



计算机科学

COMPUTER SCIENCE

零边界条件下一维非线性细胞自动机可逆性的判定算法

马骏驰, 陈伟霖, 王晨, 林德福, 王超

引用本文

马骏驰, 陈伟霖, 王晨, 林德福, 王超. 零边界条件下一维非线性细胞自动机可逆性的判定算法[J]. 计算机科学, 2024, 51(10): 330-336.

MA Junchi, CHEN Weilin, WANG Chen, LIN Defu, WANG Chao. [Decision Algorithms for Reversibility of One-dimensional Non-linear Cellular Automata Under Null Boundary Conditions](#) [J]. Computer Science, 2024, 51(10): 330-336.

相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

[事件抽取方法综述:深度学习与预训练对比分析](#)

Survey on Event Extraction Methods:Comparative Analysis of Deep Learning and Pre-training
计算机科学, 2024, 51(9): 196-206. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.231000123>

[多天线无线充电器的安全布置研究](#)

Safe Placement of Multi-antenna Wireless Chargers

计算机科学, 2024, 51(8): 345-353. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.240400156>

[自编码器端到端通信系统后门攻击方法](#)

Backdoor Attack Method in Autoencoder End-to-End Communication System

计算机科学, 2024, 51(7): 413-421. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.230400113>

[面向公平性联邦学习的指纹识别算法](#)

Study on Fingerprint Recognition Algorithm for Fairness in Federated Learning

计算机科学, 2024, 51(6A): 230800043-9. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.230800043>

[基于国密SM3和SM4算法的SNMPv3安全机制设计与实现](#)

Design and Implementation of SNMPv3 Security Mechanism Based on National Security SM3 andSM4 Algorithms

计算机科学, 2024, 51(6A): 230500209-7. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.230500209>

零边界条件下一维非线性细胞自动机可逆性的判定算法

马骏驰 陈伟霖 王晨 林德福 王超

南开大学软件学院 天津 300350

(majunchi@mail.nankai.edu.cn)

摘要 可逆性的性质对于经典的计算机科学理论模型——细胞自动机(Cellular Automata, CA)具有重要意义。尽管 CA 在零边界条件下的线性规则的可逆性问题已经得到了大量的研究,但非线性规则目前还很少被探索。文中研究了在有限域 \mathbb{Z}_p 上一般一维 CA 的可逆性问题,找到了一种优化 Amoroso 无限 CA 满射性判定算法的方法。基于此,文中还提出了在零边界条件下判定一维 CA 可逆性的算法,其中包括一种在零边界条件下判定一维 CA 严格可逆性的算法,以及一种基于桶链的在零边界条件下计算一维 CA 的可逆性函数的算法。这些判定算法不仅适用于线性规则,也适用于非线性规则。除此以外,还证实了可逆性函数总是有一个周期的,且其周期性与对应桶链的周期性有关。文中给出了一些可逆 CA 的实验结果,并通过实验结果对理论部分进行了补充验证,进一步支持了文章的研究结论。

关键词: 细胞自动机;非线性规则;可逆性;零边界;一维

中图分类号 TP305

Decision Algorithms for Reversibility of One-dimensional Non-linear Cellular Automata Under Null Boundary Conditions

MA Junchi, CHEN Weilin, WANG Chen, LIN Defu and WANG Chao

College of Software, Nankai University, Tianjin 300350, China

Abstract The property of reversibility is quite meaningful for the classic theoretical computer science model, cellular automata. For the reversibility problem for a CA under null boundary conditions, while linear rules have been extensively studied, the non-linear rules have so far been rarely explored. The paper investigates the reversibility problem of general one-dimensional CA on a finite field \mathbb{Z}_p , and proposes an approach to optimize the Amoroso's infinite CA surjectivity detection algorithm. Based on this, this paper proposes an algorithm for determining the invertibility of one-dimensional CA under zero boundary conditions, including an algorithm for determining the strict invertibility of one-dimensional CA under zero boundary conditions, and an algorithm for calculating the invertibility function of one-dimensional CA under zero boundary conditions based on barrel chain. These decision algorithms work for not only linear rules but also non-linear rules. In addition, it has been confirmed that the reversibility function always has a period, and its periodicity is related to the periodicity of the corresponding bucket chain. Some of the experiment results of reversible CA are presented in this paper, complementing and validating the theoretical aspects, and thereby further supporting the research conclusions of this paper.

