Y=F$,则 $F_Y^\delta\subseteq F$。

另一方面,由 $F\subseteq Y$ 知 $F\subseteq F_Y^\delta$,则 $F=F_Y^\delta$,(Y,τ_Y)为 δ-sober 空间。

3　δ-sober 空间与 s_2-弱收敛空间

本章引入 s_2-弱收敛空间的概念,并给出 δ-sober 空间的等价刻画。

定义 8　设(X,τ)为 T_0 拓扑空间。

1)如果任意定向集 $D\subseteq X$ 和 $x\in D^\delta$,D 作为网收敛到 x,则称(X,τ)为 s_2-弱收敛空间。

2)如果任意定向集 $D\subseteq X$,D 作为网收敛到 x 当且仅当 $x\in D^\delta$,则称(X,τ)为 s_2-收敛空间。

设(X,τ)为 T_0 拓扑空间,任意定向集 $D\subseteq X$ 且 $x=\sup D$,若 D 作为网收敛到 x,则称(X,τ)为弱收敛空间。显然有:1)若(X,τ)为弱收敛空间且在特殊化序下为 dcpo,则(X,τ)为 s_2-弱收敛空间;2)若(X,τ)为 s_2-收敛空间,则(X,τ)为弱收敛空间。

命题 8　(X,τ)为 δ-sober 空间,则(X,τ)为 s_2-弱收敛空间。

证明:设(X,τ)不是 s_2-弱收敛空间,则存在 $D\subseteq X$ 和 $x\in D^\delta$,D 不收敛到 x,从而存在开集 U 使得 $x\in U$,$D\cap U=\emptyset$(若存在 $d_0\in D\cap U$,则任意 $d\geqslant d_0$,$d\in U$,D 终在 U 中)。故 $D\subseteq X\backslash U$,由 U 为开集知 $X\backslash U$ 为闭集。因为(X,τ)为 δ-sober 空间,则 $\mathcal{O}(X)=\mathcal{O}_{SI_2}(X)$,即 $X\backslash U$ 为 SI_2-闭集,从而 $X\backslash U$ 对既约子集的所有上界的下界封闭,而定向集都是既约集,则 $cl(D)\subseteq X\backslash U$。而 $cl(D)=(cl(D))^\delta$,则 $D^\delta\subseteq(cl(D))^\delta=cl(D)\subseteq L\backslash U$,从而与 $x\in D^\delta\subseteq L\backslash U$ 矛盾。则(X,τ)为 s_2-弱收敛空间。

命题 9　设(X,τ)为 s_2-弱收敛的 IDC 空间,则(X,τ)为 δ-sober 空间。

证明:设(X,τ)为 s_2-弱收敛的 IDC 空间,既约闭子集 $F\subseteq X$。由(X,τ)为 IDC 空间知,存在定向集 $D\subseteq\downarrow F$ 使得 $D^\delta=F^\delta$。由 $F\subseteq X$ 为闭集且 $D\subseteq\downarrow F$,断定 $D^\delta\subseteq F$。假设 $D^\delta\subseteq F$ 不成立,则存在 $x\in D^\delta\cap X\backslash F$。因为 X 为 s_2-弱收敛的,则 D 收敛到 x。由 $X\backslash F$ 为开集知 D 终在 $X\backslash F$ 中,与 $D\subseteq\downarrow F$ 矛盾,故 $D^\delta\subseteq F$。

另一方面,显然 $F\subseteq F^\delta$,则 $F^\delta=F$,故(X,τ)为 δ-sober 空间。

推论 2　设(X,τ)为 IDC 空间,则(X,τ)为 s_2-弱收敛空间当且仅当 X 为 δ-sober 空间。

推论 3　设(X,τ)为 C-空间,则(X,τ)为 s_2-弱收敛空间当且仅当(X,τ)为 δ-sober 空间。

命题 10　设(X,τ)为 IDC 空间,若(X,τ)为 s_2-弱收敛空间,则$(X)=\mathcal{O}_{\sigma_2}(X)$。

证明:设 $U\subseteq X$ 为开集,则 U 为上集。任意 $D\subseteq X$ 是定向集,如果 $D^\delta\cap U\neq\emptyset$,取 $x\in D^\delta\cap U$。因为 X 为 s_2-收敛空间,则 D 收敛到 x,而 $x\in U$,则 D 终在 U 中,$D\cap U\neq\emptyset$,即 U 为 σ_2-开集。

