

参数协同优化的TSVR增强型TSK模糊系统

王维, 赵云龙, 彭小玉, 潘小东

引用本文

王维, 赵云龙, 彭小玉, 潘小东. 参数协同优化的TSVR增强型TSK模糊系统[J]. 计算机科学, 2025, 52(7): 75-81.

WANG Wei, ZHAO Yunlong, PENG Xiaoyu, PAN Xiaodong. TSK Fuzzy System Enhanced by TSVR with Cooperative Parameter Optimization [J]. Computer Science, 2025, 52(7): 75-81.

相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

[基于PPO的自适应杂交遗传算法求解旅行商问题](#)

Adaptive Hybrid Genetic Algorithm Based on PPO for Solving Traveling Salesman Problem

计算机科学, 2025, 52(6A): 240600096-6. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.240600096>

[面向异步混合流水车间排产的混合禁忌搜索遗传优化算法](#)

Improved Genetic Algorithm with Tabu Search for Asynchronous Hybrid Flow Shop Scheduling

计算机科学, 2025, 52(4): 271-279. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.240600049>

[基于改进近端策略优化的无人艇自主避障方法](#)

Autonomous Obstacle Avoidance Method for Unmanned Surface Vehicles Based on Improved Proximal Policy Optimization

计算机科学, 2025, 52(4): 40-48. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.241000084>

[基于特征加权的反事实解释方法:以信贷风控场景为例](#)

Feature-weighted Counterfactual Explanation Method: A Case Study in Credit Risk Control Scenarios

计算机科学, 2024, 51(12): 259-268. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.240300047>

[基于小生境算法的空气质量模糊认知图预测](#)

Air Quality Fuzzy Cognitive Map Forecasting Based on Niche Genetic Algorithm

计算机科学, 2024, 51(11A): 240300120-6. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.240300120>

参数协同优化的 TSVR 增强型 TSK 模糊系统

王 维 赵云龙 彭小玉 潘小东

西南交通大学数学学院 成都 611756

(wwfighting0927@163.com)

摘 要 Takagi-Sugeno-Kang (TSK) 模糊系统作为特殊的非线性回归系统,能够解决机器学习任务,但其处理高维问题的效果并不理想,且对于规则的确定和调整较为困难。为了优化该系统,将沿用模糊 IF-THEN 规则。首先运用模糊 C 均值聚类对数据集进行划分,将数据点嵌入表征点到模糊聚类中心隶属度的空间,进而利用孪生支持向量回归机 (TSVR) 确定两个回归平面,从而得到回归值。考虑到不同数据集适应不同的关键参数,如聚类数等,采用遗传算法 (GA) 进行统一参数寻优,简化了领域知识的先验设置,形成了 TSVR-GA-TSK (TG-TSK) 模糊系统。实验结果表明,相比于经典回归算法和典型的 TSK 模糊系统, TG-TSK 模糊系统具有良好的回归精度和鲁棒性,在 Nemenyi 检验的两两比较中具有显著优势。

关键词: TSK 模糊系统; TSVR; 遗传算法; 协同优化; 回归任务

中图分类号 TP273.4

TSK Fuzzy System Enhanced by TSVR with Cooperative Parameter Optimization

WANG Wei, ZHAO Yunlong, PENG Xiaoyu and PAN Xiaodong

School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China

Abstract As a special nonlinear regression system, the Takagi-Sugeno-Kang (TSK) fuzzy system can solve machine learning tasks, but its effect on high-dimensional problems is not ideal, and it is difficult to determine and adjust the rules. In order to optimize the system, the fuzzy "IF-THEN" rule is followed. Firstly, the fuzzy clustering algorithm is used to divide the dataset, and the data points are mapped to the space representing the membership degree from the point to the fuzzy clustering center. Secondly, the twin support vector regression machine (TSVR) is used to determine the two regression planes to obtain the regression values. Considering that different datasets adapt to different key parameters such as cluster number, the genetic algorithm (GA) is used to optimize multiple parameters at the same time, which simplifies the prior setting of domain knowledge. All of the above processes are called as TSVR-GA-TSK fuzzy system (TG-TSK). Experimental results show that compared with the classical regression algorithms and the typical TSK fuzzy systems, the TG-TSK fuzzy system has good regression accuracy and robustness, and has a significant advantage in the pairwise comparison of Nemenyi test.

Keywords Takagi-Sugeno-Kang (TSK) fuzzy system, Twin support vector regression machine, Genetic algorithm, Cooperative optimization, Regression task

1 引言

模糊系统作为一种非线性动态模型,以其可解释性和处理模糊信息的能力而受到国内外学者的广泛关注。其本质在于,能够利用模糊集、模糊逻辑和模糊规则模拟人类的推理、决策,对不确定、不完全的信息进行处理,因此在自动控制、模式识别、决策分析等方面得到广泛应用和推广^[1]。

模糊系统的核心是多个模糊 IF-THEN 规则组成的规则库,其中一条模糊规则为一个条件陈述句,被表述为 IF〈模糊命题〉, THEN〈模糊命题〉。IF 部分、THEN 部分分别被称为模糊规则的前件、后件。根据规则表达形式的不同,可分为

TSK, Mamdani 和广义模糊系统^[2]。3 种模糊系统在前件的设计上均采用模糊集的方式,以实现输入信息的模糊化处理。TSK 模糊系统的后件是关于输入变量的函数形式,其精确刻画了输入输出变量之间的非线性关系; Mamdani 模糊系统则采用模糊集合形式的后件,直观表达输出的模糊性; 广义模糊系统因其后件的灵活性,具有多种表现形式。

TSK 模糊系统由于在处理复杂系统建模方面具有优越性,因此得到广泛学者的深入研究,主要工作集中在对 TSK 模糊系统的结构和参数进行优化以提高系统性能。Cai 等^[3]运用模糊 C 均值聚类 (FCM) 确定模糊规则前件的隶属度函数,并采用支持向量机 (SVM) 确定模糊规则的后件参数;

到稿日期:2024-05-21 返修日期:2024-09-05

基金项目:国家自然科学基金(12301595, 62106206)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(12301595, 62106206).