Keywords Cellular automata, Non-linear rules, Reversibility, Null boundary, One-dimensional

1 引言

细胞自动机(CA)是由 Neumann 等^[1]最早提出的一种理论计算机科学模型。在 20 世纪 70 年代,Conway 设计了著名的“生命游戏”,其本质上是一个二维 CA^[2]。CA 作为一种数学模型被学者们研究,并在多个领域得到了应用。时至今日,CA 在复杂系统建模中的应用包括车辆网络建模^[3]、皮肤病模式建模^[4]、建立肿瘤生长模型^[5]、模拟行人疏散过程^[6]等。在物理学中,CA 还被应用于磁场、电场等的模拟^[7];在化学

和材料学中,CA 被用于一系列材料效应的模拟,主要用于再结晶、腐蚀现象的建模^[8];在计算机科学中,CA 可以被看作并行计算机并用于并行计算的理论研究,同时 CA 也被应用于图像处理^[9]、图像加密^[10]。可逆性是 CA 最重要的性质之一,因为一些应用场景要求系统具有可逆性,例如使用 CA 作为加密或编码工具的场景^[11]。

最早得到研究的是在空间中具有无穷多细胞的 CA,其被称为无限 CA。满射问题被第一批研究 CA 的科学家称为伊甸园问题^[12]。对于一维无限 CA,Amoroso 等^[13]提出了

到稿日期:2024-01-29 返修日期:2024-06-05

基金项目:天津市自然科学基金(21JCYBJC00210)

This work was supported by the Natural Science Fundation of Tianjin, China(21JCYBJC00210).

通信作者:王超(wangchao@nankai.edu.cn)

右边的位置对应最低位。这会将原像集 Z_2^k 一一对应地映射到 $I = \{i \in \mathbb{Z} | 0 \leq i \leq 2^k - 1\}$ 。然后, 整数 $i \in I$ 对应 ω 中的第 i 位, 该位对应于局部映射规则 f 所要映射的状态 a_i , 进而得到该规则对应的 Wolfram 规则号 $\omega = (a_{2^k-1} \cdots a_2 a_1 a_0)_2 = (\sum_{i=0}^{2^k-1} a_i \cdot 2^i)_{10}$ 。例如, 设置“ $k=3$ ”, 则 Wolfram 规则号为 $(150)_{10} = (10010110)_2$ 的局部规则映射如表 1 所列。

表 1 Wolfram 规则号为 150 的局部规则映射

Table 1 Local rule mapping of Wolfram rule number 150

$(c_{i-1}^t, c_i^t, c_{i+1}^t)$	c_i^{t+1}	$(c_{i-1}^t, c_i^t, c_{i+1}^t)$	c_i^{t+1}
(0, 0, 0)	0	(1, 0, 0)	1
(0, 0, 1)	1	(1, 0, 1)	0
(0, 1, 0)	1	(1, 1, 0)	0
(0, 1, 1)	0	(1, 1, 1)	1

2.4 Amoroso 的判定过程

本文算法是基于 Amoroso 等^[13]提出的一维无限 CA 的满射性判定算法, 其执行步骤本质上是节点的构造, 因此在执行完毕后将节点按序连接起来得到对应的 Amoroso 图。具体如算法 1 所示。

算法 1 Amoroso 图构造及判定算法

输入: 状态集 S , 局部规则 f

输出: 该 CA 的满射性

1. If $\exists a \in S$, 对任意 k -序列都有 $f(\alpha) \neq a$ then
2. return 该 CA 是非满射的
3. end if
4. 初始化 Amoroso 图 $G = \{V, E\}$ 为空
5. /* V 为节点集, E 为边集, 后同此 */
6. $b \leftarrow S$ 中的任一元素
7. $X_{init} \leftarrow \{k\text{-序列 } \alpha | f(\alpha) = b\}$
8. $V \leftarrow V \cup \{X_{init}\}$
9. foreach($X \in V, a \in S$) do
10. $X_a \leftarrow \{k\text{-序列 } \alpha | f(\alpha) = a \text{ 且 } \alpha \text{ 是 } X \text{ 中某序列的后继}\}$
11. if $X_a = \emptyset$ then
12. return 该 CA 是非满射的
13. end if
14. $V \leftarrow V \cup \{X_a\}$
15. $E \leftarrow E \cup \{(X, X_a, a)\}$
16. /* (v_1, v_2, w) : 由 v_1 到 v_2 边权为 w 的有向边, 后同此 */
17. end foreach
18. return 该 CA 是满射的

对该算法正确性的简要叙述如下: 如果存在 $a \in S$ 使得没有 $\alpha \in S^k$ 满足 $f(\alpha) = a$, 则任何包含一个或多个 a 的配置将找不到原像, 那么, 该 CA 是非满射的。否则, 每个配置对应 Amoroso 图上的一条无限长的路径, 细胞状态对应边的标记。通过连续将节点中的序列与相邻节点中的前驱和后继连接(带有重叠), 可以计算出该配置所有可能的原像。因此, 如果某个节点内为空集, 所有对应路径通过该节点的配置都必然不存在原像, 因而该 CA 是非满射的。另一方面, 如果每个节点都包含至少一个序列, 则任意配置都至少存在一个原像, 因而该 CA 是满射的。