反之,若 U 为 σ_2-开集,任意既约子 F,则存在定向集 $D\subseteq\downarrow F$ 使得 $D^\delta=F^\delta$。如果 $F^\delta\cap U\neq\emptyset$,则 $D^\delta\cap U\neq\emptyset$,故 $D\cap U\neq\emptyset$,取 $d\in D\cap U$。因为 $D\subseteq\downarrow F$,则存在 $f\in F$ 使得 $d\leqslant f$。由于 U 为上集且 $d\in D\cap U$,则 $f\in F\cap U$,从而 U 为 SI_2-开集。

由命题 9 知 s_2-弱收敛的 IDC 空间为 δ-sober 空间,则$(X)={}_{SI_2}(X)$,故 U 为 σ_2-开集。综上 $\mathcal{O}(X)=\mathcal{O}_{\sigma_2}(X)$。

推论 4　设(X,τ)为 s_2-弱收敛的 δ-sober 空间,则 $\mathcal{O}(X)=\mathcal{O}_{SI_2}(X)=\mathcal{O}_{\sigma_2}(X)$。

由推论 1 可知,当(X,τ)为 SI_2-连续的 δ-sober 空间时,$\mathcal{O}(X)=\mathcal{O}_{SI_2}(X)=\mathcal{O}_{\sigma_2}(X)$,那么自然地问:($X,\tau$)为 SI_2-连续空间与(X,τ)为 s_2-弱收敛的 IDC 空间的关系是什么?

命题 11 设(X,τ)为 Irr-连续的 IDC 空间，则(X,τ)为 SI_2-连续的蕴含(X,τ)为 s_2-弱收敛空间。

证明：设(X,τ)为 Irr-连续空间，则$\{\Uparrow_{SI_2}x: x\in X\}$为$(X,\tau_{SI_2})$的基。因为任意 $x\ll_{SI_2}y$，(X,τ)为 Irr-连续空间的 IDC 空间，则二元关系 $\ll_{SI_2}$ 满足插入性质，即存在 $z\in X$ 使得 $x\ll_{SI_2}z\ll_{SI_2}y$。任意定向集 $D\subseteq X$，如果 $y\in D^{\delta}$，则可知 $\uparrow z\cap D\neq\emptyset$。令 $d\in\uparrow z\cap D$，则 $d\in\Uparrow_{SI_2}x$，从而易知 D 终在 $\Uparrow_{SI_2}x$ 中，故 D 收敛到 y，故(X,τ)为 s_2-弱收敛的 IDC 空间。

命题 12 设(X,τ)为 SI_2-拟连续空间，则(X,τ_{SI_2})为 δ-sober 空间。

证明：设 $F\in Irr_{\tau_{SI_2}}(X)$为闭集，显然 $F\subseteq F^{\delta}$。如果存在 $x\in F^{\delta}$，但 $x\notin F$，则 $x\in X\backslash F$。由于(X,τ)为 SI_2-拟连续空间，则存在有限集 $E\subseteq X\backslash F$ 使得 $x\in\Uparrow_{SI_2}E\subseteq X\backslash F$。

另外，由 $E\ll_{SI_2}x$，$x\in F^{\delta}$知 $\uparrow E\cap F\neq\emptyset$，与 $E\subseteq X\backslash F$ 矛盾，则 $x\in F$。综上可知 $F=F^{\delta}$，(X,τ_{SI_2})为 δ-sober 空间。

