计算机科学
COMPUTER SCIENCE

基于逻辑视角的不完备形式背景上知识相容表示与推理

张少霞, 李德玉, 翟岩慧

计算机科学 COMPUTER SCIENCE

http://www.jsjkx.com

DOI:10.11896/jsjkx.240400104

基于逻辑视角的不完备形式背景上知识相容表示与推理

张少霞[1]　李德玉[2,3]　翟岩慧[2,3]

1 山西财经大学信息学院　太原 030006

2 山西大学计算机与信息技术学院　太原 030006

3 计算智能与中文信息处理教育部重点实验室(山西大学)　太原 030006

(zhangshaoxia_sxu@163.com)

摘　要　形式背景中的信息不完备引起了知识的不相容性,即蕴涵在不完备形式背景的任一完备化形式背景不能同时成立。逻辑描述是从语义上进行知识表示、语构上制定语义协调推理规则的方法论。首先,从逻辑角度研究不完备数据上的知识相容语义表示,通过定义不完备实例刻画知识的合理性和相容性,并构造最紧致的相容集(相容规范基)。其次,语构上制定具有语义合理性、相容性和完备性的推理规则,从而避免知识推理过程中产生不相容知识和无效知识。最后,将逻辑研究结果运用在不完备形式背景上,引入两类蕴涵形式:↓↓-型蕴涵和↑↑-型蕴涵。这两类蕴涵兼具相容性且相对于可接受性蕴涵尺度更加严格,构造这两类蕴涵的相容规范基并验证其完备性和无冗余性。

关键词:不完备形式背景;知识相容性;知识表示;相容规范基;知识推理

中图分类号　TP182

Knowledge Compatibility Representation and Reasoning in Incomplete Formal Contexts from Logical Perspective

ZHANG Shaoxia[1], LI Deyu[2,3] and ZHAI Yanhui[2,3]

1 School of Information, Shanxi University of Finance and Economics, Taiyuan 030006, China

2 School of Computer and Information Technology, Shanxi University, Taiyuan 030006, China

3 Key Laboratory of Computational Intelligence and Chinese Information Processing(Shanxi University), Ministry of Education, Taiyuan 030006, China

Abstract　The incomplete information in formal contexts leads to the incompatibility of knowledge, that is, implications cannot hold simultaneously in any completion of an incomplete formal context. Logical description is a methodology for representing knowledge from a semantic aspect and establishing inference rules with semantic coordination from a syntactic aspect. This paper firstly studies the compatibility semantic representation within incomplete data from a logical perspective, characterizes the soundness and compatibility of knowledge via incomplete instances, and constructs the most compact compatible set(namely compatible canonical basis). Secondly, this paper establishes inference rules with semantic soundness, compatibility, and completeness to avoid incompatible knowledge and invalid knowledge in knowledge reasoning. Finally, this paper applies the logical research results to incomplete formal contexts by introducing two types of implication forms, namely ↓↓-type implication and ↑↑-type implication, which are both compatible and more stringent than acceptable implication. The compatible canonical bases of the two types of implications are constructed and their completeness and non-redundancy are verified.

Keywords　Incomplete formal context, Knowledge compatibility, Knowledge representation, Compatible canonical basis, Knowledge reasoning

1　引言

形式概念分析(Formal Concept Analysis, FCA)[1]是20世纪80年代由Wille提出的用于概念分析和可视化的偏序集理论。在形式概念分析中,概念是知识表示的基本单元,是由外延和内涵组成的统一体,其中外延是属于该概念的所有对象,内涵是被外延中所有对象共享的属性集。通过外延/内涵间的包含关系定义了概念间的偏序关系,即现实中概念的

到稿日期:2024-04-15　返修日期:2024-06-23

基金项目:国家自然科学基金(62072294);山西省基础研究计划(202103021223303);山西省重点实验室开放课题(CICIP2022006)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(62072294), Fundamental Research Program of Shanxi Province (202103021223303) and Open Project Foundation of Intelligent Information Processing Key Laboratory of Shanxi Province(CICIP2022006).

通信作者:李德玉(lidysxu@163.com)

泛化/特化关系，概念集在该偏序关系下构成概念格。形式概念分析理论由于具有坚实的数学理论支撑、完整严密的推理框架，以及良好的可解释性等优点，已成为社会网络[2]、自然语言处理[3]、认知学习[4-5]等领域的强有力工具。

数据采集误差、传输失真、预处理等都会导致数据中信息不完备的情形。不完备数据在实际应用中广泛存在。FCA 通过不完备形式背景表示这类信息不完备数据，其上的知识获取也是 FCA 中的经典和热点问题。Burmeister 等[6-7]开创了非完备形式背景中的属性探索方法，使用三值 Kleene-logic 对前件和后件交集为空的属性蕴涵进行有效性评价。Obiedkov[8]进一步提出三值 Modal-logic 评价不完备形式背景中蕴涵的有效性：与不完备信息无关，形式背景中总是成立的蕴涵被称为必然性蕴涵；与不完备信息相关，在某些不完备信息"?"被确定为特定的"+"和"−"时才成立的蕴涵被称为可接受蕴涵。与三值 Kleene-logic 相比，三值 Modal-logic 突破了蕴涵前件和后件为空的限制，从而具有更强的灵活性。文献[8]还给出了从知识基出发进行必然性蕴涵和可接受性蕴涵的推导机制。Hanika 等[9]和 Felde 等[10]研究了基于交互协同和并行机制的属性探索方法。

目前，非完备形式背景中基于概念构造和规则提取的知识获取方法也是国内外学者关注的热点。Yao[11]提出了非完备形式背景中的不确定概念，将概念外延表示为包含上界和下界的区间集形式。Li 等[12]根据区间集外延的确定包含、可能包含和弱包含关系，获取不确定概念之间的强规则和弱规则。Li 等[13]定义了非完备形式背景中的近似概念，并根据概念外延之间的包含关系获取非冗余的近似规则。Yao[14]提出了区间集概念和不完备形式背景中部分已知概念的通用表示框架，确定了 4 类部分已知概念：SE-SI 形式概念、SE-ISI 形式概念、ISE-SI 形式概念和 ISE-ISI 形式概念。Wang 等[15]提出了基于不同标准的 SE-ISI 概念格的 4 种属性约简方法。Long 等[16]研究了非完备模糊形式背景中基于属性导出的三支概念格获取方法。Sadou 等[17]突破三支概念中内涵被限制为外延中所有对象所共有的属性的限制，提出一种新的 Kripke 语义，并构造了一种更为灵活的可能性形式概念(Possible Formal Concept)。Yang 等[18]针对语言值信息的缺失，给出了不完备模糊语言形式背景，讨论了模糊语言近似概念，构造了相应的模糊语言近似概念格。Srirekha 等[19]研究了基于对象排序方法的非完备形式背景中 SE-ISI 概念格的属性约简方法。Ren 等[20]研究了不完备形式背景中的三支近似概念属性约简方法。

在已有的规则提取和知识获取方法中，尚未揭示不完备形式背景中的知识不相容性现象，也并未关注基于知识不相容性的知识获取方法。事实上，知识相容性是知识集合的一种特性。当知识集中存在语义矛盾时，称该集合为不相容集；否则，称为相容集。我们发现，形式背景中的信息缺失可能引起知识的不相容性，即知识在其任意完备化形式背景中不能同时成立的情形。不相容性在客观上限制了知识在应用过程中的协同作用。进一步的研究发现，语构工具(如推理规则)并不具备识别知识相容性的能力，仅依赖推理规则只能发挥有限的知识管理和约束作用，盲目地在不相容知识上进行知识推理甚至可能产生无效知识，且随着推理过程的推进，这些无效知识在知识库中不断传播，会进一步加剧无效知识的产生。另外，我们还例证了不完备形式背景中知识的相容性不具有传递性，从而无法通过建立其等价关系进行知识相容表示与推理。

逻辑描述是从语义上进行知识表示、从语构上制定语义协调的推理规则的方法论。传统的逻辑语义表示注重完备数据情形下知识的合理性、完备性和无冗余性表示。为解决知识不相容性带来的一系列问题，保证知识获取和知识推理的准确性和有效性，本文首先从逻辑角度研究不完备数据下的知识相容语义表示方法，该方法通过定义不完备实例来刻画蕴涵的合理性和相容性，并构造最紧致的相容集表示形式——相容规范基，该规范基以最少的蕴涵数量保持了相容集的全部信息。其次，从语构上制定具有语义合理性和完备性的推理规则，从而避免知识推理过程中产生不相容蕴涵或无效蕴涵。最后，将逻辑研究结果运用在数据研究上，引入不完备形式背景中两类尺度相对严格但兼具相容性的蕴涵形式：↓↓-型蕴涵和↑↑-型蕴涵。构造这两类蕴涵的相容规范基，并验证其完备性和无冗余性。

