

基于局部中心解聚类的多模态多目标优化算法

岳彩通, 叶文豪, 张颖洁, 梁静, 林泓宇

引用本文

岳彩通, 叶文豪, 张颖洁, 梁静, 林泓宇. [基于局部中心解聚类的多模态多目标优化算法](#)[J]. 计算机科学, 2025, 52(8): 288-299.

YUE Caitong, YE Wenhao, ZHANG Yingjie, LIANG Jing, LIN Hongyu. [Multimodal Multiobjective Optimization Algorithm Based on Local Center Clustering](#) [J]. Computer Science, 2025, 52(8): 288-299.

相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

[基于并行分区搜索的多模态多目标优化及其应用](#)

Multimodal Multi-objective Optimization Based on Parallel Zoning Search and Its Application
计算机科学, 2022, 49(5): 212-220. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.210300019>

[基于属性图模型的领域知识图谱构建方法](#)

Method of Domain Knowledge Graph Construction Based on Property Graph Model
计算机科学, 2022, 49(2): 174-181. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.210500076>

[基于极值优化策略的改进的人工蜂群算法](#)

Improved Artificial Bee Colony Algorithms Based on Extremal Optimization Strategy
计算机科学, 2013, 40(6): 247-251.

[求解函数优化问题的改进的人工蜂群算法](#)

Improved Artificial Bee Colony Algorithms for Function Optimization
计算机科学, 2013, 40(8): 252-257.

[改进人工蜂群算法求解多目标连续优化问题](#)

Improved Artificial Bee Colony Algorithms for Multi-objective Continuous Optimization Problem
计算机科学, 2014, 41(6): 254-259. <https://doi.org/10.11896/j.issn.1002-137X.2014.06.050>

基于局部中心解聚类的多模态多目标优化算法

岳彩通 叶文豪 张颖洁 梁静 林泓宇

郑州大学电气与信息工程学院 郑州 450001

(zzuyuecaitong@163.com)

摘要 在多模态多目标优化问题中,求得多个全局及局部最优解可以为决策者提供更加灵活的选择方案。然而,目前大多数多模态多目标算法的研究工作侧重于寻找多个等效的全局帕累托最优解,忽略了同样有保留价值的局部帕累托最优解。基于上述问题,提出了一种基于局部中心解聚类的多模态多目标优化算法。该算法通过局部中心解的选择策略来定位尽可能多的最优区域,然后针对种群在最优区域的不同探索情况设计了两种不同的搜索策略,使得种群可以根据自身情况自适应地选择变异策略,从而对每个最优区域进行更好的开发。在 CEC2020 多模态多目标测试问题集上进行了测试,所设计的进化算法在求解含多个全局帕累托解集和同时含全局及局部帕累托解集的测试问题中都表现出了良好的性能。

关键词: 多模态多目标优化;全局帕累托最优解;局部帕累托最优解;局部中心解

中图分类号 TP273

Multimodal Multiobjective Optimization Algorithm Based on Local Center Clustering

YUE Caitong, YE Wenhao, ZHANG Yingjie, LIANG Jing and LIN Hongyu

College of Electrical and Information Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China

Abstract In multimodal multiobjective optimization problems, multiple global and local optimal solutions can provide flexible options for decision makers. However, the current research work of multimodal multiobjective algorithms mostly focuses on multiple equivalent global Pareto optimal sets, ignoring the local Pareto optimal sets with the same value. Based on the above problems, a multimodal multiobjective optimization algorithm based on local center clustering is proposed. The algorithm locates as many optimal regions as possible through the selection strategy of the local central solution, and then designs two different search strategies according to different exploration conditions of the population in the optimal region, so that the population can choose the mutation strategy adaptively according to its own conditions. Thus, each optimal region can be explored well. The proposed algorithm is tested on the CEC2020 multimodal multiobjective benchmark function. The results show that the proposed evolutionary algorithm performs well in solving problems with multiple global Pareto sets and both global and local Pareto sets.

Keywords Multimodal multiobjective optimization, Global Pareto optimal sets, Local Pareto optimal sets, Local central solution

1 引言

在实际优化问题中,往往需要考虑多个存在互斥关系的优化目标。一般来说,多目标优化问题(Multiobjective Optimization Problems, MOPs)^[1-4]可以建模为:

$$\min_{x \in \Omega} F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T \quad (1)$$

其中, $x = (x_1, \dots, x_n)$ 是决策空间中 Ω 的一个变量(n 是决策变量的维度),而 $F(x)$ 定义了 m 个目标函数 $f_1(x), \dots, f_m(x)$, 这些目标间通常是相互冲突的。多目标优化问题通常用支配关系来衡量解的优劣,如果:

$$\begin{cases} \forall i=1, 2, \dots, m, & f_i(x_a) \leq f_i(x_b) \\ \exists j=1, 2, \dots, m, & f_j(x_a) < f_j(x_b) \end{cases} \quad (2)$$

则称解 x_a 支配解 x_b , 即认为解 x_a 优于解 x_b 。当一个解不受任何其他解支配时,称这个解为非支配解。称所有非支配解的集合为帕累托解集(Pareto Set, PS),帕累托解集在目标空间的映射称为帕累托前沿(Pareto Front, PF)^[5]。

多模态多目标优化问题^[6-7](Multimodal Multiobjective Optimization Problems, MMOPs)是在多目标优化问题中存在多个不同的全局帕累托解集对应同一个全局帕累托前沿,或者存在至少一个局部帕累托解集对应局部帕累托前沿。近

到稿日期:2024-07-15 返修日期:2024-10-14

基金项目:国家自然科学基金青年项目(62106230);国家自然科学基金区域创新发展联合基金重点项目(U23A20340);河南省自然科学基金优秀青年科学基金(242300421168);国家重点研发计划(2022YFD2001200);重庆邮电大学大数据智能计算重点实验室开放基金(BDIC-2023-A-007)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(62106230), Key Program of Regional Innovation and Development Joint Fund of the National Natural Science Foundation of China(U23A20340), Natural Science Foundation of Henan(242300421168), National Key R&D Program of China(2022YFD2001200) and Key Laboratory of Big Data Intelligent Computing, Chongqing University of Posts and Telecommunications Open Foundation(BDIC-2023-A-007).

通信作者:梁静(liangjing@zzu.edu.cn)

年来,研究人员提出了许多多模态多目标优化算法(Multimodal Multiobjective Evolutionary Algorithms, MMEAs)来解决 MMOPs。MMOPs 存在多个帕累托解集,这些帕累托解集映射到目标空间中的帕累托前沿通常比较拥挤,甚至对应于相同的帕累托前沿。因此,在设计 MMEAs 时,需要同时考虑到决策空间和目标空间^[8]。基于此,提出了许多具有良好性能的 MMEAs^[9-15],它们可以同时求得问题中的多个等效的全局最优解,为决策者提供更多的选择。

但是,以往的多模态多目标算法在对问题进行求解时,往往只侧重于求得多个等效的全局最优解,忽略了问题中同样存在的优秀局部最优解。Liang 等^[16]在 CEC2019(2019 IEEE Congress on Evolutionary Computation)多模态多目标测试竞赛中提出了同时含全局及局部帕累托解集的 MMOPs 测试问题,建议 MMEAs 在求得全局帕累托解集的基础上,提供具有良好质量的局部帕累托解集。实际上,应用问题中,存在多个等效的全局最优解是一些特例。更常见的情况是,在优化问题中同时存在多个全局及局部最优解,而这些具有良好质量的局部最优解也是决策者可以接受的^[17]。例如,在特征选择问题中^[18-20],需要在选择特征数量尽可能少的情况下维持较高的分类精度。当选择一定的特征数量时,很少存在分类精度完全相等的两个特征子集,但在可接受的精度范围内,很大可能会存在其他的特征子集,这些特征子集可能与最优子集中的特征选择完全不同。当最优子集中的部分特征存在较大的获取难度时,选择稍差一点的局部最优子集也可以得到相似的分类结果。此外,在路径规划问题中很难找到目标值完全相同的两条路线,这时具有可接受质量的局部最优解就可以给我们提供更多的选择。图 1 展示了从起点到终点的两条不同的路线,路线一靠近居民区且途中有加油站,路线二则更靠近郊区。从中可以看出,路线一比路线二长。虽然路线一更长,但当我们对加油站有需求时,路线一就可以作为第一选择;而路线二由于没有加油站,无法满足我们的需求。可见,路线一在满足我们需求的同时,为我们提供了更多的选择。因此,在求得全局最优解的基础上保留具有可接受质量的局部最优解可以帮助决策者更加深入地挖掘问题特性,提供更加灵活的选择空间,从而获得一些新的解决方法。