由于不同 k -序列的数量是有限的, 因此不同节点的数量也是有限的。确切地说, 不同节点的数量上界为 $2^{\binom{S}{k}}$ 。一个

节点内序列数量的上界为 $|S|^k$ 。计算单个 k -序列的后继的时间复杂度为 $\theta(|S|)$ 。综上, 算法 1 的最坏时间复杂度为 $O(|S|^{k+1} \cdot 2^{\binom{S}{k}})$, 此数值是一个极其宽广的上界, 因为上述因子取最大值的概率微乎其微, 并且不可能同时取最大值, 平均情况远小于于此。本文经过多组实验验证了上述分析。算法 1 的平均时间复杂度难以给出准确数值。

例 1 假设 $(\mathbb{Z}, Z_2, \{-1, 0, 1\}, f)$ 为一维无限 CA, 其中 f 以规则号 $(46)_{10} = (00101110)_2$ 为索引, 由算法 1 构造的图如图 2 所示。具有空集的节点意味着“ $\cdots 010 \cdots$ ”形式的所有配置都找不到原像。因此, 规则号为 46 的 CA 是非满射的。

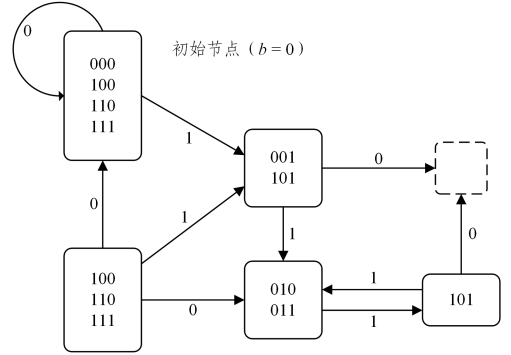


图 2 由规则号 46 构造的 Amoroso 图

Fig. 2 Amoroso graph constructed according to rule number 46

3 零边界条件下一维 CA 的可逆性

3.1 Amoroso 图的构造及判定算法的优化

我们找到了一种优化 Amoroso 无限 CA 满射性判定算法的方法。由于本文的其余部分都会应用该优化, 因此本节对其进行详细介绍。

简单地说, 如果将图中所有节点内部的 k -序列均替换为其后缀, 修改后的 Amoroso 图依旧能判定对应 CA 的满射性。具体地, 优化后的 Amoroso 图的构造过程及判定算法如算法 2 所示。

算法 2 优化后的 Amoroso 图构造及判定算法

输入: 状态集 S , 局部规则 f

输出: 该 CA 的满射性

1. If $\exists a \in S$, 对任意 k -序列都有 $f(\alpha) \neq a$ then
2. return 该 CA 是非满射的
3. end if
4. 初始化 Amoroso 图 $G = \{V, E\}$ 为空
5. $b \leftarrow S$ 中的任一元素
6. $X_{init} \leftarrow \{(k-1)\text{-序列 } \gamma | \exists a \in S, f(a\gamma) = b\}$
7. $V \leftarrow V \cup \{X_{init}\}$
8. for each ($X \in V, a \in S$) do
9. $X_a \leftarrow \{(k-1)\text{-序列 } \gamma | \exists e \in S, f(e\gamma) = a \text{ 且 } X \text{ 包含 } e\gamma \text{ 的前缀}\}$
10. if $X_a = \emptyset$ then
11. return 该 CA 是非满射的
12. end if
13. $V \leftarrow V \cup \{X_a\}$
14. $E \leftarrow E \cup \{(X, X_a, a)\}$
15. end for each
16. return 该 CA 是满射的

对于此优化正确性的简要叙述如下:通过这样的替换,先前的 k -序列被替换成其后缀,因而不会消失,这意味着非空集不会变为空集;另一方面,在替换前,对于图中每个节点,其后继节点的内容仅依赖于 k -序列最右边的 $k-1$ 个元素,因此替换后的 $(k-1)$ -序列不会改变构造后继节点过程中使用的任何信息。因此,替换前后的图是同构的(如果允许重复结点出现)。替换只会提高重复节点出现的可能性,例如:当 $k=3$ 时,001和101都被01取代,因此过程结束得更早(图变得更小,更简化)。

这种优化并不能降低构造单个节点的后继节点的复杂性。但是,原始版本的图的节点数量的上界为 $2^{|S|^k}$,而优化版本将图的节点的上界优化为 $2^{|S|^{k-1}}$ 。与算法1复杂度计算方式相同,算法2的最坏时间复杂度为 $O(|S|^k \cdot 2^{(|S|^{k-1})})$,是算法1最坏时间复杂度的 $\frac{1}{|S| \cdot 2^{|S|}}$ 。上述最坏复杂度是一个极其宽广的上界,平均情况远小于此。平均复杂度难以给出具体数值。