通信作者:潘小东(xdpan1@163.com)

Liang 等^[4]利用改进模糊聚类算法提取模糊规则和前件参数,将 T-S 模糊模型后件变换为支持向量回归模型(SVR);Chen 等^[5]利用逐次过松弛技术解决二次规划问题,得到了一种结合模糊神经网络的模糊孪生支持向量机(NFTSVM);Jiang 等^[6]针对前件提出一种多任务 FCM 聚类方法,并针对后件参数设计具备多任务协同学习机制的参数优化方法,得到了基于多任务的 TSK 模糊系统模型;Zhou 等^[7]通过重构训练样本空间,提出一种多训练模块 TSK 模糊分类器(H-TSK-FS),其由多个优化零阶 TSK 模糊分类器组成;Lou 等^[8]将改进的 TSK 模糊系统应用于多标签分类任务,将基于模糊推理的多标签相关学习与多标签回归损失相结合来训练模糊系统,从而得到多标签 TSK 模糊系统模型(ML-TSKFS);Guo 等^[9]使用基于自适应网络的模糊推理系统(ANFIS),集成了改进的 Bagging 和 Dropout 技巧来构建简洁的模糊推理系统;Gu 等^[10]使用粒子滤波方法对概率 TSK 模糊系统(PTSK)的规则数和前后件参数协同学习,得到系统全部参数的最优解;Brikh 等^[11]结合 FCM 和修正的粒子群优化算法对 TSK 模糊系统规则参数进行寻优。以上工作各自从不同的角度切入,拓展了 TSK 模糊系统的优化设计方式。

本文受上述工作启发,在分析了 TSK 模糊系统内在逻辑的基础上,结合 TSVR 与 GA 算法,提出一种优化 TSK 模糊系统的新方法——TG-TSK 模糊系统,并最终提高了其在复杂回归任务中的性能。本文的主要贡献为以下几方面。

首先,沿用传统 TSK 模糊系统 IF-THEN 规则的前件-后件架构,前件利用 FCM 算法,经由隶属度函数对样本数据进行表征从而得到嵌入向量,并利用经过 TSVR 改良的后件架构对回归值进行拟合。

其次,采用遗传算法对模糊规则数及前后件超参数进行二进制编码,利用遗传算法的全局寻优特性,使得各超参数能够协同学习并提高模糊规则质量,在处理复杂任务的同时保证高精度和低复杂度的算法结构。

然后,讨论了利用高斯隶属度函数的 TSK 模糊系统前件与核技巧的内在联系,以及所提出方法的时间复杂度。

最后在 18 个公开的回归数据集上进行实验,结果表明,相比现有算法,TG-TSK 模糊系统具有较高的回归精度和良好的稳定性。

2 相关工作

2.1 TSK 模糊系统

TSK 模糊系统的核心要素是模糊 IF-THEN 规则,其后件输出可以是单值,也可以是输入变量的线性组合。这种结构使得 TSK 模糊系统具有更加灵活的非线性逼近能力。

对于一个具有 K 个模糊规则的经典 TSK 模糊系统^[8],第 k 条规则描述如下:

IF: x_1 is $A_1^k \wedge x_2$ is $A_2^k \wedge \dots \wedge x_D$ is A_D^k

THEN: $f^k(\mathbf{x}) = p_0^k + p_1^k x_1 + \dots + p_D^k x_D$

其中, $k=1,2,\dots,K$; D 是输入向量的维度; x_i 是输入向量 \mathbf{x} 的第 i 个特征, A_i^k 是对应于第 k 条规则下输入向量 \mathbf{x} 的第 i 个特征的前件模糊集; \wedge 是模糊合取算子; $f^k(\mathbf{x})$ 是第 k 条模

糊规则下输入向量 \mathbf{x} 的输出; p_i^k 是第 k 条规则下的后件参数,其中包括偏置项。

输入向量 \mathbf{x} 的第 i 个特征 x_i 的隶属度值为 $\mu_{A_i^k}(x_i)$, 则 \mathbf{x} 在第 k 条规则下的隶属度为:

$$\mu_{A^k}(\mathbf{x}) = \mu_{A_1^k}(x_1) *_{T} \mu_{A_2^k}(x_2) *_{T} \dots *_{T} \mu_{A_D^k}(x_D)$$

其中, $*_{T}$ 的 T 是 t -norm。令:

$$\tilde{\mu}^k(\mathbf{x}) = \frac{\mu_{A^k}(\mathbf{x})}{\sum_{k=1}^K \mu_{A^k}(\mathbf{x})} \quad (1)$$

则 TSK 模糊系统的实值输出为:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \tilde{\mu}^k(\mathbf{x}) f^k(\mathbf{x})$$

可以看到,TSK 模糊系统作为一种有效的模糊推理机制,其输出特性已被证实与线性回归模型具有等价性^[3]。一旦给定完备且恰当定义的隶属度函数,TSK 模糊系统的训练过程实质上可转换为对应线性回归模型参数的学习问题。作为 SVM 在回归问题上的衍生,TSVR 方法凭借其优良的泛化能力和对小样本数据的高度适应性,在处理参数学习问题时展现出显著的优势。其核心理念在于,构造一对正负松弛变量构成的孪生超平面,最小化经验风险并引入结构风险防止过拟合。因此,本文认为传统 TSK 模糊系统前件对原始数据的表征具有一定的非线性能力,可结合未使用核技巧的 TSVR 进行回归拟合,使得提炼出的模糊规则具有很好的可解释性并带来性能上的提升。

2.2 遗传算法

遗传算法(Genetic Algorithm,GA)是一种基于自然选择和遗传的进化算法,其通过二进制编码等方式经多次迭代寻找在解空间中满足最优化条件的解集,运行流程如图 1 所示。

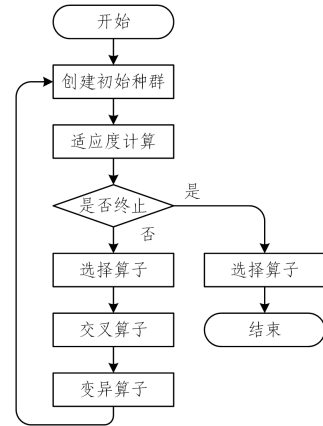


图 1 遗传算法流程图

Fig. 1 Flowchart of genetic algorithm

该算法包含 4 个关键部分:编码方式 C 、选择算子 Φ 、交叉算子 Γ 及变异算子 ψ 。这 4 部分构成了 $GA = (C, E, P_0, M, \Phi, \Gamma, \psi, T)$, 其中 E, P_0, M, T 分别表示适应度评价函数、初始种群、种群大小以及算法终止条件。本文采用遗传算法的标准算子,依次为二进制编码、轮盘赌选择、双点交叉以及单点变异。