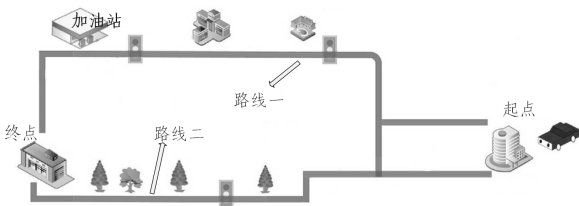


图 1 路径规划问题
Fig. 1 Path planning problem

然而,在局部和全局帕累托解集共存的情况下,同时求得这些解集是极具挑战性的。原因主要有两个:1)在算法的搜索过程中,很难对局部帕累托解进行区分。多模态多目标优化算法通常使用划分小生境的方法来保留多模态解,但是在算法搜索过程中,我们不能提前获取到问题的适应度地形信息,因此不知道哪些解是位于局部最优的潜力区域,很难正确划分小生境。一旦把局部帕累托解和全局帕累托解划分到同

一个小生境中,局部帕累托解就会被全局帕累托解支配掉,从而丢失该局部区域的最优解。2)局部帕累托解很难在进化过程中被保留下来。因为局部帕累托解是被全局帕累托解所支配的,如果算法在此之前已经找到了全局帕累托解,那么局部帕累托解就会因为劣于全局帕累托解而被淘汰,使算法丢失局部帕累托解的信息。基于此,本文提出了一种基于局部中心解聚类的多模态多目标优化算法(Multimodal Multiobjective Optimization Clustering Locality, MMOCL),分别针对以上两个挑战设计了局部中心解的筛选策略和自适应局部搜索策略。其中,局部中心解的筛选策略可以利用局部小生境中所有种群的支配信息,保留下每个最优区域的潜力解。在自适应局部搜索策略中设计了 DE/potential/1 和 DE/local/1 两种变异策略,局部种群可以自适应地选择合适的策略对其所在的局部区域进行探索,使得算法能够在找到全局帕累托解集的基础上保留具有良好质量的局部帕累托解集。此外,为了得到分布更加均匀的帕累托前沿,对环境选择策略进行了改进。

本文第 2 章说明了 MMOPs 的相关研究背景及本文研究的动机;第 3 章对提出的 MMOCL 进行了详细的说明;第 4 章对实验结果进行了展示和讨论;最后对全文进行总结。

2 研究背景及动机

2.1 多模态多目标基本知识

采用 Liang 等^[16]提出的定义来对 MMOPs 中的基本概念进行解释。

定义 1(局部帕累托解集) 对于局部解集 S_L 中的任意解 x ,如果不存在满足 $\|x-y\| \leq \delta$ (δ 是一个较小的正值)的邻域解支配 x ,则定义 S_L 为局部帕累托解集。

定义 2(局部帕累托前沿) 目标空间中对应于局部帕累托解集的所有解的集合被定义为局部帕累托前沿。

定义 3(全局帕累托解集) 对于全局解集 S_G 中的任意解 x ,如果在可行域中不存在任何一个解可以支配 x ,则定义 S_G 为全局帕累托解集。

定义 4(全局帕累托前沿) 目标空间中对应于全局帕累托解集的所有解的集合被定义为全局帕累托前沿。

为了更直观地对 MMOPs 进行说明,图 2 展示了一个 MMOPs 示例。它包含一个局部 PS 和一个全局 PS,全局 PS 映射到目标空间的全局 PF,局部 PS 映射到目标空间的局部 PF。

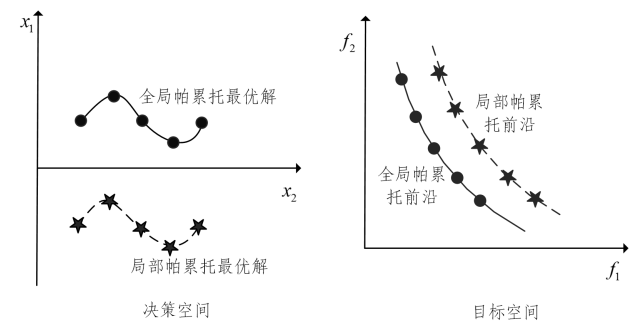


图 2 具有局部帕累托前沿的多模态多目标问题

Fig. 2 Multimodal multiobjective problems with local pareto front

2.2 研究现状

近年来,研究人员开始关注多目标问题中的多模态特征,在以往优化算法^[21-24]的基础上提出了许多多模态多目标优化算法。

下面对基于不同变异算子设计的多模态多目标优化算法进行简单的介绍。最初,Deb等^[25]基于NSGAI中解决多目标问题时的思想,提出了Omni-opt优化算法。受Omni-opt优化算法的影响,Shir等^[26]在一种小生境框架的基础上引入了空间聚合的方法,在决策空间和目标空间中采用空间聚合划分出多个小生境,可以在不影响目标空间收敛性的基础上增强算法在决策空间中的多样性。进一步,Liu等^[27]提出了一种双小生境策略,用于同时维护算法在目标空间和决策空间中的多样性,使算法求得目标空间和决策空间的解集更加多样化。不同于上述算法,部分MMEAs基于PSO变异算子进行算法设计。Yue等^[28]提出了一种采用环形拓扑结构的多模态多目标优化算法(MO_Ring_PSO_SCD)。该算法提出了一种特殊拥挤距离计算方法(SCD),考虑到了多模态解在目标空间中的拥挤情况,能够更合理地选出拥挤解。Zhang等^[29]设计了一种具有领导者更新机制以及环形拓扑结构的多模态多目标粒子群算法。Liang等^[30]开发了一种具有自组织网络的多模态多目标粒子群算法,利用自组织网络在决策空间构建邻域。此外,DE变异算子也被广泛应用于MMEAs。例如,Liang等^[31]对差分进化算法中的突变方法进行了补充,考虑个体更新在边界外时的特殊情况,开发了一种新的突变策略来对这部分个体进行处理,进而提出了一种多模态多目标差分进化算法。Pal等^[32]对目标空间进行分解,基于小生境方法和资源分配方案提出了一种多模态多目标差分进化算法。Qiao等^[33]提出了一种基于聚类方法和精英选择机制的差分进化算法,对特殊拥挤距离的计算方法进行了改进,通过融合聚类方法设计了一种新的拥挤距离计算方法。

虽然目前多模态多目标优化的研究已经取得了很大的进展,但很少有人关注同时含全局及局部帕累托解集的MMOPs问题。Yue等^[34]针对含局部帕累托解集的问题开发了一种标记支配解的方法,使算法具有了保留局部帕累托解集的能力。但是,算法在搜索过程中没有设计有效的局部解保留策略,因此只能找到部分局部帕累托最优解集,导致性能下降。Liu等^[17]在一种双小生境进化算法的基础上进行了改进,加入了多帕累托前沿档案,用来获取多个局部帕累托解集。但他们也只是初步探索了此类问题,算法求解局部帕累托最优解集的性能还有待提高。Li等^[35]提出了一种基于层次排序的多模态多目标优化算法,通过目标空间非支配排序来对帕累托前沿进行分层保留,从而实现保留全局及局部帕累托解集的目的。该算法虽然能够同时找到大部分全局帕累托最优解集和局部帕累托最优解集,但在目标空间的收敛性还不尽如人意。本文所提出的MMOCL算法采用局部中心解的筛选策略和自适应局部搜索策略对局部区域进行探索,从而获取更多局部帕累托最优解。

2.3 动机

目前的多模态多目标算法大多只能求得MMOPs中的全局帕累托解集,不能同时保留局部帕累托解集。考虑到实际

问题中的应用情况,一个性能良好的多模态多目标算法应该同时具备求解只含全局帕累托解集的MMOPs与同时含全局及局部帕累托解集的MMOPs的能力。为了能够求解更一般化的多模态多目标优化问题,本文提出了一种新的基于局部中心解聚类的多模态多目标优化算法MMOCL,其可以同时求得多个全局及局部帕累托解集。所提方法的主要创新点如下:

1)提出了一种局部中心解的筛选策略,以尽可能多地定位全局和局部最优区域。首先,通过划分局部小生境,确保全局最优解不直接参与其他区域解的竞争,从而最大限度地确保局部帕累托最优解在局部区域的主导地位;其次,在局部小生境中,对所有支配解进行标记,并清除最优解周围的爬坡解,以筛选出每个最优区域的潜力解;最后,计算局部小生境中个体的局部收敛质量,并在筛选出潜力解后,加入局部收敛质量好的解来补充局部中心解。

2)提出了一种自适应局部搜索策略,对筛选出的局部中心解进行聚类,以更好地探索每个最优区域。该策略在限制种群信息传播的同时,保护了种群分布的多样性。同时,为了更好地探索每个区域,设计了同时考虑决策空间和目标空间种群分布的自适应局部搜索策略。该策略针对不同的潜力区域探索情况设计了两类变异策略DE/potential/1和DE/local/1,使种群能够根据当前区域在决策空间和目标空间中的探索情况自适应地选择搜索策略。

3)结合局部中心解的选择策略和自适应局部搜索策略,提出了一种能够同时求得全局和局部帕累托解集的多模态多目标优化算法。在含有全局帕累托解集的MMOPs和同时含有全局和局部帕累托解集的MMOPs测试问题中,将所提算法与其他代表性算法进行了对比,验证了其有效性。

3 基于局部中心解聚类的多模态多目标优化算法

本章对MMOCL的具体内容进行了详细的阐述。首先介绍了算法的整体框架,然后对算法中局部中心解的选择和自适应局部搜索策略进行了具体的说明。

3.1 算法框架

算法1描述了MMOCL算法的整体框架。在对种群进行初始化操作后,通过计算邻域半径来对种群进行划分,根据划分后的种群信息筛选出局部中心解,从而得到多个有潜力的最优区域。当局部中心解的数量大于种群规模时,对筛选出的局部中心解进行环境选择,根据特殊拥挤距离(SCD)^[28]删去拥挤解。然后对每个最优区域的个体进行聚类,在后面种群探索中,利用目前潜力区域种群的信息来更好地对每个最优区域进行开发和探索。重复以上过程,直到输出最终的种群。

算法1 MMOCL算法框架

输入:种群Pop,种群规模NP,最大评价次数MaxFEs

输出:种群Pop

1. 初始化种群Pop;
2. while FEs < MaxFEs
3. 计算邻域半径,划分小生境;
4. 筛选局部中心解;
5. if size(Pop,1) < NP then
6. 补充局部中心解;

7. else
8. 删除 SCD 值大的拥挤解;
9. end if
10. 根据 NCM 聚类情况自适应局部搜索产生子代;
11. end while

输出:子代种群 off_pop

SCD 的计算式如下:

$$SCD_i = \begin{cases} \max(CD_{i,x}, CD_{i,f}), & CD_{i,x} > CD_{avg,x} \text{ 或} \\ & CD_{i,f} > CD_{avg,f} \\ \min(CD_{i,x}, CD_{i,f}), & \text{其他} \end{cases} \quad (3)$$

其中, $CD_{i,x}$ 和 $CD_{i,f}$ 分别表示个体 i 决策空间和目标空间的拥挤距离; $CD_{avg,x}$ 和 $CD_{avg,f}$ 分别表示决策空间和目标空间的平均拥挤距离。

3.2 局部中心解的选择策略

为了使算法可以保留在进化过程中探索到的全局及局部最优潜力区域,我们设计了一种局部中心解的选择策略。该策略分为两个阶段:第一阶段,先对种群中的局部中心解进行初步的筛选,保留尽可能多的潜力区域;第二阶段,对筛选出的局部中心解进行补充,完善潜力区域的种群。

在算法进行局部中心解的初步筛选时,首先划分小生境,确定每个个体的邻域;然后对邻域中的个体进行非支配排序,标记所有邻域中的被支配个体;最后在种群中删去所有标记过的被支配个体。局部中心解筛选策略如图 3 所示,其中虚线所画的圆圈表示决策空间中被划分出的不同邻域,实心圆表示具有全局帕累托最优解和局部帕累托最优解的邻域。它们之间没有重叠,所以这两个圆圈里的解既不会交配,也不会产生竞争。为了能够只保留实心圆内的全局及局部最优解,删去了虚线圆内全局及局部最优区域的爬坡解。进一步使用一种选择方法来删除这些不需要的解决方案,在进一步的选择中,每个邻域中被支配的解决方案都被标记出来。所有标记的解决方案都将从最终解的选择中删除。由于图 3 中相邻的圆之间存在重叠,支配关系可以从一个扩散到另一个。例如,圆 A 的顶部被底部的解支配,所以顶部部分被标记,类似的情况也发生在圆 B 中。因此,圆中所有不是局部和全局帕累托最优区域的解都被标记出来,最终将只保留全局和局部的帕累托最优解。

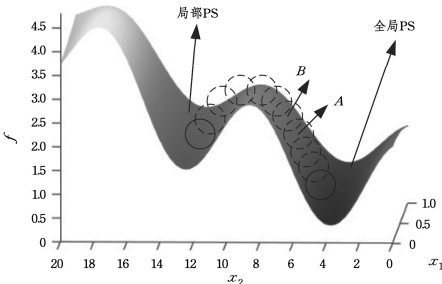


图 3 局部中心解筛选策略图

Fig. 3 Illustration of local center solution selection strategy

当第一阶段筛选出的局部中心解数量过少时,选择局部收敛质量好的解对筛选出的局部中心解种群进行补充。在划分小生境后,计算每个个体在局部小生境中的局部收敛质量,计算方法如下:

$$local_c = \frac{N_{best}}{N_{lp}} \quad (4)$$

其中, N_{best} 表示邻域种群中支配当前个体的个体数量, N_{lp} 表示邻域种群中的个体数。通过式(4)可以计算出该个体在局部小生境中的受支配情况。 $local_c$ 越大,说明个体在局部小生境中支配个体的比例越小; $local_c$ 越小,说明个体在局部小生境中的选择优先级越高, $local_c$ 越小越好。

结合以上筛选策略和补充策略,所提算法具有了很强的局部解保留能力,可以成功保留所有全局及局部帕累托最优区域的潜力解,从而为后续全局及局部帕累托解集的探索提供前提条件。

3.3 自适应局部搜索策略

为了使得算法在找到全局及局部的潜力区域后,能更好地对所在全局及局部最优区域进行开发,我们提出了一种自适应的局部搜索策略。

定义 5(R-邻域) 解 x 的 R-邻域 $N(x)$ 定义如下:

$$N(x) = \{y | \forall i \in (1, \dots, N_{var}), |x_i - y_i| < R_i\} \quad (5)$$

其中, N_{var} 是决策变量的维度, $|x_i - y_i|$ 是解 x 和解 y 第 i 个决策变量间的欧氏距离。

定义 6(直接密度可达) 对于每个解 $y \in N(x)$, 称解 y 是解 x 的直接密度可达点。

定义 7(密度可达) 对于一个解 y , 当且仅当存在具有 p 个解 s_1, s_2, \dots, s_p 的路径时, 称解 y 是解 x 的密度可达点。其中, 第一个解 s_1 是解 x , 相邻解为直接密度可达点, 最后一个解 s_p 是解 y 。 NCM 聚类^[36]将种群中的每个解的密度可达解收集, 形成多个局部种群。其半径的计算式如下:

$$R_i = \alpha \times (x_i^{\max} - x_i^{\min}), i = 1, 2, \dots, N_{var} \quad (6)$$

其中, x_i^{\max} 和 x_i^{\min} 分别代表种群在决策空间第 i 个变量上的最大值和最小值; N_{var} 是决策变量的个数; α 是一个常数, 本文中取值为 0.1。

算法 2 描述了 MMOCL 算法的自适应局部搜索策略。首先, 使用 NCM 聚类方法^[36]对所在全局及局部最优区域的潜力解进行聚类, 将种群划分为多个局部种群 (C_1, \dots, C_n), 每个局部种群代表一个簇。为了防止数量过小的局部种群对算法收敛性造成负面影响, 在每个局部种群中设置最小个体数 (δ)。特别地, 当局部种群中解的数量小于最小个体数 (δ) 时, 选择当前个体在决策空间中所有邻域种群的个体作为父代, 使用 DE/potential/1 策略生成子代个体; 当局部种群中解的数量大于或等于最小解数时, 选择当前局部种群中目标空间邻域的个体作为父代, 使用 DE/local/1 策略生成子代个体。本文采用的局部种群最小解数为 5。