实验结果表明,对于本身在算法1中节点数较少的案例,算法2优化效果较差;而对于在算法1中节点数较多的案例,算法2优化效果十分显著。例如,对于直径为3、状态集为 \mathbb{Z}_2 的情况,表2列出了在算法1中节点数较多的案例使用算法2的优化效果。

表2 算法2对部分案例的优化效果($k=3, S=\mathbb{Z}_2$)

Table 2 Efficiency of algorithm 2 for some cases($k=3, S=\mathbb{Z}_2$)

规则号(十进制)	算法1节点数	算法2节点数
22,37,104	23	16
41	18	13
85	11	5
86,106	21	10
101	17	8
149,169	23	11

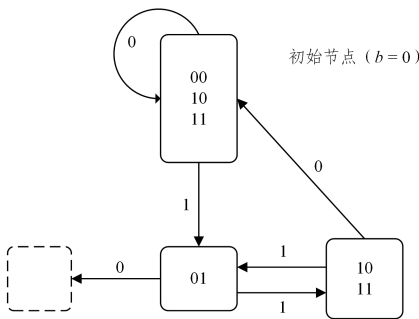


图3 由规则号46构造的优化后的 Amoroso 图

Fig. 3 Optimized Amoroso graph constructed according to rule number 46

例2 同样考虑例1中的情况。在算法2中构造的图如图3所示。结果和以前一样,但这张图的尺寸明显更小。

3.2 严格可逆性

对于一维有限CA,其可逆性一般依赖于细胞数 n 。在一些情况下,我们希望CA的可逆性不会受到其细胞空间大小的影响,而一直保持可逆。下文中,细胞数 n 是一个变量。

定义1 如果一维有限CA (\mathbb{Z}_n, S, N, f) 对所有正整数 n

都可逆,则称为严格可逆。

定义2 如果一个序列最左侧的 m 个元素均为0,则此序列是一个左 m 零序列。对称地,如果一个序列最右侧的 m 个元素均为0,则此序列是一个右 m 零序列。

我们提出了一种在零边界条件下确定一维有限CA严格可逆性的算法,这也是一个构造图的过程。严格可逆性可通过算法3确定。

算法3 严格可逆性的判定算法

输入:状态集 S ,邻域向量 $(-r_L, \dots, 0, \dots, r_R)$,局部规则 f

输出:该CA的严格可逆性

1. 初始化图 $G=(V, E)$ 为空
2. $X_{init} \leftarrow \{(k-1)\text{-序列 } \gamma \mid \gamma \text{ 为左 } r_L \text{ 零序列}\}$
3. $V \leftarrow V \cup \{X_{init}\}$
4. for each $(X \in V, a \in S)$ do
5. $X_a \leftarrow \{(k-1)\text{-序列 } \gamma \mid \exists e \in S, f(e\gamma) = a \text{ 且 } X \text{ 包含 } e\gamma \text{ 的前缀}\}$
6. if X_a 不恰好包含一个右 r_R 零序列 then
7. return 该CA不是严格可逆的
8. end if
9. $V \leftarrow V \cup \{X_a\}$
10. $E \leftarrow E \cup \{(X, X_a, a)\}$
11. end for each
12. return 该CA是严格可逆的

图的构造与算法2非常相似。节点的后继节点以完全相同的方式构造。整个构造过程中只有两个不同之处:

1)初始节点中包含的 $(k-1)$ -序列

在算法2中,初始节点包含所有在 f 下映射到同一 $b \in S$ 的所有 k -序列的后缀,因为对于无限CA,配置是无限延伸的,初始节点必须对应到细胞空间内的某个细胞。

在算法3中,初始节点本身不对应细胞空间内的任何位置。对于零边界下的有限CA,细胞空间内最左细胞的左侧均为恒定的0状态。希望初始节点的后继节点对应最左细胞,自然地,初始节点必须对应左边界外的第一个位置。因此,初始节点必须仅包含与零边界条件不冲突的序列,也就是左 r_L 零序列,即初始节点内的序列保证了在图上找到的所有原像都是符合左零边界的。

2)节点内的右 r_R 零序列

在算法2中,CA的非满射性由包含空集的节点判定,因为包含空集的节点意味着某些配置不存在原像。没有必要考虑任何特殊序列。

在算法3中,对于零边界下的有限CA,只有适配零边界条件的原像才是有效的。如前文所述,原像与左侧零边界的适配由初始节点保证。对称地,原像与右侧零边界的适配由节点内的右 r_R 零序列保证。如果一个配置的原像以右 r_R 零序列作结尾,那么此原像适配右侧零边界。因此,若该CA是严格可逆的,则除初始节点外的每个节点必须恰好包含一个右 r_R 零序列。若一个节点不包含右 r_R 零序列,则某些配置不存在有效原像。若一个节点包含至少两个右 r_R 零序列,则某些配置存在多个有效原像。由命题1可知,上述任一情况都意味着该CA具有不可逆性。