2 形式背景与蕴涵

定义 1[1] 一个形式背景是一个三元组$\mathbb{K}=(G,M,I)$，其中 G 和 M 分别是对象集和属性集，$I\subseteq G\times M$ 是对象和属性之间的关联关系的集合。对于 $g\in G$ 和 $m\in M$，$(g,m)\in I$ 表示"对象 g 拥有属性 m"。

形式背景通常用二维表的方式表示，其中行头表示对象名称，列头表示属性名称，符号"+"表示相应的行对象具有列属性，"−"表示行对象不含有列属性。

例 1 表 1 呈现了科教电影"生物与水"中的形式背景，表中的对象是影片中提到的各类生物，属性用来描述这些生物的各种特征。

表 1 科教电影"生物与水"

Table 1 Science and education film *Biology and Water*

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
蚂蟥	+	+	−	−	−	−	+	−	−
鱼	+	+	−	−	−	−	+	+	−
蛙	+	+	+	−	−	−	+	+	−
狗	+	−	+	−	−	−	+	+	+
水草	+	+	−	+	−	+	−	−	−
芦苇	+	+	+	+	−	+	−	−	−
豆	+	−	+	+	+	−	−	−	−
玉米	+	−	+	+	−	+	−	−	−

注：a-需要水；b-在水中生活；c-在陆地生活；d-有叶绿素；e-双子叶；f-单子叶；g-能运动；h-有四肢；i-哺乳。

定义 2[1] 令$\mathbb{K}=(G,M,I)$为形式背景。对于集合 $O\subseteq G$ 和 $A\subseteq M$，定义算子$(\cdot)^I$：

$$O^I=\{m\in M\mid (g,m)\in I,\forall g\in O\}$$

$$A^I=\{g\in G\mid (g,m)\in I,\forall m\in A\}$$

性质 1[1] 令$\mathbb{K}=(G,M,I)$为形式背景。对于 $O,O_1,O_2\subseteq G$ 且 $A,A_1,A_2\subseteq M$，下列结论成立：

1) $O_1\subseteq O_2\Rightarrow O_2^I\subseteq O_1^I$

(1′) $A_1\subseteq A_2\Rightarrow A_2^I\subseteq A_1^I$

2)$O \subseteq O^{II}$

(2′)$A \subseteq A^{II}$

3)$(O_1 \cup O_2)^I = O_1^I \cap O_2^I$

(3′)$(A_1 \cup A_2)^I = A_1^I \cap A_2^I$

定义 3[1] 令$\mathbb{K}=(G,M,I)$为形式背景。对于集合$A \subseteq M$和$B \subseteq M$,称$A \to B$为$\mathbb{K}$的蕴涵($A \to B$在$\mathbb{K}$中成立),若$A^I \subseteq B^I$,其中A是该蕴涵的前提,B是该蕴涵的后件。

例 2(接例 1) 计算可得$\{h\}^I = \{$鱼,蛙,狗$\}$且$\{g\}^I = \{$蚂蟥,鱼,蛙,狗$\}$,显然$\{h\}^I \subseteq \{g\}^I$,因此$\{h\} \to \{g\}$是$\mathbb{K}$的蕴涵。

3 不完备形式背景中蕴涵的不相容性

3.1 不完备形式背景及其蕴涵

当形式背景缺失了某些关联关系时,该形式背景被称为不完备形式背景,通常定义为三值背景。

定义 4[14] 一个不完备形式背景是一个四元组$\mathbb{IK}=(G,M,\{+,-,?\},I)$,$G$是对象集,$M$是属性集,$I \subseteq G \times M \times \{1,0,?\}$是一个三元关系。其中:$(g,m,+) \in I$表示对象$g$含有属性$m$;$(g,m,-) \in I$表示对象$g$不含有属性$m$;$(g,m,?) \in I$表示不确定对象$g$是否含有属性$m$。

例 3 一个不完备形式背景的实例$\mathbb{IK}$如表 2 所列。

表 2 不完备形式背景$\mathbb{IK}$

Table 2 Incomplete formal context $\mathbb{IK}$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
g_1	+	+	?	−	−
g_2	−	−	?	+	−
g_3	+	+	+	?	−
g_4	?	+	+	+	+
g_5	−	+	−	−	−
g_6	+	+	+	+	?

不同于在形式背景中可以判断给定的蕴涵是否成立,在不完备形式背景情形下,由于信息的缺失,往往无法判断一个蕴涵在其中是否成立。

例 4(接例 3) 考虑例 3 中的不完备形式背景$\mathbb{IK}$。可以断定在$\mathbb{IK}$中$\{a_2,a_4\} \to \{a_3\}$总是成立,而不受信息缺失的影响。而对于$\{a_2,a_4\} \to \{a_1,a_3\}$,根据表 2,可以确定该蕴涵相对于对象$g_1,g_2,g_3,g_5$和$g_6$成立,而由于缺失了$g_4$关于属性$a_1$的关联关系,无法判断其对于$g_4$是否成立,进而无法判断其在景$\mathbb{IK}$中是否成立。$\mathbb{IK}$中同样存在一些无效蕴涵。例如,由于$\{a_2\} \to \{a_3,a_4\}$相对于$g_1$不成立,进而在$\mathbb{IK}$中不成立。

在不完备形式背景中,缺失的关联关系具有“+”和“−”两种可能性,通过在缺失信息中填入“+”或“−”可以将其进行完备化处理。

定义 5[14] 令$\mathbb{IK}=(G,M,\{+,-,?\},I)$为不完备形式背景。称形式背景$\mathbb{K}_i=(G,M,I_i)$为$\mathbb{IK}$的完备化形式背景。其中,若$(g,m,+) \in I$,则$(g,m) \in I_i$;若$(g,m,-) \in I$,则$(g,m) \notin I_i$。

可将不完备形式背景中的蕴涵分为两类:与不完备信息无关,形式背景中总是成立的蕴涵被称为必然性蕴涵;与不完备信息相关,在某些不完备信息“?”被确定为特定的“+”和“−”时才成立的蕴涵被称为可接受蕴涵。

定义 6[14] 令$\mathbb{IK}=(G,M,\{+,-,?\},I)$为不完备形式背景。对于蕴涵$A \to B$,定义:

1)$A \to B$在$\mathbb{IK}$中是必然的,若$A \to B$在$\mathbb{IK}$的所有完备化形式背景中都成立。

2)$A \to B$在$\mathbb{IK}$中是可接受的,若$A \to B$至少在$\mathbb{IK}$中的一个完备化形式背景中成立。

必然蕴涵体现了最精确、尺度最严格的知识,可接受蕴涵则是最一般、尺度最宽松的知识表示形式。

3.2 不完备形式背景中蕴涵的不相容性

在不完备形式背景情形下,若多个蕴涵在某个完备化形式背景中成立,则称这些蕴涵为相容的;否则称之为不相容的。例 5 揭示了不完备形式背景下蕴涵的不相容情形。

例 5(接例 3) 以例 3 中不完备形式背景$\mathbb{IK}$为例。可以验证,$\{a_4\} \to \{a_3\}$和$\{a_3\} \to \{a_2\}$是$\mathbb{IK}$的可接受蕴涵,而验证发现,这两条蕴涵并不相容,即不存在$\mathbb{IK}$的完备化形式背景使得$\{a_4\} \to \{a_3\}$和$\{a_3\} \to \{a_2\}$同时成立。

一个值得注意的问题是,蕴涵的不相容性不具备显著的语构特征,通过推理规则无法识别知识的不相容性。例 6 揭示了不相容蕴涵在推理中可能产生的问题。

例 6(接例 3) 以例 3 的不完备形式背景$\mathbb{IK}$为例。考虑 Armstrong 推理系统中的伪传递推理规则:

$$伪传递推理规则:\frac{X \to Y, W \cup Y \to Z}{X \cup W \to Z}$$

该推理系统最初被运用在完备形式背景的蕴涵推理中。如例 5 所示,可接受蕴涵$\{a_4\} \to \{a_3\}$和$\{a_3\} \to \{a_2\}$在$\mathbb{IK}$中不相容。由于推理规则并不能有效判断知识的相容性,运用伪传递推理规则$\{a_4\} \to \{a_3\}$和$\{a_3\} \to \{a_2\}$,可得$\{a_4\} \to \{a_2\}$。从推理上讲,这似乎是合理的。然而,验证发现,$\{a_4\} \to \{a_2\}$是无效蕴涵。进一步,在无效蕴涵$\{a_4\} \to \{a_2\}$和另一给定的可接受蕴涵$\{a_2\} \to \{a_1\}$上运用伪传递推理规则,得到另一无效蕴涵$\{a_4\} \to \{a_1\}$。