设 L 为 s_2-拟连续偏序集，则(L,τ_{σ_2})为局部超紧空间[17]，则有以下结论。

推论 5 设 L 为 s_2-拟连续偏序集，则(L,τ_{σ_2})为 δ-sober 空间。

证明：设 $F\in Irr_{\tau_{\sigma_2}}(X)$为 σ_2-闭集，显然 $F\subseteq F^{\delta}$且存在定向集 $D\subseteq\downarrow F$ 使得 $D^{\delta}=F^{\delta}$。如果存在 $x\in F^{\delta}$，但 $x\notin F$，则 $x\in X\backslash F$。由于(L,τ_{σ_2})为 σ_2-拟连续空间，则存在有限集 $E\subseteq X\backslash F$ 使得 $x\in\Uparrow E\subseteq X\backslash F$。由 $E\ll x$，$x\in F^{\delta}=D^{\delta}$知 $\uparrow E\cap D\neq\emptyset$，即 $\uparrow E\cap F\neq\emptyset$，与 $E\subseteq X\backslash F$ 矛盾，$x\in F$。综上可知 $F=F^{\delta}$，(L,τ_{σ_2})为 δ-Sober 空间。

设(X,τ)为 δ-sober 的局部超紧空间，则(X,τ_{SI_2})为局部超紧空间，从而$(X,\leqslant)$为 SI_2-拟连续的，则$(X,\leqslant)$为 s_2-拟连续的。下面给出一个更直接的证明。

命题 13 设(X,τ)为 δ-sober 的局部超紧空间，则$(X,\leqslant)$为 s_2-拟连续偏序集。

证明：分两步证明。

1)定义二元关系 $G\prec H\Leftrightarrow H\subseteq\operatorname{int}_{\tau}(\uparrow G)$，则 $G\prec H$ 蕴含 $G\ll H$。

令 $D\subseteq X$ 为定向集，并且 $D^{\delta}\cap H\neq\emptyset$，则 $cl(D)^{\delta}\cap H\neq\emptyset$，即 $cl(D)\cap H\neq\emptyset$，$cl(D)\cap\operatorname{int}_{\tau}(\uparrow G)\neq\emptyset$。从而 $D\cap\operatorname{int}_{\tau}(\uparrow G)\neq\emptyset$，也就是说有 $D\cap\uparrow G\neq\emptyset$，$G\ll H$。

2)$\mathscr{F}=\{E: E\in\mathscr{P}^{w}(X), E\prec x\}$为定向集族，且 $\uparrow x=\bigcap_{E\in\mathscr{F}}\uparrow E$。

设 $E_1,E_2\in\mathscr{F}$，则 $x\in\operatorname{int}_{\tau}(\uparrow E_1)\cap\operatorname{int}_{\tau}(\uparrow E_2)$。由于$(X,\tau)$为局部超紧空间，则存在有限集 $E\subseteq\operatorname{int}_{\tau}(\uparrow E_1)\cap\operatorname{int}_{\tau}(\uparrow E_2)$使得 $x\in\operatorname{int}_{\tau}(\uparrow E)\subseteq\uparrow E\subseteq\operatorname{int}_{\tau}(\uparrow E_1)\cap\operatorname{int}_{\tau}(\uparrow E_2)$，则显然 E 为 E_1,E_2 的上界。显然 $\uparrow x\subseteq\bigcap_{E\in\mathscr{F}}\uparrow E$，设 $y\in\bigcap_{E\in\mathscr{F}}\uparrow E$，$x\notin cl_{\tau}\{y\}$，则 $x\in X\backslash cl_{\tau}\{y\}$，故存在有限集 H 使得 $x\in\operatorname{int}_{\tau}(\uparrow H)\subseteq\uparrow H\subseteq X\backslash cl_{\tau}\{y\}$。

因为 $y\in\uparrow H$，则与 $y\in X\backslash cl_{\tau}\{y\}$矛盾，则 $x\in cl_{\tau}\{y\}$，$x\leqslant y$。从而 $y\in\uparrow x$，$\uparrow x=\bigcap_{E\in\mathscr{F}}\uparrow E$，则$(X,\leqslant)$为 s_2-拟连续的。