图4给出了一个例子以更好地说明算法的原理。在此例中, $r_L=2, r_R=2, f$ 为规则号4161270000。路径对应配置(1,

0, 0, 1, 0), 在节点中找到原像为(1, 0, 1, 1, 0)。如图所示, 原像与零边界的适配由初始节点中的序列 0010 以及尾节点中的序列 1000 保证。

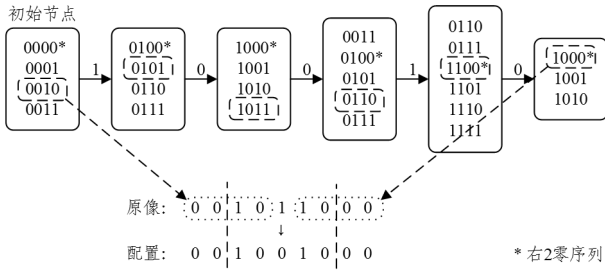


图 4 对于规则号 4161270000, 算法 3 中图上的一个路径

Fig. 4 A path on the graph by algorithm 3 for rule number 4161270000

此外, 一旦出现第一个不包含恰好一个右 r_R 零序列的节点(或包含空集的节点), 则 CA 不是严格可逆性的。因此, 通常情况下并不需要构造整个图, 在构造的过程中可以提前返回结果。然而, 这一优化并不会降低算法的最坏时间复杂度。

使用图构造算法 3 时, 除初始节点的设置外, 其余与算法 2 均相同, 故算法 3 的最坏时间复杂度为 $O(|S|^{r_L+r_R+1} \cdot 2^{(|S|^{r_L+r_R})})$, 这也是一个很宽广的数值范围, 平均情况远小于此。通过多组实验验证了上述分析。平均复杂度难以给出准确数值。

例 3 对于一维有限 CA $(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_2, \{-1, 0, 1\}, f)$, 图 5 显示了算法 3 中构造的两张图, 其中 f 分别是通过规则号 $(153)_{10} = (10011001)_2$ 和规则号 $(150)_{10} = (10010110)_2$ 进行索引的。对于规则号 153, 所有节点均只包含一个右 1 零序列, 因此 CA 是严格可逆的; 对于规则号 150, 有一个节点不包含标记序列, 而另一个节点有两个右 1 零序列, 因此该 CA 不是严格可逆的。

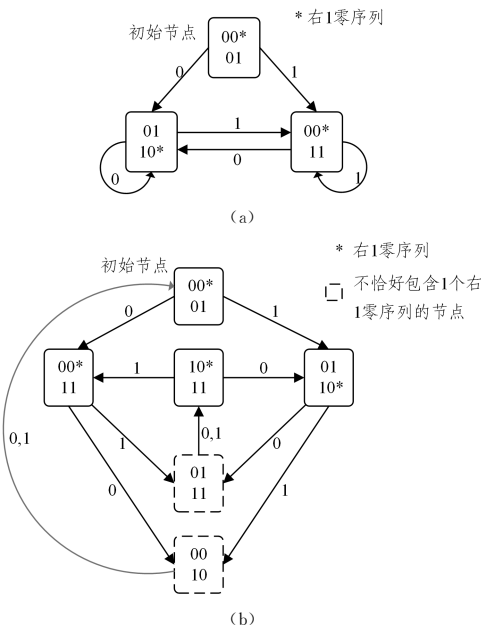


图 5 规则编号 153 和 150 的严格可逆性判定算法中的图

Fig. 5 Graphs in strictly reversible decision algorithm for rule number 153 and 150

对于在 \mathbb{Z}_2 上的一维有限 CA, 本文利用算法得到了当 $(r_L, r_R) = (1, 1)$ 和 $(r_L, r_R) = (1, 2)$ 时所有满足严格可逆性的规则, 具体实验结果如表 2 和表 3 所列。 $(r_L, r_R) = (2, 1)$ 的结果可以直接通过对称性从 $(r_L, r_R) = (1, 2)$ 推导出来, 因此省略了这一部分。实际上, 当 $(r_L, r_R) = (2, 2)$ 时, 严格可逆的有 186 条, 但是由于篇幅有限, 此问题不再详细列出。

表 3 满足严格可逆性的规则编号 $(r_L=1, r_R=1)$

Table 3 Rule number satisfies strict reversibility $(r_L=1, r_R=1)$

序号	十进制	二进制
1	51	00110011
2	60	00111100
3	102	01100110
4	153	10011001
5	195	11000011
6	204	11001100

表 4 满足严格可逆性的规则编号 $(r_L=1, r_R=2)$

Table 4 Rule number satisfies strict reversibility $(r_L=1, r_R=2)$

序号	十进制	序号	十进制
1	3855	18	34695
2	3885	19	34725
3	3915	20	38550
4	4080	21	42375
5	7710	22	42405
6	7770	23	42465
7	11535	24	46260
8	11565	25	46320
9	15420	26	50115
10	19215	27	53970
11	19275	28	54000
12	23070	29	57765
13	23130	30	57825
14	23160	31	61455
15	26985	32	61620
16	30810	33	61650
17	30840	34	61680