3 TG-TSK 模糊系统

本文方法分为 3 个部分,分别是前件模糊化处理、后件回

归参数计算,以及全局超参数协同寻优。通过模糊 C 均值聚类对前件部分进行规则提取,并将数据映射到表征点到模糊聚类中心隶属度的空间的向量中,再通过孪生支持向量回归对后件进行回归拟合,并对前后件部分所包含的,超参数,如规则数等,采用遗传算法进行参数寻优,从而得到 TG-TSK 模糊系统。具体流程如图 2 所示。

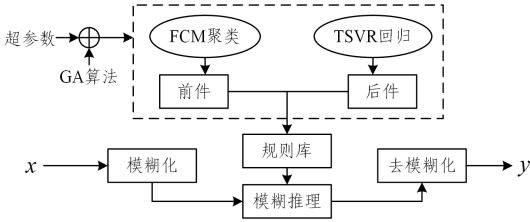


图 2 TG-TSK 模糊系统流程

Fig. 2 Flowchart of TG-TSK fuzzy system

3.1 规则提取及前件参数

在 TSK 模糊系统中,模糊集采用如式(2)所示的高斯隶属度函数:

$$\mu_{A_i^k}(x_i) = \exp\left(-\frac{(x_i - c_i^k)^2}{2(\delta_i^k)^2}\right) \quad (2)$$

其中,参数 c_i^k 和 δ_i^k 可用不同的方法获得。本文采用 FCM 聚类计算上述参数,分别表示为:

$$c_i^k = \frac{\sum_{j=1}^N \mu_{jk} x_{ji}}{\sum_{j=1}^N \mu_{jk}} \quad (3)$$

$$\delta_i^k = \frac{h \cdot \sum_{j=1}^N \mu_{jk} (x_{ji} - c_i^k)^2}{\sum_{j=1}^N \mu_{jk}} \quad (4)$$

其中, μ_{jk} 代表第 j 个实例 x_j 在第 k 条规则下的隶属度,FCM 聚类通过最小化迭代误差求得参数 $c_i^k, \delta_i^k, \mu_{jk}$ 的值; h 是用于调整参数 δ_i^k 的超参数,能够控制对应规则下相应特征的有效覆盖半径。

因此,对于输入向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$,经过前件得到嵌入向量 $\mathbf{x}_g \in \mathbb{R}^{KD}$,其由 K 个 D 维规则并按规则所属的维度归一化后再进行一维拼接得到,表示为:

$$\mathbf{x}_g = [\tilde{\mu}_{A_1^1}(x_1), \tilde{\mu}_{A_1^2}(x_2), \dots, \tilde{\mu}_{A_b^1}(x_D), \dots, \tilde{\mu}_{A_1^K}(x_1), \tilde{\mu}_{A_2^K}(x_2), \dots, \tilde{\mu}_{A_b^K}(x_D)]$$

最终,可将 TSK 模糊系统输出表示为经模糊规则映射到目标值域空间的线性模型,即:

$$y = \mathbf{P}_g^T \mathbf{x}_g$$

其中, $\mathbf{P}_g \in \mathbb{R}^{KD}$ 是 TSK 模糊系统后件参数。若 \mathbf{P}_g^T 包含偏置项,则可令:

$$\mathbf{x}_g = [1, \tilde{\mu}_{A_1^1}(x_1), \tilde{\mu}_{A_1^2}(x_2), \dots, \tilde{\mu}_{A_b^1}(x_D), \dots, 1, \tilde{\mu}_{A_1^K}(x_1), \tilde{\mu}_{A_2^K}(x_2), \dots, \tilde{\mu}_{A_b^K}(x_D)]$$

3.2 后件参数

确定前件结构后,使用 TSVR^[12] 结合目标空间的标签及模糊规则映射后的数据 \mathbf{x}_g 对后件参数进行训练,得到两个非平行超平面 $f_1(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_{g1}^T \mathbf{x}_g + b_1$ 与 $f_2(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_{g2}^T \mathbf{x}_g + b_2$ 。与求解一般的 TSVR 类似,通过求解一对二次规划问题得到 $\mathbf{P}_{g1}, \mathbf{P}_{g2}, b_1, b_2$:

$$\min_{\mathbf{P}_{g1}, b_1} \frac{1}{2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{e}\varepsilon_1 - (\mathbf{P}_{g1}^T \mathbf{X}_g + \mathbf{e}b_1)\|_2 + C_1 \mathbf{e}^T \xi \quad (5)$$

$$\text{s. t. } \mathbf{Y} - (\mathbf{P}_{g1}^T \mathbf{X}_g + \mathbf{e}b_1) \geq \varepsilon_1 - \xi, \xi \geq 0$$

$$\min_{\mathbf{P}_{g2}, b_2} \frac{1}{2} \|\mathbf{Y} + \mathbf{e}\varepsilon_2 - (\mathbf{P}_{g2}^T \mathbf{X}_g + \mathbf{e}b_2)\|_2 + C_2 \mathbf{e}^T \eta \quad (6)$$

$$\text{s. t. } (\mathbf{P}_{g2}^T \mathbf{X}_g + \mathbf{e}b_2) - \mathbf{Y} \geq \varepsilon_2 - \eta, \eta \geq 0$$

其中, $\mathbf{X}_g = [x_{g1}, x_{g2}, \dots, x_{gN}]$, $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $\varepsilon_1 \geq 0$, $\varepsilon_2 \geq 0$, x_{gi} 为第 i 个实例映射后的数据; \mathbf{e} 为 $N \times 1$ 维的单位列向量, ξ 和 η 为松弛变量。