通过例 6 可以发现,在不完备形式背景情形下,在不相容的蕴涵上使用推理规则可能会引起无效蕴涵;且随着推理过程的推进,这些无效知识在知识库中不断传播,进一步加剧了无效知识的产生。同时,例 6 揭示了不完备形式背景中蕴涵的相容性不具有传递性。

例 7(接例 3) 以例 3 的不完备形式背景$\mathbb{IK}$为例。可以验证,对于可接受蕴涵$\{a_5\} \to \{a_1\}$和$\{a_4\} \to \{a_3\}$和$\{a_3\} \to \{a_2\}$,$\{a_5\} \to \{a_1\}$分别与$\{a_4\} \to \{a_3\}$和$\{a_3\} \to \{a_2\}$相容,而$\{a_4\} \to \{a_3\}$和$\{a_3\} \to \{a_2\}$并不相容(在对象g_2中不相容)。

蕴涵相容性的非传递性使得无法通过建立其等价关系进行相容表示与推理。为解决蕴涵不相容性带来的一系列问题,本文首先从逻辑视角对不完备数据下的蕴涵进行相容语义表示,并研究具有语义协调性的推理规则,从而避免知识推理过程不相容蕴涵或无效蕴涵的产生。

4 面向不完备数据的知识相容表示与推理

4.1 相容语义表示

定义 7 对不完备数据情形下实例对属性集的满足性(合理性)作出规定。

定义 7 令 M 为属性集，称

$$T=\{(a,v)\mid a\in M, v\in\{1,0,?\}\}$$

为 M 上的不完备实例。令 $A\subseteq M$，定义：

$$T^A=\begin{cases}1, & A=\varnothing\text{，或对于任意 } a\in A, (a,1)\in T \text{ 成立}\\ 0, & \text{存在 } a\in A, (a,0)\in T \text{ 成立}\\ 1/2, & \text{其他}\end{cases}$$

定义 8(合理性) 令 M 为属性集且 $A,B\subseteq M$，称 $A\to B$ 为 M 上的蕴涵。T 是 M 上的不完备实例，称 T 满足 $A\to B$(或 T 为 $A\to B$ 的模型)，记作 $T\vDash_g A\to B$，若 $T^A=1\Rightarrow T^{B\setminus A}\neq 0$ 成立。T 满足 L，记作 $T\vDash_g L$，若对于任意的 $A\to B\in L$，$T\vDash_g A\to B$ 成立。否则，记为 $T\nvDash_g L$。

例 7 令 $M=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$T=\{(a_1,1),(a_2,?),(a_3,1),(a_4,0)\}$，对于 M 上的蕴涵 $\{a_1\}\to\{a_3\}$，$\{a_4\}\to\{a_2\}$ 和 $\{a_1\}\to\{a_4\}$，可以验证 $T\vDash_g\{a_1\}\to\{a_3\}$，$T\vDash_g\{a_4\}\to\{a_2\}$ 且 $T\nvDash_g\{a_1\}\to\{a_4\}$。

T 满足 $A\to B$ 意味着当 T 完全支持 A 中的属性时，T 对后件 B 的剩余属性至少保持不确定性。结合定义 7 不难发现，对于任意一个 M 上的蕴涵 $A\to B$，总能找到一个不完备实例 T 满足该蕴涵。因此，定义 8 中关于模型的刻画保证了蕴涵本身的合理性。基于蕴涵模型的定义，定义 9 进一步刻画了蕴涵的相容性。

定义 9(相容性) 令 M 为属性集，$A\to B$ 和 $A_1\to B_1$ 是 M 上的蕴涵，L 是 M 上的蕴涵集。称 $A\to B$ 和 $A_1\to B_1$ 是相容的，若存在 M 上的不完备实例 T 满足 $T\vDash_g A\to B$ 且 $T\vDash_g A_1\to B_1$；否则，称之为不相容的。若 L 中的蕴涵同时相容，则称 L 为相容集。

将逻辑定义中的模型特化到不完备形式背景中，即不完备形式背景中每个对象所对应的属性关联关系集。当蕴涵在不完备形式背景中的所有模型中都成立，则该蕴涵在该不完备形式背景中成立。当多个蕴涵在不完备形式背景的某个模型中不成立，则必然在任意完备化形式背景中都不成立，进而这些蕴涵不相容。

定义 10 定义了蕴涵的语义导出。

定义 10(语义导出) 令 M 为属性集，$A\to B$ 为 M 上的蕴涵，L 和 L_1 是 M 上的相容集。$A\to B$ 可以从 L 语义导出，记作 $L\vdash_g A\to B$，若对于任意 M 上的不完备实例 T，$T\vDash_g L\Rightarrow T\vDash_g A\to B$；否则，记为 $L\setminus\{A\to B\}\nvdash_g A\to B$。$L_1$ 可以从 L 语义导出，记作 $L\vdash_g L_1$，若对于任意的 $A\to B\in L_1$，$L\vdash_g A\to B$ 成立。

性质 2 验证了语义导出有效保持蕴涵相容性的能力，从而避免了知识推导过程中出现无效或不相容蕴涵的情形。

性质 2 令 M 为属性集，$A\to B$ 和 $A_1\to B_1$ 为 M 上的蕴涵，L 是 M 上的相容集。若 $L\vdash_g A\to B$ 且 $L\vdash_g A_1\to B_1$，则 $A\to B$ 和 $A_1\to B_1$ 是相容的。

证明：因为 L 是相容集，根据定义 9，存在不完备实例 T 有 $T\vDash_g L$。因为 $L\vdash_g A\to B$ 且 $L\vdash_g A_1\to B_1$，根据定义 10 可知 $T\vDash_g A\to B$ 且 $T\vDash_g A_1\to B_1$，即 $A\to B$ 和 $A_1\to B_1$ 是相容的。□

定义 11 刻画了蕴涵集的完备性和无冗余性。

定义 11(完备性、无冗余性) 令 M 为属性集，$A\to B$ 为 M 上的蕴涵，L 和 L_1 是 M 上的相容集。L 是非冗余的，若对于任意的 $A\to B\in L$，$L\setminus\{A\to B\}\nvdash_g A\to B$ 成立。L 是封闭集，若对于任意的 $L\vdash_g A\to B$ 都有 $A\to B\in L$。进一步，若任意的 $A\to B\in L$ 有 $L_1\vdash_g A\to B$，则 L_1 相对于 L 是完备的。

定义 12 给出了闭包的定义，定理 1 给出了通过闭包判断语义导出的等价条件。

定义 12 令 M 为属性集且 $A\subseteq M$，L 是 M 上的相容集。A 关于 L 的闭包定义为：

$$A^L=\bigcup\{B_i\setminus A\mid A_i\subseteq A, A_i\to B_i\in L\}$$

定理 1 令 M 为属性集，$A\to B$ 为 M 上的蕴涵，L 是 M 上的相容集，则 $L\vdash_g A\to B$ 当且仅当 $B\setminus A\subseteq A^L$。

证明：令

$$P=\{A_i\to B_i\in L\mid A_i\subseteq A\}$$

$$S=\bigcup\{B_i\setminus A_i\mid A_i\to B_i\in P\}$$

充分性。只需证明对于 M 上的任意不完备实例 T，若 $T\vDash_g L$，则 $T\vDash_g A\to B$。假设 $T^A=1$，对于任意的 $A_i\to B_i\in P$，因为 $A_i\subseteq A$ 且 $T^A=1$，显然 $T^{A_i}=1$。因为 $T\vDash_g L$ 且 $A_i\to B_i\in P\subseteq L$，所以 $T\vDash_g A_i\to B_i$，结合 $T^{A_i}=1$ 可知 $T^{B_i\setminus A_i}\neq 0$。综上所述，任意的 $A_i\to B_i\in P$ 有 $T^{B_i\setminus A_i}\neq 0$。显然 $T^S\neq 0$。一方面，根据定义 12 可知 $A^L=\bigcup\{B_i\setminus A\mid A_i\to B_i\in P\}\subseteq S$，再由 $B\setminus A\subseteq A^L$ 可知 $B\setminus A\subseteq S$，结合 $T^S\neq 0$ 可知 $T^{B\setminus A}\neq 0$。综上所述，当 $T^A=1$ 时，$T^{B\setminus A}\neq 0$ 成立，即 $T\vDash_g A\to B$。