结束语 本文讨论了 δ-sober 空间及其基本性质，证明了 δ-sober 空间的子空间为 δ-sober 空间，引入了 IDC 空间和 s_2-弱收敛空间的概念，并证明了在 IDC 空间中，s_2-弱收敛与 δ-sober 等价。同时说明了 s_2-弱收敛的 IDC 拓扑空间和 SI_2-连续空间中 $\mathscr{O}(X)=\mathscr{O}_{\sigma_2}(X)=\mathscr{O}_{SI_2}(X)$，进而讨论了 s_2-弱收敛的 IDC 空间与 SI_2-连续空间的关系。本文有助于对 domain 理论与拓扑学的进一步研究。

参 考 文 献

[1] XU X Q, YANG J B. Topological Representation of Distributive Hypercontinuous Lattices[J]. Chiness Annals of Mathematics, 2009, 30(B): 199-206.

[2] AMADIO R M, CURIEN P L. Domains and Lambda-Calculi[M]. Cambride: Cambride University Press, 1998.

[3] YANG J B, LUO M K. Priestley spaces, Quasi-hyperalgebraic Lattices and Smyth Powerdomains[J]. Acta Mathematics Sinica, 2006(22): 951-958.

[4] ERNE M. The ABC Order and Topology [M]. Berlin: Hedermann Press, 1991.

[5] WANG W, KOU H. Approximation Structure on T_0 Topological Space[J]. Journal of Sichuan University (Natural Science Edition), 2014, 51(4): 681-683.

[6] YU Y, KOU H. Directed Space Defined through T_0 Topological Space with Specialization Order[J]. Journal of Sichuan University (Natural Science Edition), 2015, 52(2): 217-222.

[7] WANG W. Adjoint characterization of continuous spaces [J]. Mathematics in Practice and theory, 2020, 50(19): 276-280.

[8] GONG Y L, SHI J M. Countable sobrification [J]. Journal of Nanchang University (Natural Science Edition), 2018, 42(4): 322-326.

[9] MAO X X, XU L S. Properties and characterizations of supercontinuous posets[J]. Computer Engineering and Applications, 2015, 51(1): 9-12.

[10] WAN T L, YANG J B. Countable k-bounded Sober Spaces[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2020, 34(5): 8-16.

[11] CHEN D L, ZHANG Y. Observations on Irreducible Sets and Sober Spaces [J]. Chinese Quarterly of Mathematics, 2014, 9(4): 501-504.

[12] GIERZ G, HOFMANN K M, KEIMAL K, et al. Continuous Lattices and Domains [M]. Cambride: Cambride University Press, 2003.

[13] RUAN X J, XU X Q. Convergence in s_2-quasicontinuous posets [J]. Springerplus, 2016, 5(218): 1.

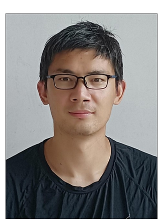
[14] TANG Y, YANG J B. Some properties of hyper-Sober and k-bounded Sober spaces [J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities (Ser. A), 2020, 35(3): 367-373.

[15] YANG Y, BAO M, XU X Q. Retracts and Smyth power spaces of k bounded sober spaces[J]. Pure and Applied Mathematics, 2022, 38(1): 13-24.

[16] CHONG S, HADRIAN A, DONG S Z, et al. SI2-topology on T_0 spaces[J]. Houston Journal of Mathematics, 2020, 46(2): 491-505.

[17] LUO S Z, XU X Q. On SI_2-continuous Spaces [J]. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 2019, 345: 125-141.

[18] LU J. Research on Domain theory in T_0 Topological space[D]. Xi'an: Shaanxi Normal University, 2018.



WANG Wu, born in 1985, master, associate professor. His main research interests include domain theory and complexity computing.