引入拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ 和 $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$, 可得到上式的对偶问题:

$$\max -\frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{f}^T \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{f}^T \boldsymbol{\alpha} \quad (7)$$

$$\text{s. t. } 0 \leq \boldsymbol{\alpha} \leq C_1 \mathbf{e}$$

$$\max -\frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{h}^T \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{h}^T \boldsymbol{\gamma} \quad (8)$$

$$\text{s. t. } 0 \leq \boldsymbol{\gamma} \leq C_2 \mathbf{e}$$

其中, $\mathbf{G} = [\mathbf{X}_g \ \mathbf{e}]$, $\mathbf{f} = \mathbf{Y} - \varepsilon_1 \mathbf{e}$ 和 $\mathbf{h} = \mathbf{Y} + \varepsilon_2 \mathbf{e}$ 。

即得到后件参数以及偏置项:

$$[\mathbf{P}_{g1} \ b_1]^T = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T (\mathbf{f} - \boldsymbol{\alpha})$$

$$[\mathbf{P}_{g2} \ b_2]^T = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T (\mathbf{h} + \boldsymbol{\gamma})$$

最后采用求均值的方式得到 TSK 模糊系统的实值输出:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} [f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})] \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{g1} + \mathbf{P}_{g2})^T \mathbf{x}_g + \frac{1}{2} (b_1 + b_2) \end{aligned} \quad (9)$$

特别地, TSVR 及一系列变体被广泛使用的关键在于核技巧的使用,通过核函数将数据隐式地映射到一个更高维度的特征空间中使其线性可分,对提升其处理非线性回归问题具有重要价值。但本文的 TSVR 部分不会采用核技巧的方式处理回归问题,最重要的原因在于核技巧的引入会使得回归边界不具有直观的可解释性。考虑到前件已经根据高斯隶属度函数结合 FCM 聚类得到 \mathbf{x}_g , 可通过模糊规则及隶属度的概念提高可解释性,最后应用基于线性超平面的 TSVR 完成回归任务。

事实上,由万能逼近定理^[2],带有高斯隶属度函数的模糊系统是通用逼近器;孪生支持向量机通过引入核函数来将线性学习器拓展为非线性学习器,并且在原始数据空间为有限维时,一定存在一个高维特征空间使得样本可分^[13]。上述研究结果说明,带高斯函数的模糊系统能够在分类、回归任务中表现出较好的性能。一般地,命题 1 说明对于原始数据空间,TSK 模糊系统与基于线性核函数的 TSVR 的结合本质上是一种采用了“核技巧”的 TSVR。此核函数不是常用的线性核函数、多项式核函数或高斯核函数等,而是经过模糊规则前件诱导的具有一定可解释性的变换。由于寻找的高维特征空间不同,因此其仅在形式上等价而在具体计算结果中略有差异。

命题 1 使用高斯隶属度函数的 TSK 模糊系统前件部分对数据的处理等价于使用正定核函数“核化”过程。

证明:当给定规则数 K 且利用 FCM 聚类,能够通过式(2)~式(4)迭代计算 c_i^k 和 δ_i^k 。由于 FCM 聚类受到初始值随机选择的影响,因此不同随机种子计算的结果略有差异,但

其仅与数据集的分布相关,故仍可视作常数。

令 $x_g = \phi(x)$, 其中 $\phi(\cdot): \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbf{Y}$ 是由前件部分诱导的变换。定义如下函数: $\mathcal{K}(x, z) = \phi(x) \cdot \phi(z)$, 显然 $\mathcal{K}(\cdot, \cdot)$ 是对称函数。

对于任意 $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^D$, 构造 $\mathcal{K}(x, z)$ 关于 x_1, x_2, \dots, x_N 的 Gram 矩阵:

$$[\mathcal{K}_{ij}]_{N \times N} = [\mathcal{K}(x_i, x_j)]_{N \times N}$$

对于任意 $c_1, c_2, \dots, c_N \in \mathbb{R}$, 有:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N c_i c_j \mathcal{K}_{ij} &= \sum_{i,j=1}^N c_i c_j \phi(x_i) \cdot \phi(x_j) \\ &= \left(\sum_{i=1}^N c_i \phi(x_i) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N c_j \phi(x_j) \right) \\ &= \sum_{k=1}^K \sum_{d=1}^D \left(\sum_{i=1}^N c_i \tilde{\mu}_{\Lambda_k^d(x_i)} \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

由正定核的充要条件定理^[13], 说明 $\mathcal{K}(x, z)$ 为正定核函数。命题 1 成立。

需要注意的是, 上述 $\mathcal{K}(x, z)$ 的计算是由 $x_g = \phi(x)$ 诱导的, 但证明过程仅使用了 $\mathcal{K}(x, z)$ 的计算形式, 这并非说明可以直接通过 $\phi(\cdot)$ 来得到一个核函数。首先, $\varphi(\cdot): \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbf{Y}$ 的 \mathbf{Y} 并非是希尔伯特空间(\mathbf{Y} 不完备), 因此诱导 $\mathcal{K}(x, z)$ 真正成为核函数的是另一隐式映射, 这是高维的, 也可能是无穷维的映射。其次, 这种正定核函数是否真正能从原始线性不可分空间映射到一个高维线性可分空间, 也就是其有效性, 需要通过实验验证。

3.3 参数寻优

在设计 TSK 模糊系统时, 需要提前给定规则数, 一般的处理方式是利用网格搜索方法在一个较大空间里进行寻优。然而, 不同数据集所适合的规则数具有较大差异, 这使得所设计的一系列规则数在处理不同规模和特性的数据集时表现不佳。当数据集发生变化时, 可能需要重新调整合适的网格划分以寻找更好的规则数, 但这无疑增加了系统的维护成本和复杂性。同时, 规则数作为 TSK 模糊系统的重要参数, 需要同额外的超参数耦合并协同寻优才可能使得回归性能最优。

遗传算法可以通过搜索和优化过程自动确定合适的规则数, 无须依赖领域专家的知识 and 经验, 还可以适配其他超参数进行参数协同寻优, 这使得模型无须调整便能够广泛应用于同种规模的数据集。遗传算法具有良好的全局搜索能力, 能够在较大的解空间中寻找最优解, 使得模型能够发现传统方法可能忽略的潜在优质规则数, 并进一步提高模型的性能。