必要性。假设 $B\setminus A\nsubseteq A^L$，此时存在 $a\in B\setminus A$ 满足 $a\notin A^L$。根据以下步骤构造一个 M 上的不完备实例 T：

1)对于任意的 $a\in A$，令 $(a,1)\in T$。

2)对于任意的 $a\in A^L\setminus A$，令 $(a,?)\in T$。

3)对于任意的 $a\in M\setminus(A\cup A^L)$，令 $(a,0)\in T$。

根据定义 7 可知，$T^A=1$，$T^{A^L}=1/2$ 且 $T^{M\setminus(A\cup A^L)}=0$。

证明 $T\vDash L$。对于任意的 $A_i\to B_i\in L$，假设 $T^{A_i}=1$ 成立，即任意的 $b\in A_i$ 有 $(b,1)\in T$，易证 $A_i\subseteq A$。又因为 $A_i\to B_i\in L$，所以 $B_i\setminus A\subseteq A^L$。对于任意的 $c\in B_i\setminus A_i$，有 $c\in B_i$ 且 $c\notin A_i$。若 $c\in A$，则 $c\in A^L\cup A$。若 $c\notin A$，则 $c\in B_i\setminus A$。结合 $B_i\setminus A\subseteq A^L\subseteq A^L\cup A$ 可知，$c\in A^L\cup A$。因此，对于任意的 $c\in B_i\setminus A_i$ 有 $c\in A^L\cup A$，进而 $B_i\setminus A_i\subseteq A^L\cup A$。根据步骤 1 和步骤 2 可知 $T^{B_i\setminus A_i}\neq 0$。综上所述，当 $T^{A_i}=1$ 时，$T^{B_i\setminus A_i}\neq 0$ 成立，根据定义 10 可知 $T\vDash_g A_i\to B_i$。

证明 $T\vDash_g A\to B$。因为 $B\setminus A\nsubseteq A^L$，所以存在 $d\in B\setminus A$ 满足 $d\notin A^L$。由于 $d\in B\setminus A$，显然 $d\in B\subseteq M$ 且 $d\notin A$，结合 $d\notin A^L$，可知 $d\in M\setminus(A\cup A^L)$。根据步骤 3 可知 $(d,0)\in T$；而因为 $d\in B\setminus A$，所以由定义 10 可知 $T^{B\setminus A}=0$。综上所述，$T^A=1$ 而 $T^{B\setminus A}=0$，所以 $T\nvDash_g A\to B$。

综上所述，$T\nvDash_g L$ 而 $T\nvDash_g A\to B$，根据定义 10 可知 $L\nvdash_g A\to B$，与 $L\vdash_g A\to B$ 矛盾。因此，假设 $B\setminus A\nsubseteq A^L$ 错误，进而 $B\setminus A\subseteq A^L$。□

定义 13 给出了相容规范基的构造形式。

定义 13 令 M 为属性集且 $A\subseteq M$，L 是 M 上封闭的相容集。A 是 L 的真前提，若

$$A^L\supset\bigcup\{A_i^L\mid A_i\text{ 是 } L \text{ 的真前提}, A_i\subset A\}$$

则称集合

$$O_L=\{A\to A^L\mid A\text{ 是 } L \text{ 的真前提}\}$$

为 L 的相容规范基，简称为规范基。

引理 1 令 M 为属性集且 $A\subseteq M$，L 是 M 上封闭的相容集。A 是 L 的真前提当且仅当 $A^L\supset\bigcup\{A_i^L\mid A_i\subset A\}$。

证明：令 $S=\bigcup\{A_i^L\mid A_i\subset A\}$，$P=\bigcup\{A_i^L\mid A_i$ 是 L 的真前提，$A_i\subset A\}$。根据定义 13，只需证明 $S=P$，而显然 $S\supseteq P$，因此只需证明 $S\subseteq P$。对于任意的 $A_i\subset A$，共有两种情况：

1) A_i 是 L 的真前提。此时，有 $A_i^L\subseteq P$。

2) A_i 不是 L 的真前提。易证 $A_i^L\supseteq\bigcup\{A_j^L\mid A_j$ 是 L 的真前提，$A_j\subset A_i\}$，进一步，根据定义 13 可知，$A_i^L=\bigcup\{A_j^L\mid A_j$ 是 L 的真前提，$A_j\subset A_i\}$。对于任意满足 $A_j\subset A_i$ 的 L 的真前提 A_j，结合 $A_i\subset A$ 可知 $A_j\subset A$，根据集合 P 的定义可知 $A_j^L\subseteq P$，进而 $A_i^L\subseteq P$。

综上所述，任意的 $A_i\subset A$ 都有 $A_i^L\subseteq P$，进而 $S\subseteq P$。□

定理 2 证明了相容规范基是最紧致的相容集表示形式，即相容规范基以最少的蕴涵数量保持了相容集的全部信息。

定理 2 令 M 为属性集，L 为 M 上封闭的相容集，O_L 为 L 的规范基。则下列结论成立：

1) O_L 是完备的，即对于任意的 $A\rightarrow B\in L$ 有 $O_L\vdash_{g}A\rightarrow B$。

2) O_L 是无冗余，即对于任意的 $A\rightarrow B\in O_L$ 有 $O_L\setminus\{A\rightarrow A^L\}\nvdash_{g}A\rightarrow A^L$。

3) O_L 是最优的，即对于 L 的任意完备非冗余集 $L_1\subseteq L$，有 $|O_L|\leqslant|L_1|$。

证明：对于 $A\subseteq M$，令

$P_A=\{A_i\rightarrow A_i^L\in O_L\mid A_i\subset A\}$

$S_A=\bigcup\{A_i^L\mid A_i\rightarrow A_i^L\in P_A\}$

1) 对于任意的 $A\rightarrow B\in L$，根据定义 12 可知，$B\setminus A\subseteq A^L$ 成立。A 共有两种情形：

(1) A 是 L 的真前提。根据定义 13 可知 $A\rightarrow A^L\in O_L$。一方面，由于 $B\setminus A\subseteq A^L$，易证 $B\setminus A\subseteq A^L\setminus A$。另一方面，由于 $A\rightarrow A^L\in O_L$，$A^L\setminus A\subseteq A^{O_L}$ 成立；结合 $B\setminus A\subseteq A^L\setminus A$ 可知，$B\setminus A\subseteq A^{O_L}$ 成立，再由定理 1 可知 $O_L\vdash_{g}A\rightarrow B$。

(2) A 不是 L 的真前提。根据定义 13 可知 $A\rightarrow A^L\notin O_L$，此时 $A^{O_L}=S_A$ 且 $A^L\not\supset A^{O_L}$，进而 $A^L\not\supset S_A$。对于任意的 $A_i\rightarrow A_i^L\in P_A$，由于 $A_i\subset A$，易证 $A_i^L\subseteq A^L$，进而 $S_A\subseteq A^L$，结合 $A^L\not\supset S_A$ 可知 $A^L=S_A$。结合 $A^L=S_A$，$S_A=A^{O_L}$ 和 $B\setminus A\subseteq A^L$ 可知，$B\setminus A\subseteq A^{O_L}$，再由定理 1 可知 $O_L\vdash_{g}A\rightarrow B$。

2) 对于任意的 $A\rightarrow A^L\in O_L$，令 $L_1=O_L\setminus\{A\rightarrow A^L\}$。只需证明 $L_1\nvdash_{g}A\rightarrow A^L$。因为 $A\rightarrow A^L\in O_L$，所以 A 是真前提，根据定义 13 可知 $A^L\supset\bigcup\{A_i^L\mid A_i\rightarrow A_i^L\in O_L,A_i\subset A\}=A^{L_1}$，进而 $A^L\not\supset A^{L_1}$，根据定理 1 可知 $L_1\nvdash_{g}A\rightarrow A^L$。