DE/potential/1:

$$v_i = x_{potential} + F((x_{r2} - x_{r3}) + (x_{r1} - x_{r5})) \quad (7)$$

其中, $x_{potential}$ 表示当前局部种群中个体在决策空间拥挤距离最大的个体, 用于引导其向潜力区域进行更深入的探索。

DE/local/1:

$$v_i = x_{local} + F((x_{r2} - x_{r3}) + (x_{r4} - x_{r5})) \quad (8)$$

其中, x_{local} 表示当前局部种群中个体在目标空间拥挤距离最大的个体, 用于引导个体对局部最优区域进行深入开发。

算法 2 自适应局部搜索机制

输入: 局部种群 ($C_1 \dots C_n$), 局部种群最小个体数 δ

输出:子代种群 off_pop

```

1. for i=1:n
2.   if size(Ci,1) < delta
3.     在整个种群中选择决策空间邻域的个体作为父代个体;
4.     生成子代个体:DE/potential/1;
5.   else
6.     在当前局部种群中选择目标空间邻域的个体作为父代个体;
7.     生成子代个体 DE/local/1;
8.   end if
9. end for
10. 输出子代种群 off_pop.

```

具体来说,当局部种群中个体的数量小于种群最小个体(δ)时,算法选择 DE/potential/1 生成子代个体。根据当前个体与整个种群中所有个体在决策空间中的欧氏距离,选择满足种群阈值数量的个体作为邻域个体。然后,从邻域个体中随机选择 5 个个体作为父代个体,选择决策空间中拥挤距离最大的一个个体作为 $x_{\text{potential}}$,其他 4 个个体分别作为 x_2 , x_3 , x_4 和 x_5 。

当局部种群中个体的数量大于局部种群最小解数时,算法选择 DE/local/1 生成子代个体,根据当前个体与所属局部种群中所有个体在目标空间中的欧氏距离,选择满足种群阈值数量的个体作为邻域个体。然后,从邻域个体中随机选择 5 个个体作为父代个体,选择目标空间中拥挤距离最大的一个个体作为 x_{local} ,其他 4 个个体分别作为 x_2 , x_3 , x_4 和 x_5 。

4 实验结果及分析

4.1 实验设置

为了分别评估 MMOCL 在求解具有全局帕累托解集的 MMOPs 和同时含全局及局部帕累托解集的 MMOPs 时的性能和有效性,选择了 CEC2020 多模态多目标测试集^[37-39]对算法进行测试。该测试集同时包含具有全局帕累托解集特性的 MMOPs 和具有全局及局部帕累托解集共存特性的 MMOPs,还包含不同求解难点和不同特性的

多模态多目标测试问题。

本文选择了 5 个对比算法进行实验,分别是 MO_Ring_PSO_SCD^[28], MMOGA^[34], HREA^[35], TriMOEATAR^[40] 和 MMODE_ICD^[41]。其中,MO_Ring_PSO_SCD, TriMOEATAR 和 MMODE_ICD 是经典的用于解决具有全局帕累托解集的 MMOPs 的多模态多目标优化算法;HREA 和 MMOGA 中设置了局部解的保留机制,可以用来解决含局部帕累托解集的 MMOPs。

公平起见,所有算法的种群规模设置为 $100 * N_{\text{var}}$,最大计算资源设置为 $5000 * N_{\text{var}}$,其中 N_{var} 表示测试问题中决策变量的个数。每个算法独立运行 31 次。4 个对比算法中的具体参数与原文献相同。使用 IGD^[42-44] 和 IGDX^[45-46] 来对算法在决策空间和目标空间中的性能进行评估,其中 IGD 可以反映算法在目标空间中找到的帕累托前沿与真实 PF 的接近程度,IGD 值越小说明算法在目标空间中的表现越好;IGDX 可以反映算法在决策空间中找到的帕累托解集分布的多样性和收敛性,IGDX 值越小,说明算法在决策空间中的表现越好。使用 Wilcoxon 秩和检验来比较不同算法和 MMOCL 在测试问题上的性能差异大小,其中“+”表示算法性能显著优于对比算法,“-”表示算法性能显著差于对比算法,“=”表示算法与对比算法的性能不存在显著性差异。

4.2 与传统多模态多目标优化算法的性能对比

为了验证 MMOCL 在具有全局帕累托解集的 MMOPs 中的有效性,选择了测试问题集中的 15 个只具有全局帕累托解集的测试问题与 MO_Ring_PSO_SCD, TriMOEATAR, MMODE_ICD 和 MMOGA 进行横向对比。表 1 和表 2 中分别列出了 MMOCL 与 4 种算法在 IGDX 和 IGD 上的对比结果。可以看出,MMOCL 在目标空间和决策空间中都表现出了优秀的性能,在绝大部分问题中都取得了最优的 IGD 及 IGDX 值,说明 MMOCL 在求解具有全局帕累托解集的 MMOPs 时具有良好的搜索全局帕累托解集的能力,同时在目标空间中也能找到收敛性和分布性良好的帕累托前沿。

表 1 MMOCL 和对比算法在全局问题中的 IGDX 结果

Table 1 IGDX results of MMOCL and comparison algorithms in global problems

Problem	MO_Ring_PSO_SCD	TriMOEATAR	MMODE_ICD	MMOGA	MMOCL
MMF1	$6.59 \times 10^{-2} \pm$	$6.94 \times 10^{-2} \pm$	$5.81 \times 10^{-2} \pm$	$1.07 \times 10^{-1} \pm$	$5.11 \times 10^{-2} \pm$
	$6.90 \times 10^{-3} (+)$	$8.93 \times 10^{-3} (+)$	$5.36 \times 10^{-3} (+)$	$1.60 \times 10^{-2} (+)$	3.32×10^{-3}
MMF2	$8.64 \times 10^{-2} \pm$	$6.80 \times 10^{-2} \pm$	$2.20 \times 10^{-2} \pm$	$1.47 \times 10^{-1} \pm$	$6.43 \times 10^{-2} \pm$
	$2.73 \times 10^{-2} (+)$	$3.11 \times 10^{-2} (=)$	$3.59 \times 10^{-3} (-)$	$5.51 \times 10^{-2} (+)$	1.68×10^{-2}
MMF4	$4.14 \times 10^{-2} \pm$	$1.08 \times 10^{-1} \pm$	$2.48 \times 10^{-2} \pm$	$6.66 \times 10^{-2} \pm$	$3.50 \times 10^{-2} \pm$
	$5.74 \times 10^{-3} (+)$	$1.55 \times 10^{-1} (=)$	$1.86 \times 10^{-3} (-)$	$8.92 \times 10^{-3} (+)$	3.46×10^{-3}
MMF5	$1.10 \times 10^{-1} \pm$	$1.13 \times 10^{-1} \pm$	$1.00 \times 10^{-1} \pm$	$1.87 \times 10^{-1} \pm$	$8.46 \times 10^{-2} \pm$
	$1.31 \times 10^{-2} (+)$	$1.37 \times 10^{-2} (+)$	$7.94 \times 10^{-3} (+)$	$2.32 \times 10^{-2} (+)$	4.15×10^{-3}
MMF7	$3.66 \times 10^{-2} \pm$	$4.13 \times 10^{-2} \pm$	$2.47 \times 10^{-2} \pm$	$5.52 \times 10^{-2} \pm$	$3.14 \times 10^{-2} \pm$
	$5.96 \times 10^{-3} (+)$	$1.95 \times 10^{-2} (+)$	$3.38 \times 10^{-3} (-)$	$7.72 \times 10^{-3} (+)$	3.98×10^{-3}
MMF8	$1.05 \times 10^{-1} \pm$	$3.18 \times 10^{-1} \pm$	$1.29 \times 10^{-1} \pm$	$4.66 \times 10^{-1} \pm$	$9.33 \times 10^{-2} \pm$
	$3.31 \times 10^{-2} (=)$	$1.03 \times 10^{-1} (+)$	$2.85 \times 10^{-2} (+)$	$1.61 \times 10^{-1} (+)$	1.63×10^{-2}
MMF10	$1.42 \times 10^{-1} \pm$	$1.57 \times 10^{-1} \pm$	$1.70 \times 10^{-1} \pm$	$1.38 \times 10^{-1} \pm$	$5.03 \times 10^{-2} \pm$
	$2.62 \times 10^{-2} (+)$	$3.15 \times 10^{-2} (+)$	$3.40 \times 10^{-2} (+)$	$1.27 \times 10^{-2} (+)$	6.78×10^{-2}
MMF11	$1.79 \times 10^{-1} \pm$	$1.96 \times 10^{-1} \pm$	$2.52 \times 10^{-1} \pm$	$2.48 \times 10^{-1} \pm$	$6.07 \times 10^{-3} \pm$
	$4.15 \times 10^{-2} (+)$	$3.94 \times 10^{-2} (+)$	$1.28 \times 10^{-4} (+)$	$1.12 \times 10^{-3} (+)$	3.50×10^{-4}
MMF12	$9.19 \times 10^{-2} \pm$	$1.14 \times 10^{-1} \pm$	$2.47 \times 10^{-1} \pm$	$2.56 \times 10^{-1} \pm$	$3.56 \times 10^{-3} \pm$
	$6.59 \times 10^{-2} (+)$	$7.85 \times 10^{-2} (+)$	$1.17 \times 10^{-4} (+)$	$3.03 \times 10^{-2} (+)$	2.38×10^{-4}
MMF13	$1.26 \times 10^{-1} \pm$	$1.46 \times 10^{-1} \pm$	$4.20 \times 10^{-1} \pm$	$4.17 \times 10^{-1} \pm$	$9.09 \times 10^{-2} \pm$
	$6.80 \times 10^{-2} (+)$	$7.22 \times 10^{-2} (+)$	$9.47 \times 10^{-4} (+)$	$9.01 \times 10^{-4} (+)$	9.17×10^{-3}