针对此问题, 设计遗传算法解空间元素 $s = [K, m, h, C, \epsilon] \in \mathbb{R}^5$, 对规则数 K 、模糊指数 m 、隶属度函数带宽系数 h 、TSVR 惩罚项参数 C 及其不敏感界 ϵ 进行参数寻优。每一个解元素都可经过 FCM 算法得到嵌入向量 x_g , 再经过 TSVR 得到目标回归值 y 。本文采用 K_{fold} 折交叉验证, 因此适应度函数的计算式如下:

$$\text{fitness}(s) = \frac{1}{K_{\text{fold}}} \sum_{i=1}^{K_{\text{fold}}} \text{MSE}(y_i, \hat{y}_i) \quad (10)$$

其中, \hat{y}_i 为对应 i 折样本标签集。

3.4 时间复杂度分析

由于 TG-TSK 模糊系统沿用了前件-后件架构, 因此从两方面进行分析: 规则前件对样本维度的变换所需的时间复杂

度, 以及规则后件经过 TSVR 回归所需的时间复杂度。

命题 2 假设数据集由 N 个 D 维样本组成, 模糊规则数为 K , FCM 聚类至多迭代 T 次。在不考虑遗传算法超参数寻优的情况下, 单次 TG-TSK 模糊系统的时间复杂度为 $O(TK^2DN + KDN^3)$ 。

证明: 规则前件的主要部分为 FCM 聚类, 每次迭代需要计算一次目标函数, 即 D 维数据中 K 个簇的聚类中心与 N 个数据的距离, 此过程的时间复杂度为 $O(KDN)$ 。隶属度矩阵需要计算 K 次距离, 且式(2)一式(4)的 $c_i^k, \delta_i^k, \mu_{jk}$ 需要迭代 T 次后收敛, 因此规则前件的时间复杂度为 $O(TK^2DN)$ 。

对于规则后件, TSVR 在训练阶段的时间复杂度计算较为复杂, 不同的训练算法会得到不同的结果^[14-15]。为了简单起见, 仅考虑对偶空间中求解二次规划问题所需要的样本数目以及输入的维度, 此时规则后件的时间复杂度为 $O(KDN^3)$ 。

由于两个模块独立且呈序贯联系, 因此总的时间复杂度为规则前件、后件各自的结果之和, 结果为 $O(TK^2DN + KDN^3)$ 。命题 2 成立。

当样本数 N 较大时, 由于三次幂的存在使得 $O(KDN^3)$ 占据主导作用。作为对比, 使用高斯核函数的 TSVR 时间复杂度为 $O(DN^3)$ ^[16-17]; 朴素的 TSK 模糊系统用于回归任务可看作 FCM 聚类与线性回归的组合, 因此其时间复杂度为 $O(TK^2DN + K^2D^2N + K^3D^3)$ 。故理论上 TG-TSK 模糊系统的时间复杂度比经典 TSVR 算法高出约 K 倍, 并且由于回归机制的不同, TG-TSK 模糊系统与朴素 TSK 模糊系统不在同一个数量级。

对于遗传算法对时间复杂度的影响, 即在单次 TG-TSK 模糊系统的基础上, 乘以种群数以及迭代次数。由于规则数、模糊指数等超参数难以精确确定, 一般通过网格搜索的方式进行, 但是遗传算法的特性决定了其会尽量往全局最优解的方向搜索参数, 因而有效地减少了必要的计算量。

综上, TG-TSK 模糊系统的伪代码如算法 1 所示。

算法 1 TG-TSK 模糊系统

输入: 训练集 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$, 验证集输入 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$, 测试样本 \mathbf{x}
输出: 测试目标值 y

1. 初始化前件超参数 K, m, h ;
2. 对训练集 $\{x_i\}_{i=1}^N$ 应用 FCM 聚类并结合式(2)一式(4)计算隶属度矩阵;
3. 应用式(1)对隶属度矩阵进行归一化得到嵌入集合 $\{x_{g,i}\}_{i=1}^N$;
4. 初始化后件超参数 C, ϵ ;
5. 对 $\{x_{g,i}, y_i\}_{i=1}^N$ 应用式(5)一式(8)得到 TSVR 的后件参数;
6. 应用式(9)对 $\{x_i\}_{i=1}^N$ 计算得到 $\{\hat{y}_i\}_{i=1}^N$;
7. 对 $\{y_i\}_{i=1}^N, \{\hat{y}_i\}_{i=1}^N$ 应用式(10)计算遗传算法适应度值;
8. 重复步骤 1-7, 更新遗传算法解空间; 当达到预设的迭代次数时终止;
9. 输入测试样本 \mathbf{x} , 通过式(9)得到目标值。

4 实验

为了验证 TG-TSK 模糊系统的有效性, 本章对比了经典回归算法、典型的 TSK 模糊系统变体算法以及本文所提出的

算法在 18 个回归数据集上的性能差异。为了说明所设计 TSK 模糊系统架构的合理性,对每个部件进行了消融实验,并分析了实验结果。

4.1 数据集与指标说明

表 1 列出了对比实验中使用的 18 个数据集的基本信息,其中 Abalone, Bodyfat, Housing 和 Mg 来自 LIBSVM 数据平台,其余数据集则来自 KEEL 数据平台。

本文全部实验在 CPU 型号为 Intel i5-12400(16 GB)、系统为 Ubuntu 20.04 的环境下执行。参数的选择使用 5 折交叉验证的方法,各对比算法使用 5 个随机种子进行多次实验,在采用回归算法前对所有数据进行最大最小归一化。

表 1 数据集基本信息

Table 1 Basic data set information

数据集	规模	维度	数据集	规模	维度
Abalone	4 177	8	Housing	506	13
Anacalt	4 052	7	Mg	1 385	6
Autompg8	392	7	Mortgage	1 049	15
Bodyfat	252	14	Plastic	1 650	2
Concrete	1 030	8	Quake	2 178	3
Dee	365	6	Stock	950	9
Delta-ail	7 129	5	Treasury	1 049	15
Diabetes	43	2	Wankara	1 609	9
Friedman	1 200	5	Wizmir	1 461	9

采用经典的回归指标对各算法进行评价,包含均方误差(MSE)、平均绝对误差(MAE)以及决定系数 R^2 , 3 种指标的计算式如式(11)~式(13)所示:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (11)$$