3) 证明任意的 $A\subseteq M$，$A^{L_1}=A^L$ 成立。因为 $L_1\subseteq L$，显然 $A^{L_1}\subseteq A^L$。因为 $A^L\setminus A\subseteq A^L$，根据定理 1 可知 $L\vdash_{g}A\rightarrow A^L$，又因为 $L_1\vdash_{g}L$，所以 $A^{L_1}\vdash_{g}A\rightarrow A^L$，由定理 1 可知 $A^L\setminus A\subseteq A^{L_1}$。根据闭包的定义（见定义 12）可知 $A^L\cap A=\emptyset$，所以 $A^L\setminus A=A^L$，进而 $A^L\subseteq A^{L_1}$。结合 $A^{L_1}\subseteq A^L$ 和 $A^L\subseteq A^{L_1}$ 可知 $A^L=A^{L_1}$。

假设存在 L 的真前提 A_p 满足任意的 $A_p\rightarrow B_p\in L$ 都有 $A_p\rightarrow B_p\notin L_1$。根据已有结论，有 $A_p^L=A_p^{L_1}$。令

$L_2=\bigcup\{A_i\rightarrow A_i^{L_1}\mid A_i\rightarrow B_i\in L_1\}$

$W=\bigcup\{A_i^{L_1}\setminus A_p\mid A_i\rightarrow A_i^{L_1}\in L_2,A_i\subset A_p\}$

$V=\bigcup\{A_j^L\mid A_j\rightarrow B_j\in L,A_j\subset A_p\}$

证明 $W\subseteq V$。对于任意的 $w\in W$，存在 $A_i\rightarrow A_i^{L_1}\in L_2$ 满足 $A_i\subset A_p$ 且 $w\in A_i^{L_1}\setminus A_p$。因为 $L_2\subseteq L_1\subseteq L$，一方面，有 $A_i\rightarrow A_i^{L_1}\in L$，结合 $A_i\subset A_p$ 可知 $A_i^L\subseteq V$。另一方面，易证 $A_i^{L_1}\subseteq A_i^L$，再结合 $w\in A_i^{L_1}\setminus A_p$ 可知 $w\in A_i^L$，进而 $w\in V$。综上所述，任意的 $w\in W$ 有 $w\in V$，进而 $W\subseteq V$。

证明 $L_2\vdash_{g}L_1$。对于任意的 $A_i\rightarrow B_i\in L_1$，一方面，根据闭包的定义（见定义 12）可知 $B_i\setminus A_i\subseteq A_i^{L_1}$ 且 $A_i^{L_1}\cap A_i=?$，易证 $B_i\setminus A_i\subseteq A_i^{L_1}\setminus A_i$。另一方面，根据集合 L_2 的定义可知 $A_i\rightarrow A_i^{L_1}\in L_2$，所以 $A_i^{L_1}\setminus A_i\subseteq A_i^{L_2}$，再由 $B_i\setminus A_i\subseteq A_i^{L_1}\setminus A_i$ 可知 $B_i\setminus A_i\subseteq A_i^{L_2}$。此时，根据定理 1 可知 $L_2\vdash_{g}A_i\rightarrow B_i$。综上所述，对于任意的 $A_i\rightarrow B_i\in L_1$ 都有 $L_2\vdash_{g}A_i\rightarrow B_i$，所以 $L_2\vdash_{g}L_1$。

证明 $L_2\vdash_{g}A_p\rightarrow A_p^{L_1}$。因为 $A_p^{L_1}\setminus A_p\subseteq A_p^{L_1}$，根据定理 1 可知 $L_1\vdash_{g}A_p\rightarrow A_p^{L_1}$，又因为 $L_2\vdash_{g}L_1$，所以 $L_2\vdash_{g}A_p\rightarrow A_p^{L_1}$。

因为任意的 $A_p\rightarrow B_p\in L$ 都有 $A_p\rightarrow B_p\notin L_1$，根据集合 L_2 的定义可知 $A_p\rightarrow A_p^{L_1}\notin L_2$，易证 $A_p^{L_2}=W$。因为 A 是 L 的真前提，根据引理 1 可知 $A_p^L\supset V$，结合 $W\subseteq V$ 可知 $A_p^{L_2}\subset A_p^L$，结合 $A_p^{L_2}\subset A_p^L$ 和 $A_p^L=A_p^{L_1}$ 可知 $A_p^{L_2}\subset A_p^{L_1}$。根据闭包的定义（见定义 12）可知 $A_p^{L_1}\cap A=\emptyset$，所以 $A_p^{L_1}\setminus A=A_p^{L_1}$，进而 $A_p^{L_2}\subset A_p^{L_1}\setminus A$，再由定理 1 可知 $L_2\nvdash_{g}A_p\rightarrow A_p^{L_1}$，与已有结论 $L_2\vdash_{g}A_p\rightarrow A_p^{L_1}$ 矛盾。因此，假设 $A_p\rightarrow B_p\notin L_1$ 错误，进而 $A_p\rightarrow B_p\in L_1$。

综上所述，任意 L 的真前提 A_p 都有 $A_p\rightarrow B_p\in L_1$，根据 O_L 的定义（见定义 13），可知 $|O_L|\leqslant|L_1|$。□

4.2 语义协调的推理规则

为了使用语构推理工具进行有效、完备的推理，需制定具有语义一致性的推理规则。本文首先引入以下 3 条推理规则：

1) 自反推理规则：

$$\frac{\square}{A\rightarrow A}$$

2) g-扩增推理规则：

$$\frac{A\rightarrow B,A_1\supseteq A,B_1\subseteq B}{A_1\rightarrow B_1}$$

3) g-合并推理规则：

$$\frac{A\rightarrow B,A_1\rightarrow B_1}{A\cup A_1\rightarrow B\cup B_1}$$

定理 3 验证了这 3 条推理规则的语义合理性、相容性和完备性。

定理 3(合理性) 令 M 为属性集。上述 3 条推理规则是合理的，即

1) $A\rightarrow A$ 是 M 上的蕴涵。

2) 若 $A\rightarrow B$ 是 M 上的蕴涵，若 $A_1\supseteq A$ 且 $B_1\subseteq B$，则 $A\rightarrow B\vdash_{g}A_1\rightarrow B_1$。

3) 若 $A\rightarrow B$ 和 $A_1\rightarrow B_1$ 是 M 上的相容蕴涵，则 $\{A\rightarrow B,A_1\rightarrow B_1\}\vdash_{g}A\cup A_1\rightarrow B\cup B_1$。

证明：1) 显然。

2) 根据定义 8，只需证明对于 $T\models_{g}A\rightarrow B$，$T\models_{g}A_1\rightarrow B_1$ 成立。当 $T^{A_1}=1$，由于 $A_1\supseteq A$，显然 $T^A=1$，结合 $T\models_{g}A\rightarrow B$，根据定义 8 可知 $T^{B\setminus A}\neq 0$；又因为 $A_1\supseteq A$ 且 $B_1\subseteq B$，易证 $B_1\setminus A_1\subseteq B\setminus A$，进而 $T^{B_1\setminus A_1}\neq 0$。综上所述，当 $T^{A_1}=1$，有 $T^{B_1\setminus A_1}\neq 0$，即 $T\models_{g}A_1\rightarrow B_1$。

3)根据定义 8，只需证明对于 $T\models_{g}\{A\rightarrow B, A_1\rightarrow B_1\}$，$T\models_{g} A\cup A_1\rightarrow B\cup B_1$ 成立。当 $T^{A\cup A_1}=1, T^{A}=1$ 且 $T^{A_1}=1$ 成立；又因为 $T\models_{g}\{A\rightarrow B, A_1\rightarrow B_1\}$，所以 $T^{B\backslash A}\neq 0$ 且 $T^{B_1\backslash A_1}\neq 0$；结合 $B\backslash(A\cup A_1)\subseteq B\backslash A$ 和 $B_1\backslash(A\cup A_1)\subseteq B_1\backslash A_1$ 可知，$T^{B\backslash(A\cup A_1)}\neq 0$ 且 $T^{B_1\backslash(A\cup A_1)}\neq 0$，进而 $T^{B\backslash(A\cup A_1)\cup(B_1\backslash(A\cup A_1))}\neq 0$，即 $T^{(B\cup B_1)\backslash(A\cup A_1)}\neq 0$。综上所述，当 $T^{A\cup A_1}=1, T^{(B\cup B_1)\backslash(A\cup A_1)}\neq 0$ 成立，即 $T\models_{g} A\cup A_1\rightarrow B\cup B_1$ 成立。□