(续表)					
Problem	MO_Ring_PSO_SCD	TriMOEATAR	MMODE_ICD	MMOGA	MMOCL
MMF14	$6.15 \times 10^{-2} \pm$	$3.70 \times 10^{-2} \pm$	$4.27 \times 10^{-2} \pm$	$7.24 \times 10^{-2} \pm$	$5.26 \times 10^{-2} \pm$
	$2.81 \times 10^{-3} (+)$	$6.62 \times 10^{-4} (-)$	$8.70 \times 10^{-4} (-)$	$2.82 \times 10^{-3} (+)$	1.41×10^{-3}
MMF15	$1.54 \times 10^{-1} \pm$	$2.18 \times 10^{-1} \pm$	$2.66 \times 10^{-1} \pm$	$2.60 \times 10^{-1} \pm$	$5.53 \times 10^{-2} \pm$
	$2.92 \times 10^{-2} (+)$	$3.70 \times 10^{-2} (+)$	$8.31 \times 10^{-4} (+)$	$9.38 \times 10^{-3} (+)$	1.17×10^{-3}
MMF14_a	$6.93 \times 10^{-2} \pm$	$5.50 \times 10^{-2} \pm$	$6.01 \times 10^{-2} \pm$	$8.00 \times 10^{-2} \pm$	$9.11 \times 10^{-2} \pm$
	$3.36 \times 10^{-3} (-)$	$1.20 \times 10^{-3} (-)$	$1.61 \times 10^{-3} (-)$	$4.22 \times 10^{-3} (-)$	4.96×10^{-3}
MMF15_a	$1.56 \times 10^{-1} \pm$	$1.80 \times 10^{-1} \pm$	$2.15 \times 10^{-1} \pm$	$2.17 \times 10^{-1} \pm$	$9.52 \times 10^{-2} \pm$
	$1.96 \times 10^{-2} (+)$	$2.78 \times 10^{-2} (+)$	$1.69 \times 10^{-3} (+)$	$4.39 \times 10^{-3} (+)$	5.74×10^{-3}
SYM_PART_simple	$2.26 \times 10^{-1} \pm$	$2.26 \times 10^{-2} \pm$	$4.79 \times 10^{-2} \pm$	$3.77 \times 10^0 \pm$	$1.57 \times 10^{-1} \pm$
	$2.15 \times 10^{-1} (+)$	$4.63 \times 10^{-3} (-)$	$4.47 \times 10^{-3} (-)$	$1.41 \times 10^{-0} (+)$	9.87×10^{-2}
+/-/=	13/1/1	10/3/2	9/6/0	14/1/0	

表2 MMOCL和对比较算法在全局问题中的IGD结果

Table 2 IGD results of MMOCL and comparison algorithms in global problems

Problem	MO_Ring_PSO_SCD	TriMOEATAR	MMODE_ICD	MMOGA	MMOCL
MMF1	$4.58 \times 10^{-3} \pm$	$4.69 \times 10^{-3} \pm$	$3.46 \times 10^{-3} \pm$	$1.06 \times 10^{-2} \pm$	$3.32 \times 10^{-3} \pm$
	$4.25 \times 10^{-4} (+)$	$1.03 \times 10^{-3} (+)$	$4.18 \times 10^{-4} (=)$	$1.59 \times 10^{-3} (+)$	1.83×10^{-4}
MMF2	$4.79 \times 10^{-2} \pm$	$2.44 \times 10^{-2} \pm$	$1.29 \times 10^{-2} \pm$	$7.02 \times 10^{-2} \pm$	$4.16 \times 10^{-2} \pm$
	$1.90 \times 10^{-2} (=)$	$1.34 \times 10^{-2} (-)$	$1.97 \times 10^{-3} (-)$	$3.44 \times 10^{-2} (+)$	1.04×10^{-2}
MMF4	$3.72 \times 10^{-3} \pm$	$3.81 \times 10^{-2} \pm$	$2.54 \times 10^{-3} \pm$	$9.68 \times 10^{-3} \pm$	$3.88 \times 10^{-3} \pm$
	$2.01 \times 10^{-4} (-)$	$7.24 \times 10^{-2} (+)$	$1.35 \times 10^{-4} (-)$	$9.15 \times 10^{+}$	2.91×10^{-4}
MMF5	$3.93 \times 10^{-3} \pm$	$4.65 \times 10^{-3} \pm$	$3.27 \times 10^{-3} \pm$	$1.28 \times 10^{-2} \pm$	$4.04 \times 10^{-3} \pm$
	$2.52 \times 10^{-4} (=)$	$2.32 \times 10^{-3} (0)$	$1.44 \times 10^{-4} (-)$	$2.22 \times 10^{-3} (+)$	2.73×10^{-4}
MMF7	$3.66 \times 10^{-3} \pm$	$3.94 \times 10^{-3} \pm$	$2.57 \times 10^{-3} \pm$	$7.32 \times 10^{-3} \pm$	$3.22 \times 10^{-3} \pm$
	$2.25 \times 10^{-4} (+)$	$1.20 \times 10^{-3} (+)$	$1.40 \times 10^{-4} (-)$	$1.05 \times 10^{-3} (+)$	2.22×10^{-4}
MMF8	$4.77 \times 10^{-3} \pm$	$5.00 \times 10^{-3} \pm$	$2.74 \times 10^{-3} \pm$	$1.34 \times 10^{-2} \pm$	$3.89 \times 10^{-3} \pm$
	$3.81 \times 10^{-4} (+)$	$6.27 \times 10^{-3} (+)$	$1.84 \times 10^{-4} (-)$	$3.67 \times 10^{-3} (+)$	5.79×10^{-4}
MMF10	$1.52 \times 10^{-1} \pm$	$1.85 \times 10^{-1} \pm$	$1.86 \times 10^{-1} \pm$	$1.92 \times 10^{-1} \pm$	$6.31 \times 10^{-2} \pm$
	$2.30 \times 10^{-2} (+)$	$2.97 \times 10^{-2} (+)$	$2.28 \times 10^{-2} (+)$	$4.39 \times 10^{-2} (+)$	5.49×10^{-2}
MMF11	$6.97 \times 10^{-2} \pm$	$1.41 \times 10^{-1} \pm$	$9.66 \times 10^{-2} \pm$	$1.17 \times 10^{-1} \pm$	$2.73 \times 10^{-2} \pm$
	$1.12 \times 10^{-2} (+)$	$1.66 \times 10^{-2} (+)$	$1.12 \times 10^{-3} (+)$	$3.86 \times 10^{-3} (+)$	2.29×10^{-3}
MMF12	$3.76 \times 10^{-2} \pm$	$4.20 \times 10^{-2} \pm$	$8.42 \times 10^{-2} \pm$	$1.82 \times 10^{-1} \pm$	$4.25 \times 10^{-3} \pm$
	$2.01 \times 10^{-2} (+)$	$2.57 \times 10^{-2} (+)$	$9.47 \times 10^{-4} (+)$	$3.48 \times 10^{-2} (+)$	5.77×10^{-4}
MMF13	$5.00 \times 10^{-2} \pm$	$1.72 \times 10^{-1} \pm$	$1.70 \times 10^{-1} \pm$	$1.80 \times 10^{-1} \pm$	$3.62 \times 10^{-2} \pm$
	$2.85 \times 10^{-2} (+)$	$4.02 \times 10^{-2} (+)$	$6.04 \times 10^{-3} (+)$	$5.62 \times 10^{-3} (+)$	2.45×10^{-3}
MMF14	$8.25 \times 10^{-2} \pm$	$8.73 \times 10^{-2} \pm$	$7.03 \times 10^{-2} \pm$	$1.22 \times 10^{-1} \pm$	$7.73 \times 10^{-2} \pm$
	$2.33 \times 10^{-3} (+)$	$1.35 \times 10^{-3} (+)$	$1.71 \times 10^{-3} (-)$	$5.79 \times 10^{-3} (+)$	1.93×10^{-3}
MMF15	$1.56 \times 10^{-1} \pm$	$1.80 \times 10^{-1} \pm$	$1.94 \times 10^{-1} \pm$	$2.07 \times 10^{-1} \pm$	$1.09 \times 10^{-1} \pm$
	$1.49 \times 10^{-2} (+)$	$1.88 \times 10^{-2} (+)$	$9.99 \times 10^{-4} (+)$	$3.58 \times 10^{-3} (+)$	1.94×10^{-3}
MMF14_a	$8.09 \times 10^{-2} \pm$	$7.82 \times 10^{-2} \pm$	$7.32 \times 10^{-2} \pm$	$1.09 \times 10^{-1} \pm$	$9.40 \times 10^{-2} \pm$
	$1.91 \times 10^{-3} (-)$	$1.39 \times 10^{-3} (-)$	$1.98 \times 10^{-3} (-)$	$4.06 \times 10^{-3} (+)$	2.19×10^{-3}
MMF15_a	$1.57 \times 10^{-1} \pm$	$1.70 \times 10^{-1} \pm$	$1.86 \times 10^{-1} \pm$	$2.08 \times 10^{-1} \pm$	$1.45 \times 10^{-1} \pm$
	$1.40 \times 10^{-2} (+)$	$1.78 \times 10^{-2} (+)$	$4.03 \times 10^{-3} (+)$	$3.97 \times 10^{-3} (+)$	4.60×10^{-3}
SYM_PART_simple	$3.52 \times 10^{-2} \pm$	$3.10 \times 10^{-2} \pm$	$1.28 \times 10^{-2} \pm$	$1.28 \times 10^{-2} \pm$	$1.15 \times 10^{-2} \pm$
	$3.56 \times 10^{-3} (+)$	$2.79 \times 10^{-3} (+)$	$5.88 \times 10^{-4} (+)$	$2.73 \times 10^{-2} (+)$	5.81×10^{-4}
+/-/=	11/2/2	12/2/1	7/7/1	15/0/0	