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i - \hat{y}_i| \quad (12)$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}_i)^2} \quad (13)$$

其中, N 表示样本点个数, y_i 和 \hat{y}_i 分别为标准目标值和预测目标值, \bar{y}_i 为预测目标值的均值。

为了进一步验证算法的有效性,利用统计方法中的

Friedman 检验与 Nemenyi 检验进行显著性测试,来分析各算法的性能是否具有显著差异^[17]。

Friedman 检验基于排序的统计方法,来比较多个算法在多份数据集上的平均性能是否存在显著差异。将各算法按照性能的升序排序后的索引值作为对应算法在该数据集上的序值,并假设该序值服从正态分布,则对应的卡方统计量为:

$$\tau_{x_F}^2 = \frac{12B}{A(A+1)} \left[\sum_{i=1}^A \left(\frac{1}{B} \sum_{j=1}^B r_{i,j} \right)^2 - \frac{A(A+1)^2}{4} \right] \quad (14)$$

据此得到的服从 $A-1$ 和 $(A-1)(B-1)$ 自由度的 F 分布统计量如下:

$$\tau_F = \frac{(B-1)\tau_{x_F}^2}{B(A-1) - \tau_{x_F}^2} \quad (15)$$

其中, A 和 B 分别表示算法数量和数据集数量, $r_{i,j}$ 表示第 i 个算法在第 j 个数据集上的序值。

若拒绝 Friedman 检验的原假设,则使用 Nemenyi 检验分析任意两个模型之间是否存在差异。如果任意两个算法的平均序值大于临界差异 CD ,则认为这两个算法性能具有显著差异。临界差异定义如下,其中 q_α 的取值参考文献^[17]。

$$CD = q_\alpha \sqrt{\frac{A(A+1)}{6B}} \quad (16)$$

4.2 实验比较

对比实验比较了两类共 6 种回归算法,一类是经典的回归算法,包括标准的多变量线性回归方法(MLR)、贝叶斯岭回归方法(BR)、集成回归方法(E-R);另一类是 TSK 模糊系统的变体,包括基于支持向量回归的 TSK 模糊系统(SV-TSK)^[3]、概率 TSK 模糊系统(PTSK)^[10],以及本文提出的 TG-TSK 模糊系统。其中集成回归方法融合了线性回归、多项式回归、核回归、决策树回归及随机森林回归等经典回归方式,并在最终结果对各预测值进行回归平均预测,在传统的回归方法中表现优异;PTSK 结合了粒子滤波方法的概率 TSK 模糊系统,具有坚实的理论基础,并被给予最大后验概率估计,使得其在 TSK 模糊系统及一系列变体中脱颖而出。各对比算法参数设置如表 2 所列,表中还列出了消融实验的必要超参数设置值。

表 2 各算法参数设置

Table 2 Each algorithm parameter setting

算法	参数设置
MLR	无
BR	先验方差 $\in \{0.001+5i\}_{i=0}^9$, 先验均值 $\in \{0.001+0.001i\}_{i=0}^9$, 预测误差方差 $\in \{0.001+i\}_{i=0}^9$
E-R	多项式次数=2, 决策树深度=4, 随机森林节点数=100
SV-TSK	聚类数 $k \in \{1+(3i-2)^2\}_{i=1}^6$, 隶属度带宽系数 $h \in \{0.1, 0.5, 2, 5\}$, 模糊指数 $m \in \{1.2, 1.8, 3\}$, 惩罚参数 $c \in \{0.05, 0.2\}$, 高斯核带宽 $\sigma \in \{0.05, 0.5, 2\}$
PTSK	模糊指数=2, 最大迭代次数=10 ³ , 阈值=10 ⁻³ , 收敛阈值=50, 稀疏参数 $\in \{1, 2, \dots, 8\}$, 粒子数=10
Ours	种群数 $P=15$, 交叉概率 $P_c=0.7$, 变异概率 $P_m=0.3$, 聚类数 $k \in [2, 300]$, 惩罚参数 $c \in [0.001, 0.2]$, 不敏感界 $\epsilon \in [0.001, 0.2]$, 模糊指数 $m \in [1.2, 3]$, 隶属度带宽系数 $h \in [0.1, 5]$
Ours-(SVR)	同 Ours 参数, 高斯核带宽 $\sigma \in [0.05, 3]$
Ours-(GA)	聚类数 $k \in \{1+(2i-1)^2\}_{i=1}^7$, 隶属度带宽系数 $h \in \{0.1, 0.5, 1\}$, 高斯核带宽 $\sigma \in \{0.05, 0.2\}$, 模糊指数 $m=2$, 惩罚系数 $c=0.2$, 不敏感界 $\epsilon=0.2$
Ours(+TSVR)	惩罚系数 ϵ 、不敏感界 $c \in \{0.001, 0.05, 0.1, 0.2\}$, 高斯核带宽 $\sigma \in \{0.05, 0.5, 2, 6, 10\}$

在对比实验中采用 MSE 指标(均值及标准差)对算法性能进行评价,结果如表 3 所列。其中 TG-TSK 模糊系统包含两

列, TG-TSK¹ 表示在 TSVR 部分未使用核技巧, TG-TSK² 表示在 TSVR 部分采用高斯核技巧; MLR 和 BR 算法结果选择调

用 sklearn 包与作者复现的更优结果;由于集成回归 E-R 算法采用的基回归器各不相同,因此取作者复现的结果和 PTSK 文章结果的 MSE 更小值^[10]为该算法在表 3 中的最终结果;SV-

TSK 结果通过原始论文对应的伪代码复现得到;PTSK 结果采用论文的相应结果作为对比。若回归算法需要预先设置超参数,则按照表 2 的参数设置并结合网格搜索的方式进行。

表 3 6 种算法在 18 个数据集上的 MSE(标准差)对比实验
Table 3 MSE(standard deviation) comparison experiments of 6 algorithms on 18 datasets