3.3 可逆性函数

通过实验发现, 在全体一维有限 CA 中, 满足严格可逆性的非常少。通常情况下, 一维有限 CA 对于部分细胞数 n 是可逆的, 而对于其余的是不可逆的。可逆性函数描述了一维有限 CA 的这种性质。

定义 3 一维有限 CA (\mathbb{Z}_n, S, N, f) 的可逆性函数用布尔函数 R 表示, 其定义如下:

$$R(n) = \begin{cases} 1, & \text{如果该 CA 对于细胞数 } n \text{ 是可逆的} \\ 0, & \text{如果该 CA 对于细胞数 } n \text{ 是不可逆的} \end{cases}$$

特别地, $n \geq 1$, 如果 $R(n) \equiv 1$, 则一维有限 CA 是严格可逆的; 如果 $R(n) \equiv 0$, 则该一维有限 CA 是严格不可逆的。

定义 4 一个桶是由算法 3 中某些节点组成的集合。

桶中的节点是无序且不重复的。

本文提出了一种在零边界条件下计算一维有限 CA 的可逆性函数的算法, 该算法是一个构造由一系列桶组成的“桶链”的过程。可逆性函数可通过算法 4 得到。

算法 4 可逆性函数的计算算法

输入: 状态集 S , 邻域向量 $(-r_L, \dots, 0, \dots, r_R)$, 局部规则 f
输出: 该 CA 的可逆性函数 R

1. $X_{\text{init}} \leftarrow \{(k-1)\text{-序列 } \gamma \mid \gamma \text{ 为左 } r_L \text{ 零序列}\}$

```

2.  $T_0 \leftarrow \{X_{init}\}, i \leftarrow 1, q \leftarrow -1$ 
3. while true do
4.    $T_i \leftarrow \emptyset$ 
5.   for each  $(X \in T_{i-1}, a \in S)$  do
6.      $X_a \leftarrow \{(k-1)\text{-序列 } \gamma \mid \exists e \in S, f(e\gamma) = a \text{ 且 } X \text{ 包含 } e\gamma \text{ 的前缀}\}$ 
7.      $T_i \leftarrow T_i \cup \{X_a\}$ 
8.   end for each
9.    $R(i) \leftarrow 1$ 
10.  for each  $X \in T_{i-1}$  do
11.    if  $X = \emptyset$  then
12.       $R(i) \leftarrow 0, \text{break while}$ 
13.    end if
14.    if  $X$  不恰好包含一个右  $r_R$  零序列 then
15.       $R(i) \leftarrow 0, \text{break for each}$ 
16.    end if
17.  end for each
18.  if  $\exists j \in [1, i-1], T_j = T_i$  then
19.     $q \leftarrow i - j, \text{break while}$ 
20.    /* 找到了一个循环 */
21.  end if
22.   $i \leftarrow i + 1$ 
23. end while
24.  $\forall j > i, R(j) \leftarrow \begin{cases} 0, & \text{if } q = -1 \\ R(j - q), & \text{if } q \neq -1 \end{cases}$ 
25. return R

```

算法 4 中使用桶的意图不难理解。算法 3 构造的图没有保存节点深度的信息,即每个节点与初始节点的距离。而一个配置的长度等于其对应路径的长度,即此条路径的末尾节点的深度。在算法 4 中,拥有相同深度的节点存放在同一个桶中。桶 T_n 对应长度为 n 的路径。本文不关心具体每个配置的信息,原先图上的边和标签在算法 4 中被舍弃。通过这种方式,一旦发现桶 T_n 中的某个节点不包含恰好一个右 r_R 零序列,就能立即判断该 CA 在细胞数为 n 时不可逆,即 $R(n) = 0$ 。否则,如果桶 T_n 中的每个节点均包含恰好一个右 r_R 零序列,则该 CA 在细胞数为 n 时可逆,即 $R(n) = 1$ 。

桶中每个节点是互不相同的,因而不同的桶的数量是有限的。因此,如果“桶链”足够长,必然会出现重复的桶。重复的两个桶之间“桶链”的结构会在此后无限循环,因此可逆性函数也必然在某个 n 之后具有周期性。

由可逆性函数的计算算法可知,对于一维有限 CA,其可逆性必然随细胞数的增长而周期性变化。此外,在此过程中,如果对于某个 m ,我们在 T_m 中找到了包含空集节点,则对于所有 $n \geq m$ 都必然有 $R(n) = 0$,因为后续所有桶都必然有包含空集节点。