定理 4(相容性) 令 M 为属性集。上述 3 条推理规则是相容的，即

1)(自反推理规则)$\{A\rightarrow A\}$是相容的。

2)(g-扩增推理规则)$A\rightarrow B$ 和 $A_1\rightarrow B_1$ 是相容的，其中 $A_1\supseteq A$ 且 $B_1\subseteq B$。

3)(g-合并推理规则)若 $A\rightarrow B$ 和 $A_1\rightarrow B_1$ 是相容的，则蕴涵集$\{A\rightarrow B, A_1\rightarrow B_1, A\cup A_1\rightarrow B\cup B_1\}$是相容的。

证明：1)显然。

2)令 $T\models_{g} A\rightarrow B$。因为 $A\rightarrow B\vdash_{g} A_1\rightarrow B_1$，所以 $T\models_{g} A_1\rightarrow B_1$，进而 $A\rightarrow B$ 和 $A_1\rightarrow B_1$ 是相容的。

3)因为 $A\rightarrow B$ 和 $A_1\rightarrow B_1$ 是相容的，存在非完备实例 T 满足 $T\models_{g} A\rightarrow B$ 和 $T\models_{g} A_1\rightarrow B_1$，即 $T\models_{g}\{A\rightarrow B, A_1\rightarrow B_1\}$。因为$\{A\rightarrow B, A_1\rightarrow B_1\}\vdash_{g} A\cup A_1\rightarrow B\cup B_1$，所以 $T\models_{g} A\cup A_1\rightarrow B\cup B_1$，进而蕴涵集$\{A\rightarrow B, A_1\rightarrow B_1, A\cup A_1\rightarrow B\cup B_1\}$是相容的。□

定理 5(完备性) 令 M 为属性集，L 为 M 上封闭的相容集，O_L 为 L 的规范基，则对于任意的 $A\rightarrow B\in L$，$A\rightarrow B$ 都能从 O_L 运用自反推理规则、I-扩增推理规则和 I-合并推理规则推理得到。

证明：令 $P=\bigcup\{A_i\rightarrow B_i\in O_L \mid A_i\subseteq A\}$。首先，在 P 上运用 g-合并推理规则，可以得到$\bigcup\{A_i \mid A_i\rightarrow B_i\in L, A_i\subseteq A\}\rightarrow A^{O_L}$。一方面，易证$\bigcup\{A_i \mid A_i\rightarrow B_i\in L, A_i\subseteq A\}\subseteq A$；另一方面，由于 $O_L\vdash_{g} A\rightarrow B$，根据定理 1 可知 $B\backslash A\subseteq A^{O_L}$。其次，在$\bigcup\{A_i \mid A_i\rightarrow B_i\in L, A_i\subseteq A\}\rightarrow A^{O_L}$ 上运用 g-扩增推理规则，可以得到 $A\rightarrow B\backslash A$。然后，运用自反推理规则可以得到 $A\rightarrow A$，继续运用 g-扩增推理规则可以得到 $A\rightarrow B\cap A$。最后，在 $A\rightarrow B\backslash A$ 和 $A\rightarrow B\cap A$ 上运用 g-合并推理规则，得到 $A\rightarrow(B\backslash A)\cup(B\cap A)$，即 $A\rightarrow B$。□

逻辑语义的无冗余性在推理规则中体现为推理规则之间不能相互替代，即不同的推理规则在推理过程中发挥不同的推理效用，共同构成的完备的推理规则集。

5 不完备形式背景中的相容性蕴涵

本章引入不完备形式背景中两类尺度较为严格且具备相容性的可接受蕴涵形式：$\downarrow\downarrow$-型蕴涵和 $\uparrow\uparrow$-型蕴涵。

5.1 $\downarrow\downarrow$-型蕴涵和 $\uparrow\uparrow$-型蕴涵

首先定义不完备形式背景中的算子$(\cdot)^{I_{\min}}$和$(\cdot)^{I_{\max}}$。

定义 14[14] 令 $\mathbb{IK}=(G, M, \{+,-,?\}, I)$为不完备形式背景。对于 $O\subseteq G$ 和 $A\subseteq M$，定义算子$(\cdot)^{I_{\min}}$和$(\cdot)^{I_{\max}}$：

$$O^{I_{\min}}=\{m\in M \mid (g,m,+)\in I, \forall g\in O\}$$

$$A^{I_{\min}}=\{g\in G \mid (g,m,+)\in I, \forall m\in A\}$$

$$O^{I_{\max}}=\{m\in M \mid (g,m,-)\notin I, \forall g\in O\}$$

$$A^{I_{\max}}=\{g\in G \mid (g,m,-)\notin I, \forall m\in A\}$$

定义 15 令 $\mathbb{IK}=(G, M, \{+,-,?\}, I)$为不完备形式背景。称：

1)$A\rightarrow B$ 是 $\mathbb{IK}$ 的 $\downarrow\downarrow$-型蕴涵，若 $A^{I_{\min}}\subseteq B^{I_{\min}}$。

2)$A\rightarrow B$ 是 $\mathbb{IK}$ 的 $\uparrow\uparrow$-型蕴涵，若 $A^{I_{\max}}\subseteq B^{I_{\max}}$。

引理 2 令 $\mathbb{IK}=(G, M, \{+,-,?\}, I)$为不完备形式背景。定义 $\mathbb{IK}$ 的完备化形式背景 $\mathbb{K}_{\min}=(G, M, I_{\min})$，其中$(g,m)\in I_i$ 若$(g,m,+)\in I$，$(g,m)\notin I_i$ 若$(g,m,-)\in I$ 或$(g,m,?)\in I$ 成立。定义 $\mathbb{IK}$ 的完备化形式背景 $\mathbb{K}_{max}=(G, M, I_{\max})$，其中$(g,m)\in I_i$ 若$(g,m,+)\in I$ 或$(g,m,?)\in I$ 成立，$(g,m)\notin I_i$ 若$(g,m,-)\in I$。下列结论成立：

1)$A\rightarrow B$ 是 $\mathbb{IK}$ 的 $\downarrow\downarrow$-型蕴涵当且仅当 $A\rightarrow B$ 是 $\mathbb{K}_{\min}$ 的蕴涵。

2)$A\rightarrow B$ 是 $\mathbb{IK}$ 的 $\uparrow\uparrow$-型蕴涵当且仅当 $A\rightarrow B$ 是 $\mathbb{K}_{\max}$ 的蕴涵。

证明：1)根据算子$(\cdot)^{I_{\min}}$的定义，易证在 $\mathbb{K}_{\min}$ 中有 $A^{I}=A^{I_{\min}}$ 且 $B^{I}=B^{I_{\min}}$。因为 $A\rightarrow B$ 是 $\mathbb{IK}$ 的 $\downarrow\downarrow$-型蕴涵，根据定义 15 可知 $A^{I_{\min}}\subseteq B^{I_{\min}}$。此时，易证 $A^{I_{\min}}\subseteq B^{I_{\min}}$ 当且仅当 $A^{I}\subseteq B^{I}$，即 $A^{I_{\min}}\subseteq B^{I_{\min}}$。得证。

2)与 1)的证明类似，因此不再赘述。□

根据引理 2 可知，由于 $\mathbb{K}_{\min}$ 和 $\mathbb{K}_{\max}$ 是 $\mathbb{IK}$ 的两个完备化形式背景，而 $\downarrow\downarrow$-型蕴涵和 $\uparrow\uparrow$-型蕴涵分别是在 $\mathbb{K}_{\min}$ 和 $\mathbb{K}_{\max}$ 上成立的蕴涵，因此，它们均具有相容性。

例 8(接例 3)以例 3 的不完备形式背景 $\mathbb{IK}$ 为例，其完备化形式背景 $\mathbb{K}_{\min}$ 和 $\mathbb{K}_{\max}$ 分别如表 3 和表 4 所列。

表 3 完备化形式背景 $\mathbb{K}_{\min}$

Table 3 Completion formal context $\mathbb{K}_{\min}$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
g_1	+	+	−	−	−
g_2	−	−	−	+	−
g_3	+	+	+	−	−
g_4	−	+	+	+	+
g_5	−	+	−	−	−
g_6	+	+	+	+	−

表 4 完备化形式背景 $\mathbb{K}_{\max}$

Table 4 Completion formal context $\mathbb{K}_{\max}$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
g_1	+	+	+	−	−
g_2	−	−	+	+	−
g_3	+	+	+	+	−
g_4	+	+	+	+	+
g_5	−	+	−	−	−
g_6	+	+	+	+	+