综上所述可以看出,本文所提算法有能力求解传统的只具有全局帕累托解集的多模态多目标测试问题。

4.3 考虑局部最优算法性能对比

为了验证算法求解含局部帕累托解集的MMOPs时的有效性和优越性,在局部问题的测试实验中,加入了两个含局部解保留策略的多模态多目标优化算法HREA和MMOGA,并与其他传统的多模态多目标优化算法进行了横向对比。IGDX值和IGD值的对比结果如表3和表4所列。

表3中,MMOCL在筛选局部中心解时尽可能多地保留了搜索范围内的最优区域,因此在大部分问题中都取得了更好的IGDX值。MMOCL虽然在MMF10_1中没有取得最好的IGDX值,但是与HREA取得的结果也没有显著性差异。其中,MO_Ring_PSO_SCD和TriMOEA-TAR在局部测试问题上表现不佳,这是因为它们缺少局部最优解的搜索和保留策略,所以无法找到更多的局部帕累托解集。

表3 MMOCL和对比较算法在局部问题中的IGDX结果

Table 3 IGDX results of MMOCL and comparison algorithms in local problems

Problem	MO_Ring_PSO_SCD	TriMOEATAR	HREA	MMOGA	MMOCL
MMF10_1	$1.74 \times 10^{-1} \pm$	$2.01 \times 10^{-1} \pm$	$8.08 \times 10^{-3} \pm$	$7.65 \times 10^{-2} \pm$	$4.47 \times 10^{-2} \pm$
	$9.25 \times 10^{-3} (+)$	$6.78 \times 10^{-5} (+)$	$7.57 \times 10^{-4} (=)$	$3.21 \times 10^{-2} (+)$	6.48×10^{-2}
MMF11_1	$2.27 \times 10^{-1} \pm$	$2.52 \times 10^{-1} \pm$	$8.78 \times 10^{-3} \pm$	$1.50 \times 10^{-2} \pm$	$5.47 \times 10^{-3} \pm$
	$2.44 \times 10^{-2} (+)$	$9.83 \times 10^{-5} (+)$	$2.50 \times 10^{-3} (+)$	$2.06 \times 10^{-3} (+)$	3.84×10^{-4}
MMF12_1	$2.04 \times 10^{-1} \pm$	$2.48 \times 10^{-1} \pm$	$4.05 \times 10^{-3} \pm$	$5.27 \times 10^{-2} \pm$	$3.70 \times 10^{-3} \pm$
	$3.72 \times 10^{-2} (+)$	$5.69 \times 10^{-2} (+)$	$5.73 \times 10^{-4} (+)$	$2.06 \times 10^{-2} (+)$	1.32×10^{-4}
MMF13_1	$3.50 \times 10^{-1} \pm$	$3.82 \times 10^{-1} \pm$	$8.11 \times 10^{-2} \pm$	$1.71 \times 10^{-1} \pm$	$7.93 \times 10^{-2} \pm$
	$7.48 \times 10^{-2} (+)$	$7.55 \times 10^{-2} (+)$	$3.60 \times 10^{-2} (=)$	$1.36 \times 10^{-2} (+)$	5.56×10^{-3}

(续表)

Problem	MO_Ring_PSO_SCD	TriMOEATAR	MMODE_ICD	MMOGA	MMOCL
MMF15_l	$2.12 \times 10^{-1} \pm$	$3.00 \times 10^{-1} \pm$	$7.14 \times 10^{-2} \pm$	$1.49 \times 10^{-1} \pm$	$5.13 \times 10^{-2} \pm$
	$3.72 \times 10^{-2} (+)$	$4.30 \times 10^{-2} (+)$	$2.89 \times 10^{-2} (+)$	$1.33 \times 10^{-2} (+)$	1.62×10^{-3}
MMF15_a_l	$2.34 \times 10^{-1} \pm$	$3.16 \times 10^{-1} \pm$	$9.13 \times 10^{-2} \pm$	$2.00 \times 10^{-1} \pm$	$7.65 \times 10^{-2} \pm$
	$3.72 \times 10^{-2} (+)$	$6.74 \times 10^{-2} (+)$	$2.69 \times 10^{-2} (+)$	$1.48 \times 10^{-2} (+)$	3.43×10^{-3}
MMF16_l1	$2.45 \times 10^{-1} \pm$	$3.82 \times 10^{-1} \pm$	$5.36 \times 10^{-2} \pm$	$1.55 \times 10^{-1} \pm$	$7.41 \times 10^{-2} \pm$
	$3.72 \times 10^{-2} (+)$	$3.86 \times 10^{-2} (+)$	$3.01 \times 10^{-3} (-)$	$9.25 \times 10^{-3} (+)$	3.91×10^{-3}
MMF16_l2	$2.45 \times 10^{-1} \pm$	$3.00 \times 10^{-1} \pm$	$6.41 \times 10^{-2} \pm$	$2.16 \times 10^{-1} \pm$	$1.23 \times 10^{-1} \pm$
	$3.72 \times 10^{-2} (+)$	$6.74 \times 10^{-2} (+)$	$3.88 \times 10^{-3} (-)$	$3.08 \times 10^{-2} (+)$	1.28×10^{-2}
MMF16_l3	$1.79 \times 10^{-1} \pm$	$2.07 \times 10^{-1} \pm$	$6.11 \times 10^{-2} \pm$	$2.00 \times 10^{-1} \pm$	$1.27 \times 10^{-1} \pm$
	$1.21 \times 10^{-2} (+)$	$3.19 \times 10^{-2} (+)$	$2.02 \times 10^{-3} (-)$	$1.68 \times 10^{-2} (+)$	1.39×10^{-2}
+/-/=	9/0/0	9/0/0	4/3/2	9/0/0	