数据集	MLR	BR	E-R	SV-TSK	PTSK	TG-TSK ¹	TG-TSK ²
Abalone	5.0120 0.033	4.9816 0.069	4.1738 0.383	6.0219 0.004	4.0810 0.196	4.4729 0.013	4.4736 0.044
Anacalt	0.1709 1.73×10^{-4}	0.1709 1.69×10^{-4}	0.0358 2.29×10^{-4}	0.0262 4.17×10^{-4}	0.0435 1.40×10^{-3}	0.0102 1.42×10^{-3}	0.0103 4.81×10^{-4}
Autompg8	11.4326 0.187	10.5640 1.898	8.6182 1.131	18.5317 0.157	8.2122 1.003	7.1242 0.148	6.6760 0.147
Bodyfat	9.973×10^{-6} 2.28×10^{-7}	9.843×10^{-6} 1.80×10^{-7}	3.043×10^{-5} 5.21×10^{-6}	4.000×10^{-4} 1.33×10^{-5}	3.440×10^{-4} 2.04×10^{-5}	1.524×10^{-5} 6.22×10^{-6}	1.190×10^{-5} 6.89×10^{-7}
Concrete	109.9870 0.650	102.6880 11.668	49.3255 1.270	205.6140 0.956	50.5285 3.400	36.3273 1.620	42.7908 6.060
Dee	0.1716 0.002	0.1627 0.016	0.1846 0.004	0.1753 0.004	0.2294 0.021	0.1537 0.003	0.1563 0.003
Delta-ail	2.966×10^{-8} 2.71×10^{-11}	2.953×10^{-8} 1.90×10^{-10}	2.928×10^{-8} 2.35×10^{-10}	1.055×10^{-7} 6.82×10^{-9}	2.724×10^{-8} 3.00×10^{-9}	2.756×10^{-8} 4.86×10^{-10}	2.849×10^{-8} 1.20×10^{-9}
Diabetes	0.3838 0.045	0.3849 0.042	0.3813 0.039	0.3999 0.022	0.4883 0.398	0.2993 0.026	0.3746 0.021
Friedman	7.3259 0.020	6.9646 0.327	2.7852 0.352	5.5618 0.090	2.1408 0.353	1.3113 0.046	1.2717 0.053
Housing	23.7830 0.546	21.7968 3.707	14.5976 1.701	60.8665 0.191	33.0672 5.215	12.1145 0.600	9.8938 1.003
Mg	0.0214 7.92×10^{-5}	0.0214 7.87×10^{-5}	0.0162 1.99×10^{-4}	0.0146 1.18×10^{-4}	0.0157 1.14×10^{-3}	0.0142 1.21×10^{-4}	0.0142 1.80×10^{-4}
Mortgage	0.0147 2.45×10^{-4}	0.0142 5.95×10^{-4}	0.0843 3.99×10^{-3}	0.1061 1.17×10^{-3}	0.0407 2.52×10^{-3}	0.0035 3.32×10^{-4}	0.0060 3.62×10^{-4}
Plastic	2.3415 0.002	2.2722 0.087	2.6657 0.401	2.6179 0.008	2.2153 0.200	2.1934 0.007	2.1970 0.004
Quake	0.0358 2.47×10^{-5}	0.0358 2.45×10^{-5}	0.0575 4.50×10^{-2}	0.0376 8.51×10^{-5}	0.0356 2.97×10^{-3}	0.0356 7.17×10^{-5}	0.0355 3.70×10^{-5}
Stock	5.5284 0.042	5.1976 0.471	1.5008 0.321	2.7277 0.032	1.1938 0.265	0.4118 0.023	0.4514 0.014
Treasury	0.0597 0.002	0.0525 0.009	0.4287 0.102	0.3401 0.006	0.4124 0.066	0.0269 0.002	0.0302 0.002
Wankara	2.6687 0.036	2.7348 0.035	1.6955 0.409	66.4678 0.286	1.6096 0.199	1.6594 0.030	1.7818 0.054
Wizmir	1.5985 0.006	1.5302 0.151	2.1475 0.467	10.2778 0.364	1.5245 0.211	1.2831 0.013	1.3069 0.016

由表 3 可知, TG-TSK 模糊系统在大部分数据集上取得了令人满意的 MSE 值。朴素的 TG-TSK 在 18 个数据集上有 10 个表现最好, 使用了高斯核技巧的 TG-TSK 在 4 个数据集上具有优势, PTSK 在 3 个数据集上结果最佳。以经典回归算法和 TSK 模糊系统变体在各数据集的最优结果为基准, TG-TSK 模糊系统的 MSE 精度平均提高了 17.99%。对于 TG-TSK 两个结果的比较, 间接证明了命题 1 的合理性, 在实际进行算法应用时, 下游一般无需再次使用核技巧。

利用式(14)~式(16)的 Friedman 检验与 Nemenyi 检验进行进一步说明。根据表 3 均值的结果构造 MSE 值的平均等级矩阵, 其 Friedman 检验的 $p_{\text{value}} = 3.6 \times 10^{-7} < 0.05$, 拒绝多个模型测量结果无显著差异的原假设; 接着进行 Nemenyi 检验, TG-TSK 与 PTSK 的 $p_{\text{value}} = 0.081 < 0.1$, 在显著性水平为 0.1 的情况下两者有显著差异; TG-TSK 与其他算法相比, 最大的值 $p_{\text{value}, \text{max}} = 0.005 < 0.05$, 在显著性水平为 0.05 的情况下有显著差异。基于以上结果, 无论从回归精度或者统计检验的结果来看, TG-TSK 模糊系统都具有更优的性能。

同时需要注意, PTSK 作为优秀的概率型 TSK 系统, 在大多数数据集上与本文方法的结果差异不大。MLR 和 BR 作为经典回归算法, 在非线性数据集上表现一般; 经典的 E-R 融合多个基回归器, 并最终取平均值的方式得到回归结果, 效果较好, 然而其无法评价各个基回归器对最终结果的贡献, 导致可能会有部分不适合该数据集的基回归器对最终结果造成了较大的影响; SV-TSK 利用了 SVR 和 Mercer 核函数, 但 MSE 值依然不理想。由此可知, 数据挖掘输入空间以及对输入空间的进一步处理对于拟合准确的回归结果至关重要。