可以验证，$\{a_4\}\rightarrow\{a_3\}$和$\{a_3\}\rightarrow\{a_2\}$是 $\mathbb{IK}$ 的可接受蕴涵。进一步，我们发现，$\{a_4\}\rightarrow\{a_3\}$在 $\mathbb{K}_{\max}$ 中成立，而在 $\mathbb{K}_{\min}$ 中不成立，再根据引理 2 可知，$\{a_4\}\rightarrow\{a_3\}$是 $\mathbb{IK}$ 的 $\uparrow\uparrow$-型蕴涵而不是 $\downarrow\downarrow$-型蕴涵。$\{a_3\}\rightarrow\{a_2\}$在 $\mathbb{K}_{\min}$ 中成立，而在 $\mathbb{K}_{\max}$ 中不成立，因此，$\{a_3\}\rightarrow\{a_2\}$是 $\downarrow\downarrow$-型蕴涵，而不是 $\uparrow\uparrow$-型蕴涵。

例 8 证明了并不是所有的可接受蕴涵都是 $\downarrow\downarrow$-型蕴涵或 $\uparrow\uparrow$-型蕴涵，从而说明 $\downarrow\downarrow$-型蕴涵和 $\uparrow\uparrow$-型蕴涵都是尺度更加严格的蕴涵形式。另一方面也说明，$\downarrow\downarrow$-型蕴涵和 $\uparrow\uparrow$-型蕴涵并不具有尺度偏序上的包含关系，因此二者在尺度上不具有可比性。

引理 3 令$\mathbb{IK}=(G,M,\{+,-,?\},I)$为不完备形式背景，$A\to B$为$M$上的蕴涵。下列结论成立：

1）$A\to B$是$\downarrow\downarrow$-型蕴涵当且仅当$B\subseteq A^{I_{\min}I_{\min}}$。

2）$A\to B$是$\uparrow\uparrow$-型蕴涵当且仅当$B\subseteq A^{I_{\max}I_{\max}}$。

证明：充分性。因为$B\subseteq A^{I_{\min}I_{\min}}$，根据性质 1 可知$B^{I_{\min}}\supseteq A^{I_{\min}I_{\min}I_{\min}}=A^{I_{\min}}$，即$A^{I_{\min}}\subseteq B^{I_{\min}}$，再由定义 15 可知$A\to B$是$\downarrow\downarrow$-型蕴涵。

必要性。因为$A\to B$是$\downarrow\downarrow$-型蕴涵，根据定义 15 可知$A^{I_{\min}}\subseteq B^{I_{\min}}$，再由性质 1 可知$A^{I_{\min}I_{\min}}\supseteq B^{I_{\min}I_{\min}}\supseteq B$，即$B\subseteq A^{I_{\min}I_{\min}}$。

结论 2）的证明同 1），不再赘述。□

5.2 $\downarrow\downarrow$-型相容规范基和$\uparrow\uparrow$-型相容规范基

由于$\downarrow\downarrow$-型蕴涵和$\uparrow\uparrow$-型蕴涵是分别在$\mathbb{K}_{\min}$和$\mathbb{K}_{\max}$上成立的蕴涵，显然，$\downarrow\downarrow$-型蕴涵和$\uparrow\uparrow$-型蕴涵分别构成了封闭的相容集。类似于经典蕴涵，不完备形式背景中同样蕴含着庞大数量的$\downarrow\downarrow$-型蕴涵（或$\uparrow\uparrow$-型蕴涵）。为提高知识表示与获取效率，将逻辑视角下规范基的构造方式（见定义 13）运用到数据背景上，从而构造不完备形式背景上的$\downarrow\downarrow$-型相容规范基。

定义 16 令$\mathbb{IK}=(G,M,\{+,-,?\},I)$为不完备形式背景且$A\subseteq M$。$A$为$\mathbb{IK}$的$\downarrow\downarrow$-型真前提，若$A^{I_{\min}I_{\min}}\setminus A\supset\bigcup\{A_i^{I_{\min}I_{\min}}\setminus A\mid A_i$为$\mathbb{IK}$的$\downarrow\downarrow$-型真前提，$A_i\subset A\}$，则称集合$O_{\mathbb{IK}}^{\downarrow\downarrow}=\{A\to A_i^{I_{\min}I_{\min}}\setminus A\mid A_i$为$\mathbb{IK}$的$\downarrow\downarrow$-型真前提$\}$为$\mathbb{IK}$上的$\downarrow\downarrow$-型相容规范基。

例 9（接例 3） 以例 3 的不完备形式背景$\mathbb{IK}$为例。$\mathbb{IK}$的$\downarrow\downarrow$-型相容规范基如表 5 所列[1)]。

表 5 $\mathbb{IK}$的$\downarrow\downarrow$-型相容规范基

Table 5 $\downarrow\downarrow$-type compatible canonical basis of $\mathbb{IK}$

$\{a_1\}\to\{a_2\}$	$\{a_5\}\to\{a_2,a_3,a_4\}$
$\{a_3\}\to\{a_2\}$	$\{a_2,a_4\}\to\{a_3\}$
$\{a_1,a_4\}\to\{a_2,a_3\}$	

从表 5 的$\downarrow\downarrow$-型相容规范基出发，运用自反推理规则、$\mathscr{G}$-扩增推理规则和$\mathscr{G}$-合并推理规则可以得到$\mathbb{IK}$中的所有$\downarrow\downarrow$-型蕴涵。例如，通过在$\{a_1\}\to\{a_2\}$和$\{a_2,a_4\}\to\{a_3\}$上使用$\mathscr{G}$-合并推理规则可得到$\{a_1,a_2,a_4\}\to\{a_2,a_3\}$，进一步使用$\mathscr{G}$-扩增推理规则可得到$\{a_1,a_2,a_4\}\to\{a_3\}$。经验证，该蕴涵在$\mathbb{K}_{\min}$中成立（见表 3），进而是$\mathbb{IK}$的$\downarrow\downarrow$-型蕴涵。

定理 6 令$\mathbb{IK}=(G,M,\{+,-,?\},I)$为不完备形式背景，$L$是$\mathbb{IK}$上的$\downarrow\downarrow$-型蕴涵全集，$O_{\mathbb{IK}}^{\downarrow\downarrow}$为$\mathbb{IK}$上的$\downarrow\downarrow$-型相容规范基。$O_{\mathbb{IK}}^{\downarrow\downarrow}$相对于$L$是完备且无冗余的。

证明：根据规范基的定义（见定义 13）及其完备性和无冗余性证明（见定理 2），只需证明对于任意的$A\subseteq M$，$A^L=A^{I_{\min}I_{\min}}\setminus A$成立。

证明$A^{I_{\min}I_{\min}}\setminus A\subseteq A^L$。因为$A^{I_{\min}I_{\min}}\setminus A\subseteq A^{I_{\min}I_{\min}}$，根据引理 3 可知$A\to B$是$\downarrow\downarrow$-型蕴涵，进而$A\to A^{I_{\min}I_{\min}}\setminus A\in L$，再由定义 12 可知$A^{I_{\min}I_{\min}}\setminus A\subseteq A^L$。

证明$A^L\subseteq A^{I_{\min}I_{\min}}\setminus A$。令$P=\{A_i\to B_i\setminus A\mid A_i\subseteq A,A_i\to B_i\in L\}$。根据定义 12 可知$A^L=\bigcup\{B_i\setminus A\mid A_i\to B_i\setminus A\in P\}$。对于任意的$A_i\to B_i\setminus A\in P$，一方面，因为$A_i\to B_i$是$\downarrow\downarrow$-型蕴涵，根据引理 3 可知$B_i\subseteq A_i^{I_{\min}I_{\min}}$；另一方面，因为$A_i\subseteq A$，根据性质 1 可知$A_i^{I_{\min}I_{\min}}\subseteq A^{I_{\min}I_{\min}}$。结合$B_i\subseteq A_i^{I_{\min}I_{\min}}$和$A_i^{I_{\min}I_{\min}}\subseteq A^{I_{\min}I_{\min}}$可知$B_i\subseteq A^{I_{\min}I_{\min}}_{,\text{进而}B_i\setminus A\subseteq A^{I_{\min}I_{\min}}}\setminus A$。综上所述，任意的$A_i\to B_i\setminus A\in P$有$B_i\setminus A\subseteq A^{I_{\min}I_{\min}}\setminus A$，进而$A^L\subseteq A^{I_{\min}I_{\min}}\setminus A$。