关于算法 4 时间复杂度的分析如下:可以使用与算法 1—算法 3 相似的方式给出最坏时间复杂度 $O(|S|^{r_L+r_R+1} \cdot 2^{(iS)^{r_L+r_R}})$ 。然而,此数值毫无意义,因为我们的实验表明,没有任何一组用例能够达到甚至接近这个数值。例如在直径为 5 且状态集为 \mathbb{Z}_2 时,理论上算法 4 中不同桶的最大数量为 65 536,然而实验表明,在此情形下的所有用例中,桶的数量最多仅为 34。平均复杂度难以给出具体数值。

例 4 对于一维有限 CA $(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_2, \{-1, 0, 1\}, f)$, 其中 f

由规则号 $(19)_{10} = (00010011)_2$ 表示,图 6 显示了其在零边界条件下的可逆性函数的计算过程。该过程在 T_4 处停止,因为 T_4 与 T_3 相同。因此,只有当细胞数等于 1 或 2 时,CA 才是可逆的。

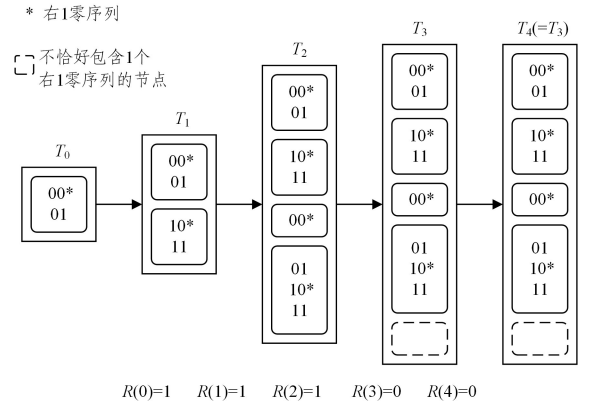


图 6 编号为 19 的规则的可逆性函数的计算过程

Fig. 6 Computation of reversibility function for rule number 19

对于状态集为 \mathbb{Z}_2 、邻域为 $\{-1, 0, 1\}$ 的一维有限 CA,表 5 列出了零边界条件下所有对于某些 $n \geq 2$ 可逆的规则号的可逆性函数的实验结果,结果也显示出对称性。

表 5 对于某些 $n \geq 2$ 可逆的规则号的可逆性函数

Table 5 Reversibility function of rule numbers that are reversible for some $n \geq 2 (S = \mathbb{Z}_2, N = \{-1, 0, 1\})$

规则号	可逆性函数	
$(5)_{10} = (00000101)_2$	$R(n) = \begin{cases} 1, & n=2 \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$	
$(37)_{10} = (00100101)_2$		
$(122)_{10} = (01111010)_2$		
$(133)_{10} = (10000101)_2$		
$(218)_{10} = (11011010)_2$		
$(250)_{10} = (11111010)_2$		
$(19)_{10} = (00010011)_2$	$R(n) = \begin{cases} 1, & n=1, 2 \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$	
$(25)_{10} = (00011001)_2$		
$(28)_{10} = (00011100)_2$		
$(57)_{10} = (00111001)_2$		
$(67)_{10} = (01000011)_2$		
$(70)_{10} = (01000110)_2$		
$(76)_{10} = (01001100)_2$		
$(99)_{10} = (01100011)_2$		
$(156)_{10} = (10011100)_2$		
$(179)_{10} = (10110011)_2$		
$(185)_{10} = (10111001)_2$		
$(188)_{10} = (10111100)_2$		
$(198)_{10} = (11000110)_2$		
$(227)_{10} = (11100011)_2$		
$(230)_{10} = (11100110)_2$		
$(236)_{10} = (11101100)_2$		
$(51)_{10} = (00110011)_2$	$R(n) \equiv 1$	
$(60)_{10} = (00111100)_2$		
$(102)_{10} = (01100110)_2$		
$(153)_{10} = (10011001)_2$		
$(195)_{10} = (11000011)_2$		
$(204)_{10} = (11001100)_2$		
$(90)_{10} = (01011010)_2$		$R(n) = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod{2} \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$
$(165)_{10} = (10100101)_2$		
$(105)_{10} = (01101001)_2$	$R(n) = \begin{cases} 1, & n \equiv 0, 1 \pmod{3} \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$	
$(150)_{10} = (10010110)_2$		
$(108)_{10} = (01101100)_2$	$R(n) = \begin{cases} 1, & n=1, 2, 3 \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$	
$(147)_{10} = (10010011)_2$		

结束语 本文研究了零边界条件下一维有限 CA 的可逆性。

首先,受 Amoroso 图的构造及判定算法的启发,对其进行了优化,降低了 Amoroso 图中节点数量的上界以提高运行效率。其次,提出了两种判定算法,它们对于线性和非线性 CA 均适用。第一种算法是构造一个图并根据图的特征来确定严格可逆性。第二种可逆性函数的计算算法基于桶链得到,其通过桶链结构的周期性确定 CA 对于任意细胞数的可逆性。使用这些算法进行了大量的实验,并列出了一些规则号的结果。