为进一步说明 TG-TSK 模糊系统各部件的耦合联系, 进行了消融实验, 结果如图 3 和表 4 所列。图 3 为在指定随机种子的情况下, 对 18 个数据集的全部结果进行统计分析得到的箱线图, 其结果经过了最大最小归一化到区间以统一量纲。(一)SVR 表示将 TSVR 算法替换为 SVR 算法, 其余部件相同; (二)GA 表示将 GA 算法替换, 按照表 2 的设置对参数进行网格搜索; (三)TSVR 表示仅采用 TSVR 并结合网格搜索的方式进行实验。

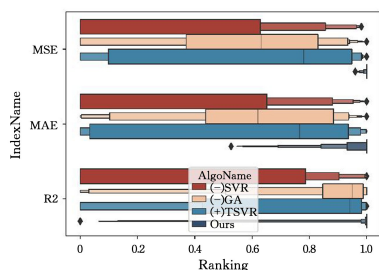


图3 消融实验归一化箱线图

Fig. 3 Normalized box diagram for ablation experiment

表4列出了在 Abalone 数据集上各消融部件的原始数据结果。

表4 消融实验
Table 4 Ablation experiment

组件	选择			
TSK	✓	✓		✓
SVR	✓			
TSVR		✓	✓	✓
GA	✓			✓
MSE	6.7155	5.2405	4.6297	4.4524
MAE	1.6997	1.6246	1.5024	1.5172
R ²	-1.7154	0.2666	0.2590	0.2834

根据图3及表4所描述结果可知,结合了TSK,TSVR和GA算法的TG-TSK模糊系统具有天然的耦合性,表现最优。仅采用网格搜索的TSVR,性能下降约21%;将GA算法用网格搜索的算法替换,其性能下降约36%;而用SVR代替TSVR后,其性能下降更为严重,说明TSVR在处理该问题时具有先天优势。

本文命题1结合消融实验结果充分说明,采用TSK模糊系统前件替代TSVR的核函数,其效果得到进一步提升,说明TSK模糊系统的前件将原始数据映射到了一个更可分的空间,这个空间能够被模糊规则所解释,且其采用基于邻域思想的模糊聚类方式,将相似的点天然地聚合在了一起,保留了原始分布结构。GA算法在此基础上对包括模糊规则数在内的超参数进行了充分协同搜索,并在迭代过程中找到了网格搜索不能搜索的更精细区域,但其代价是计算时间的相应增加。

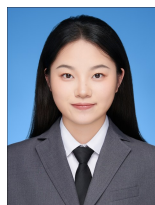
结束语 本文基于TSVR算法、GA算法提出了一种TSK模糊系统的优化方法,该方法将系统前后件视为一个整体,通过超参数协同的方式耦合两个部分。系统前件对于原始数据的合理映射使得数据更具有可解释性,并且使后件部分更易拟合。实验结果表明,TG-TSK模糊系统的逼近性能取得了令人满意的结果,并探讨了该方法与纯利用核技巧的TSVR的内在联系以及其时间复杂度。需要指出的是,TG-TSK的优化方式决定了其性能上的提升必然要以时间成本为代价,同时对于以万计的数据集规模和数十计的数据维度,该算法很难在有效时间内找到更好的结果,该问题将在未来进行进一步研究。

参考文献

[1] SUGENO M, KANG G T. Structure identification of fuzzy model[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1988, 28(1): 15-33.
 [2] WANG L X. Fuzzy System and Fuzzy Control Course[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.
 [3] CAI Q F, HAO Z F, LIU W. TSK Fuzzy System based on Fuzzy Partition and Support Vector Machine [J]. Pattern Recognition

and Artificial Intelligence, 2009(3): 411-416.

[4] LIANG Y M, SU F, LI Q, et al. Self-organization algorithm of T-S Fuzzy model based on support vector Machine regression and its application [J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(12): 2143-2149.
 [5] CHEN S G, WU X J. A new fuzzy twin support vector machine for pattern classification [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2018, 9: 1553-1564.
 [6] JIANG Y Z, HUA L, ZHANG Q, et al. Multi-task TSK fuzzy system model driven by multi-task fuzzy clustering [J]. Chinese Journal of Applied Sciences, 2019, 38(5): 742-760.
 [7] ZHOU T, DENG Z H, JIANG Y Z, et al. Multi-module TSK fuzzy system based on training space reconstruction [J]. Journal of Software, 2020, 31(11): 3506-3518.
 [8] LOU Q, DENG Z, XIAO Z, et al. Multilabel Takagi-Sugeno-Kang Fuzzy System [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2021, 30(9): 3410-3425.
 [9] GUO F, LIU J, LI M, et al. A concise TSK fuzzy ensemble classifier integrating dropout and bagging for high-dimensional problems [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2021, 30(8): 3176-3190.
 [10] GU X Q, NI T G, ZHANG C, et al. Probabilistic TSK fuzzy system for collaborative Learning of structure Identification and parameter Optimization [J]. Acta Automatica Sinica, 2021, 47(2): 349-362.
 [11] BRIKH L, GUENOUNOU O, BAKIR T. Selection of minimum rules from a fuzzy TSK model using a PSO-FCM combination [J]. Journal of Control, Automation and Electrical Systems, 2023, 34(2): 384-393.
 [12] PENG X. TSVR: An efficient twin support vector machine for regression [J]. Neural Networks, 2010, 23(3): 365-372.
 [13] LI H. Statistical Learning Methods (2nd Ed.) [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2012.
 [14] OPTIMIZATION S M. A fast algorithm for training support vector machines [J]. CiteSeerX, 1998, 10(1.43): 4376.
 [15] BURGESS J C. A tutorial on support vector machine for pattern recognition [J]. Data Mining and Knowledge Discovery, 1998, 2(2): 955-974.
 [16] XU B Y, GU B J, PAN F, et al. Weighted smooth projection twin support vector regression algorithm [J]. Computer Engineering, 2022, 48(12): 104-111, 118.
 [17] DEMSAR J. Statistical comparisons of classifiers over multiple data sets [J]. Journal of Machine Learning Research, 2006, 7(1): 1-30.



WANG Wei, born in 1999, postgraduate. Her main research interest is fuzzy mathematics and its application.



PAN Xiaodong, born in 1979, Ph.D., associate professor, Ph.D supervisor. His main research interests include fuzzy information processing, fuzzy set theory and so on.