表 4 MMOCL 和对比较算法在局部问题中的 IGD 结果

Table 4 IGD results of MMOCL and comparison algorithms in local problems

Problem	MO_Ring_PSO_SCD	TriMOEATAR	HREA	MMOGA	MMOCL
MMF10_l	$1.74 \times 10^{-1} \pm$	$2.28 \times 10^{-1} \pm$	$2.61 \times 10^{-2} \pm$	$1.30 \times 10^{-1} \pm$	$5.49 \times 10^{-2} \pm$
	$1.28 \times 10^{-2} (+)$	$3.98 \times 10^{-3} (+)$	$3.56 \times 10^{-3} (=)$	$3.51 \times 10^{-2} (+)$	5.41×10^{-2}
MMF11_l	$8.55 \times 10^{-2} \pm$	$1.63 \times 10^{-1} \pm$	$3.38 \times 10^{-2} \pm$	$4.94 \times 10^{-2} \pm$	$2.46 \times 10^{-2} \pm$
	$6.65 \times 10^{-3} (+)$	$7.01 \times 10^{-3} (+)$	$8.19 \times 10^{-3} (+)$	$9.52 \times 10^{-3} (+)$	4.43×10^{-3}
MMF12_l	$7.52 \times 10^{-2} \pm$	$8.64 \times 10^{-2} \pm$	$8.22 \times 10^{-3} \pm$	$9.39 \times 10^{-2} \pm$	$4.67 \times 10^{-3} \pm$
	$1.58 \times 10^{-2} (+)$	$1.78 \times 10^{-3} (+)$	$1.67 \times 10^{-3} (+)$	$2.45 \times 10^{-2} (+)$	5.48×10^{-4}
MMF13_l	$1.22 \times 10^{-1} \pm$	$2.66 \times 10^{-1} \pm$	$3.95 \times 10^{-2} \pm$	$8.52 \times 10^{-2} \pm$	$3.61 \times 10^{-2} \pm$
	$2.06 \times 10^{-2} (+)$	$2.11 \times 10^{-2} (+)$	$9.26 \times 10^{-3} (+)$	$8.04 \times 10^{-3} (+)$	2.97×10^{-3}
MMF15_l	$1.78 \times 10^{-1} \pm$	$2.06 \times 10^{-1} \pm$	$1.25 \times 10^{-1} \pm$	$2.03 \times 10^{-1} \pm$	$1.00 \times 10^{-1} \pm$
	$3.58 \times 10^{-3} (+)$	$6.46 \times 10^{-4} (+)$	$9.92 \times 10^{-3} (+)$	$5.13 \times 10^{-3} (+)$	4.72×10^{-3}
MMF15_a_l	$1.78 \times 10^{-1} \pm$	$2.03 \times 10^{-1} \pm$	$1.25 \times 10^{-1} \pm$	$2.07 \times 10^{-1} \pm$	$1.18 \times 10^{-1} \pm$
	$3.69 \times 10^{-3} (+)$	$5.71 \times 10^{-3} (+)$	$8.04 \times 10^{-3} (+)$	$3.70 \times 10^{-3} (+)$	4.56×10^{-3}
MMF16_l1	$1.51 \times 10^{-1} \pm$	$1.72 \times 10^{-1} \pm$	$1.10 \times 10^{-1} \pm$	$1.79 \times 10^{-1} \pm$	$1.03 \times 10^{-1} \pm$
	$2.64 \times 10^{-3} (+)$	$8.88 \times 10^{-4} (+)$	$7.36 \times 10^{-3} (+)$	$5.27 \times 10^{-3} (+)$	6.77×10^{-3}
MMF16_l2	$2.18 \times 10^{-1} \pm$	$2.61 \times 10^{-1} \pm$	$1.47 \times 10^{-1} \pm$	$2.45 \times 10^{-1} \pm$	$1.57 \times 10^{-1} \pm$
	$3.54 \times 10^{-3} (+)$	$6.14 \times 10^{-4} (+)$	$6.75 \times 10^{-3} (-)$	$7.75 \times 10^{-3} (+)$	1.08×10^{-2}
MMF16_l3	$1.84 \times 10^{-1} \pm$	$2.17 \times 10^{-1} \pm$	$1.31 \times 10^{-1} \pm$	$2.16 \times 10^{-1} \pm$	$1.52 \times 10^{-1} \pm$
	$3.21 \times 10^{-3} (+)$	$8.48 \times 10^{-4} (+)$	$2.81 \times 10^{-3} (-)$	$3.93 \times 10^{-3} (+)$	1.41×10^{-2}
+/-/=	9/0/0	9/0/0	6/2/1	9/0/0	

从表 4 中可以看到,在所有的 9 个同时含全局及局部帕累托解集的问题中,MMOCL 在 MMF10_l, MMF11_l, MMF12_l, MMF13_l, MMF15_l, MMF15_a_l 和 MMF16_l 上都获得了最优的 IGD 值。MMOCL 在定位到最优区域后,能结合该区域目前的探索信息,选择更合适的策略对其进行下一步

的开发,因此该算法在目标空间中也表现出了较好的性能。

为了更直观地展示 MMOCL 及不同类型算法在求解局部问题时的性能情况,图 4 和图 5 给出了在 MMF12_l 问题中 MMOCL, MO_Ring_PSO_SCD 和 MMOGA 求得帕累托解集在决策空间和目标空间中的分布情况。

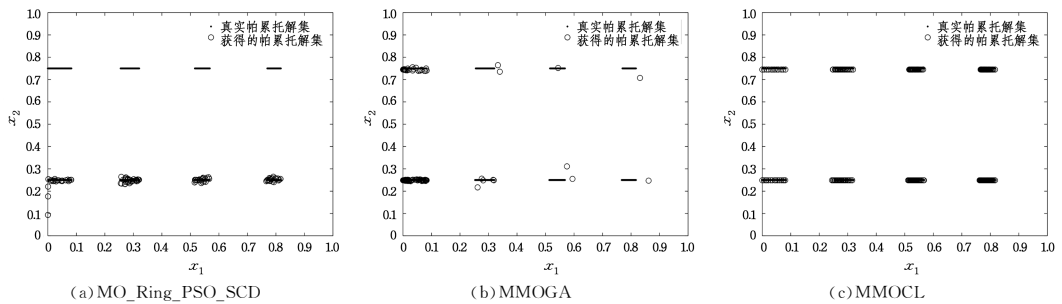


图 4 MMOCL 与对比较算法在 MMF12_l 上的种群分布

Fig. 4 Population distribution of MMOCL and the comparative algorithm on MMF12_l

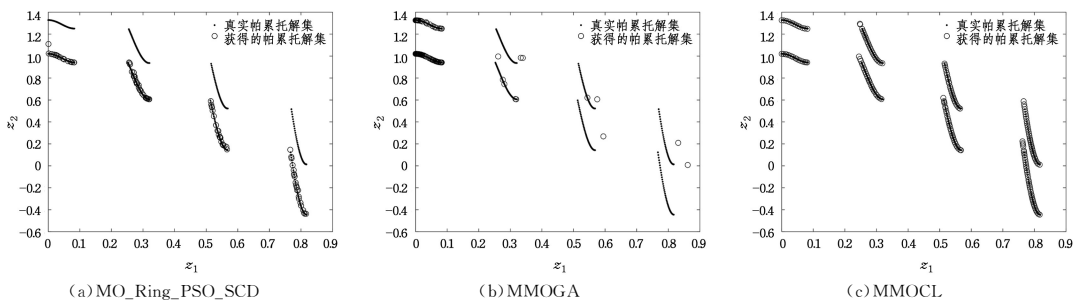


图 5 MMOCL 与对比较算法在 MMF12_l 上的帕累托前沿分布

Fig. 5 Pareto front distribution of MMOCL algorithm and the comparative algorithm on MMF12_l