因为$A^{I_{\min}I_{\min}}\setminus A\subseteq A^L$且$A^L\subseteq A^{I_{\min}I_{\min}}\setminus A$，显然$A^L\subseteq A^{I_{\min}I_{\min}}\setminus A$。□

定义 17 构造了不完备形式背景上的$\uparrow\uparrow$-型相容规范基。

定义 17 令$\mathbb{IK}=(G,M,\{+,-,?\},I)$为不完备形式背景且$A\subseteq M$。$A$为$\mathbb{IK}$的$\uparrow\uparrow$-型真前提，若$A^{I_{\max}I_{\max}}\setminus A\supset\bigcup\{A_i^{I_{\max}I_{\max}}\setminus A\mid A_i$为$\mathbb{IK}$的$\uparrow\uparrow$-型真前提，$A_i\subset A\}$，则称集合$O_{\mathbb{IK}}^{\uparrow\uparrow}=\{A\to A_i^{I_{\max}I_{\max}}\setminus A\mid A_i$为$\mathbb{IK}$的$\uparrow\uparrow$-型真前提$\}$为$\mathbb{IK}$上的$\uparrow\uparrow$-型相容规范基。

同理，$\uparrow\uparrow$-型相容规范基具有完备性和无冗余性。

定理 7 令$\mathbb{IK}=(G,M,\{+,-,?\},I)$为不完备形式背景，$L$为$\mathbb{IK}$上的$\uparrow\uparrow$-型蕴涵全集，$O_{\mathbb{IK}}^{\uparrow\uparrow}$为$\mathbb{IK}$上的$\uparrow\uparrow$-型相容规范基。$O_{\mathbb{IK}}^{\uparrow\uparrow}$相对于$L$是完备且无冗余的。

证明：过程同定理 6，不再赘述。□

例 10（接例 3） 以例 3 的不完备形式背景$\mathbb{IK}$为例。$\mathbb{IK}$的$\uparrow\uparrow$-型相容规范基如表 6 所列。

表 6 $\mathbb{IK}$的$\uparrow\uparrow$-型相容规范基

Table 6 $\uparrow\uparrow$-type compatible canonical basis of $\mathbb{IK}$

$\{a_1\}\to\{a_2,a_3\}$
$\{a_4\}\to\{a_3\}$
$\{a_5\}\to\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$

可以验证，从表 6 的$\uparrow\uparrow$-型相容规范基出发，运用自反推理规则、$\mathscr{G}$-扩增推理规则和$\mathscr{G}$-合并推理规则可以得到$\mathbb{IK}$中的所有$\uparrow\uparrow$-型蕴涵。例如，通过在$\{a_5\}\to\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$上使用$\mathscr{G}$-扩增推理规则可得到$\{a_5\}\to\{a_1\}$，进一步在$\{a_4\}\to\{a_3\}$和$\{a_5\}\to\{a_1\}$上使用$\mathscr{G}$-合并推理规则可得到$\{a_4,a_5\}\to\{a_1,a_3\}$。经验证，该蕴涵在$\mathbb{K}_{\max}$中成立（见表 4），进而是$\mathbb{IK}$的$\uparrow\uparrow$-型蕴涵。

结束语 本文从逻辑角度研究了不完备数据中的知识相容语义表示，通过定义不完备实例刻画了知识的合理性和相容性，并构造了相容规范基；语构上制定了具有语义合理性、相容性和完备性的推理规则，从而避免了知识推理过程中产生不相容或无效知识；引入不完备形式背景上两种尺度较为严格的相容性蕴涵：$\downarrow\downarrow$-型蕴涵和$\uparrow\uparrow$-型蕴涵，构造这两类蕴涵的相容规范基，并验证了其完备性和无冗余性。未来将进一步拓展本文研究结论，探索非完备形式背景和非完备决策背景下更具一般性的变尺度知识相容表示与推理框架。

参 考 文 献

[1] WILLE R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts[C]//International Proceedings of Inter-

1) $\downarrow\downarrow$-型相容规范基和$\uparrow\uparrow$-型相容规范基（分别见定义 16 和定义 17）的定义形式由决策蕴涵规范基的定义演变而来（蕴涵的后件演变为前件闭包与前件之间的差集），本文对决策蕴涵规范基的生成算法[21]进行改进后以求解$\downarrow\downarrow$-型相容规范基和$\uparrow\uparrow$-型相容规范基。

national Conference on Formal Concept Analysis. Berlin, Germany: Springer, 1982: 445-470.

[2] MIN F, LUO S, LI J H. Network rule extraction under the network formal context based on three-way decision[J]. Applied Intelligence, 2023, 53(5): 5126-5145.

[3] BOGDANOVIĆ M, GLIGORIJEVIĆ M F, VELJKOVIĆ N, et al. Cross-portal metadata alignment-connecting open data portals through means of formal concept analysis[J]. Information Sciences, 2023, 637: 118958.

[4] MI Y L, LIU W Q, SHI Y. Semi-supervised concept learning by concept cognitive learning and concept space[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2022, 34(5): 2429-2442.

[5] YAN M Y, LI J H, LIU W Q, et al. Conceptual Knowledge Discovery and Evolution in Formal Context with Object Structure Information[J]. Chinese Journal of Electronics, 2023, 51(1): 11-17.

[6] CARPINETO C, ROMANO G. Exploiting the potential of concept lattices for information retrieval with credo[J]. Journal of Universal Computer Sciences, 2004, 10(8): 985-1013.

[7] BURMEISTER P, HOLZER R. On the treatment of incomplete knowledge in formal concept analysis[C]// Proceedings of International Conference on Conceptual Structures. Berlin: Springer, 2000: 385-398.

[8] OBIEDKOV S. Modal logic for evaluating formulas in incomplete contexts[C]// Proceedings of International Conference on Conceptual Structures. Berlin: Springer, 2002: 314-325.

[9] HANIKA T, ZUMBRäGEL J. Towards collaborative conceptual exploration[C]// Proceedings of International Conference on Conceptual Structures. Berlin: Springer, 2018: 120-134.

[10] FELDE M, STUMME G. Interactive collaborative exploration using incomplete contexts[J]. Data & Knowledge Engineering, 2023, 143: 102104.

[11] YAO Y Y. Interval sets and interval-set algebras [C]// Proceedings of IEEE International Conference on Cognitive Informatics. New York: IEEE, 2009: 307-314.

[12] LI H X, WANG M H, ZHOUX Z, et al. An interval set model for learning rules from incomplete information table[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2012, 53(1): 24-37.

[13] LI J H, MEI C L, LV Y J. Incomplete decision contexts: approximate concept construction, rule acquisition and knowledge reduction[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(1): 149-165.

[14] YAO Y Y. Interval sets and three-way concept analysis in incomplete context[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2017, 8(1): 3-20.

[15] WANG J J, QIAN T. Attribute reduction of SE-ISI concept lattices for incomplete contexts[J]. Soft computing, 2020, 24(20): 15143-15158.

[16] LONG B H, XU W H, ZHANG X Y. Double threshold construction method for attribute-induced three-way concept lattice in incomplete fuzzy formal context[J]. The Journal of Engineering-JOE, 2020, 2020(13): 549-554.

[17] SADOUM, DJOUADI1 Y, HADJ-ALI A. Modal interpretation of formal concept analysis for incomplete representations[C]// Proceedings of International Conference on Scalable Uncertainty Management. Berlin: Springer, 2020: 261-269.

[18] YANG D Q, YANG X R, JIA H, et al. Construction of fuzzy linguistic approximate concept lattice in an incomplete fuzzy linguistic formal context [J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2022, 15(1): 1-9.

[19] SRIREKHA B, SATHISH S, DEVIRN, et al. Attributes reduction on SE-ISI concept lattice for an incomplete context using object ranking[J]. Mathematics, 2023, 11(7): 1585.

[20] REN R S, WEI L, LI J H. Three-way approximate concept reduction in incomplete formal contexts[J]. Pure Mathematics and Applied Mathematics, 2024, 40(1): 77-89.

[21] ZHANG S X, LI D Y, ZHAI Y H. Incremental Method of Generating Decision Implication Canonical Basis[J]. Soft Computing, 2021, 26(3): 1067-1083.

ZHANG Shaoxia, born in 1991, Ph. D, lecturer, is a member of CCF(No. 63867G). Her main research interests include concept lattice and granular computing.

LI Deyu, born in 1965, Ph.D, professor, Ph.D supervisor, is a senior member of CCF (No. 06905S). His main research interests include concept lattice and multi-label learning.

（责任编辑：何杨）