对于可逆性问题,尽管目前人们对线性规则已经进行了大量的研究,但对于非线性规则的探索依旧很少。本文算法最重要的贡献是提供了当 CA 的局部规则是非线性时确定可逆性的方法。现阶段该算法复杂度较高,难以在较大规模的 CA 中运行,因此下一步的工作重心将放在所提算法的优化上。

参 考 文 献

- [1] VON NEUMANN J, BURKS A W. Theory of self-reproducing automata[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1966, 5(1):3-14.
- [2] GARDNER M. Mathematical games [J]. Scientific American, 1970, 222(6):132-140.
- [3] WANG J, LV W, JIANG Y, et al. A cellular automata approach for modelling pedestrian-vehicle mixed traffic flow in urban city [J]. Applied Mathematical Modelling, 2023, 115:1-33.
- [4] KIPPENBERGER S, BERND A, THAÇI D, et al. Modeling pattern formation in skin diseases by a cellular automaton[J]. The Journal of Investigative Dermatology, 2013, 133(2):567.
- [5] VALENTIM C A, RABI J A., DAVID S A. Cellular-automaton model for tumor growth dynamics: Virtualization of different scenarios[J]. Computers in Biology and Medicine, 2022, 153:106481.
- [6] WANG Y, ZHANG L, MA J, et al. Combining building and behavior models for evacuation planning [J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 2010, 31(3):42-55.
- [7] REN F, GE H, FANG H, et al. Simulation of the dendrite growth during directional solidification under steady magnetic field using three-dimensional cellular automaton method coupled with Eulerian multiphase[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2024, 218:124809.
- [8] ZHOU F, GUO J, ZHAO Y, et al. An improved cellular automaton model of dynamic recrystallization and the constitutive model coupled with dynamic recrystallization kinetics for microalloyed high strength steels[J/OL]. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2023.12.024>.
- [9] XU X, FAN C, WANG L. A deep analysis of the image and video processing techniques using nanoscale quantum-dots cellular automata[J]. Optik, 2022, 260:169036.
- [10] DARANI A Y, YENGEJEH Y K, PAKMANESH H, et al. Image encryption algorithm based on a new 3D chaotic system using cellular automata [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2024, 179:114396.
- [11] CAPELLARI L, MILANI S, CRUZ-REYES C, et al. Resolution scalable image coding with reversible cellular automata[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 20(5):1461-1468.
- [12] MOORE E F. Machine models of self-reproduction [J]. Proceedings of symposia in applied mathematics. American Mathematical Society New York, 1962, 14(5):17-33.
- [13] AMOROSO S, PATT Y N. Decision procedures for surjectivity and injectivity of parallel maps for tessellation structures[J]. Journal of Computer and System Sciences, 1972, 6(5):448-464.
- [14] BRUCKNER L K. On the Garden-of-Eden problem for one-dimensional cellular automata[J]. Acta Cybernetica, 1979, 4(3):259-262.
- [15] SUTNER K. De Bruijn graphs and linear cellular automata[J]. Complex Systems, 1991, 5(1):19-30.
- [16] DEL REY A M. A note on the reversibility of elementary cellular automaton 150 with periodic boundary conditions[J]. Romanian Journal of Information Science and Technology, 2013, 16(4):365-372.
- [17] DEL REY A M. A note on the reversibility of the elementary cellular automaton with rule number 90[J]. Revista De la Unión Matemática Argentina, 2015, 56(1):107-125.
- [18] DEL REY A M, SÁNCHEZ G R. On the reversibility of 150 Wolfram cellular automata[J]. International Journal of Modern Physics C, 2006, 17(7):975-983.
- [19] SARKAR P, BARUA R. The set of reversible 90/150 cellular automata is regular [J]. Discrete Applied Mathematics, 1998, 84(1/2/3):199-213.
- [20] CINKIR Z, AKIN H, SIAP I. Reversibility of 1D cellular automata with periodic boundary over finite fields[J]. Journal of Statistical Physics, 2011, 143(4):807-823.
- [21] YANG B, WANG C, XIANG A. Reversibility of general 1D linear cellular automata over the binary field Z_2 under null boundary conditions[J]. Information Sciences, 2015, 324:23-31.
- [22] DU X, WANG C, WANG T, et al. Efficient methods with polynomial complexity to determine the reversibility of general 1D linear cellular automata over Z_p [J]. Information Sciences, 2022, 594:163-176.
- [23] WOLFRAM S. GAD-EL-HAK M. A new kind of science [J]. Appl. Mech. Rev., 2003, 56(2):18-19.



MA Junchi, born in 2000, postgraduate. His main research interest is cellular automaton.



WANG Chao, born in 1976, associate researcher, is a member of CCF (No. 29080M). His main research interests include theoretical computer science, machine learning and AI.