MMF12_1中的全局和局部帕累托解集具有分段连续的特点,在求解时对算法的多样性提出了更高的要求。从图4(b)中可以看到,MMOGA在MMF12_1上只找到了全局及局部帕累托解集中的一部分,在其他位置解的分布非常少,说明该算法在搜索时不能很好地兼顾多样性,容易陷入部分最优区域;在图4(a)中,MO_Ring_PSO_SCD可以找到全局最优解集,但是没有能力同时保留有价值的局部最优解集;从图4(c)中可以看到,MMOCL获得的种群覆盖到了更多的全局及局部最优区域,并且在图5(c)中,也能够均匀地覆盖到更多真实的全局及局部帕累托前沿。图6和图7展示了各算法找到的解集在三维问题中的分布情况。MM15_1具有一个全局帕累托解集和一个局部帕累托解集,随着问题维度的升高,对最优区域的搜索难度加大。

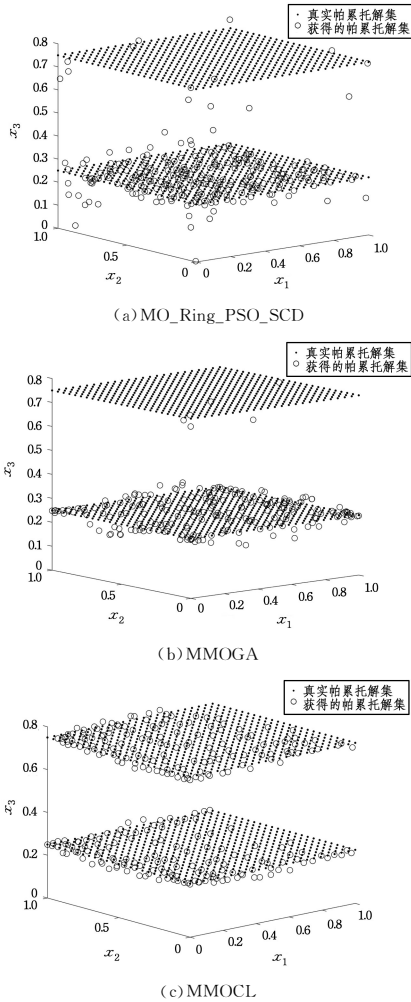


图6 MMOCL与对比算法在MMF15_1上的种群分布
Fig. 6 Population distribution of MMOCL algorithm and the comparative algorithm on MMF15_1

从图6中可以看到,在MMF15_1中,MO_Ring_PSO_SCD找到的解集开始更多地游离在全局最优区域之外,MMOGA也几乎不能再搜索到局部最优解,而MMOCL获得的解集可以更好地分布在真实的帕累托解集上,并且可以同时找到所有的全局和局部最优区域。

因此,综合MMOCL在CEC2020多模态多目标测试问题集上的表现可以得出,MMOCL既能够解决传统的只具有

多个全局帕累托解集的MMOPs,也能够解决同时具有全局及局部帕累托解集的MMOPs,它可以同时保留多个全局及局部帕累托解集,在不同问题中表现出了良好的性能。

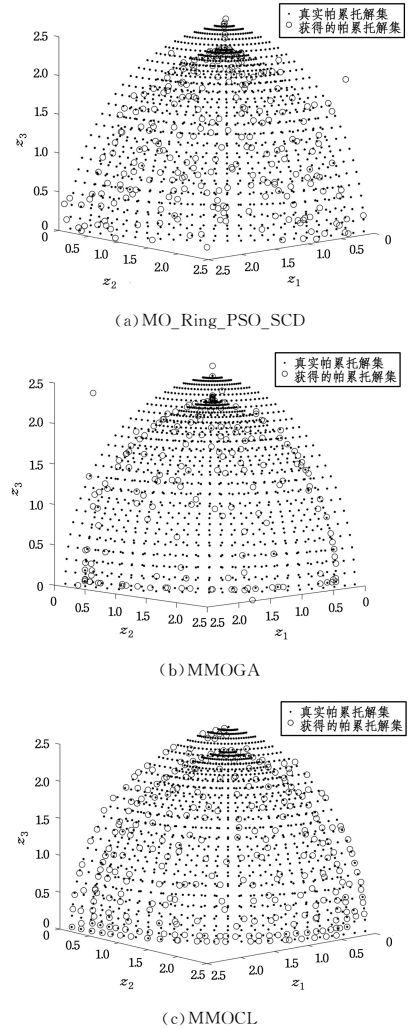


图7 MMOCL与对比算法在MMF15_1上的帕累托前沿分布
Fig. 7 Pareto front distribution of MMOCL algorithm and the comparative algorithm on MMF15_1

4.4 MMOCL参数敏感性分析

为研究影响小生境半径的参数对算法性能的影响,设置不同的 α 进行了对比实验。考虑到 α 的变化范围为0~1,在0~1内均匀选择了0.3,0.5,0.7,0.9与文中所使用的值0.1进行对比。根据式(5),参数 α 与小生境半径 R 是正相关的关系。较小的 α ,对应着较小的小生境半径,有利于对局部区域的探索,但不利于算法的收敛;较大的 α ,对应着较大的小生境半径,有利于算法的收敛,但可能导致局部帕累托最优解被全局帕累托解支配,从而不能保留局部帕累托最优解。图8和图9分别展示了选择不同 α 时,指标IGD和IGDX在测试问题上的平均秩排名。从图8可以看出, α 选择0.5时的IGDX指标平均秩排名与选择0.1时相似,但图9中 α 选择0.1的IGD指标平均秩排名却更优于选择0.5时的结果。综合两个指标的性能,本文算法选择 α 的值为0.1。表5和表6分别列出了 α 取0.3,0.5,0.7,0.9和0.1时,本文算法在测试问题上的IGDX和IGD指标的均值和标准差。

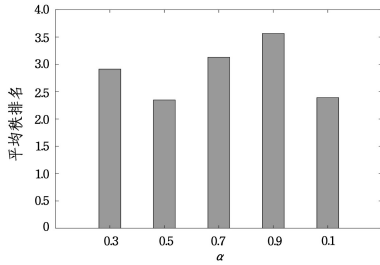


图 8 不同参数在测试问题上的 IGDX 指标平均秩排名

Fig. 8 Average ranks of IGDX indicators for different parameters on test problems

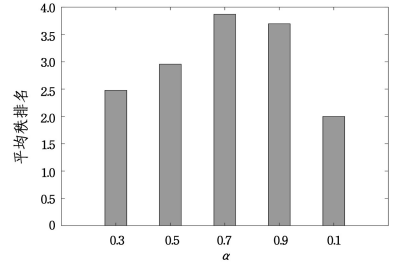


图 9 不同参数在测试问题上的 IGD 指标平均秩排名

Fig. 9 Average ranks of IGD indicators for different parameters on test problems

表 5 不同参数在测试问题上的 IGDX 结果

Table 5 IGDX results for different parameters on test problems

Problem	MMOCL_0.3	MMOCL_0.5	MMOCL_0.7	MMOCL_0.9	MMOCL_0.1
MMF1	$6.04 \times 10^{-2} \pm$	$6.10 \times 10^{-2} \pm$	$6.02 \times 10^{-2} \pm$	$6.04 \times 10^{-2} \pm$	$5.26 \times 10^{-2} \pm$
	$5.62 \times 10^{-3} (+)$	$2.89 \times 10^{-3} (+)$	$3.77 \times 10^{-3} (+)$	$3.98 \times 10^{-3} (+)$	4.42×10^{-3}
MMF2	$5.85 \times 10^{-2} \pm$	$6.09 \times 10^{-2} \pm$	$6.96 \times 10^{-2} \pm$	$6.30 \times 10^{-2} \pm$	$5.56 \times 10^{-2} \pm$
	$1.86 \times 10^{-2} (=)$	$9.86 \times 10^{-3} (=)$	$1.39 \times 10^{-2} (+)$	$1.51 \times 10^{-2} (=)$	6.68×10^{-3}
MMF4	$3.32 \times 10^{-2} \pm$	$3.43 \times 10^{-2} \pm$	$3.33 \times 10^{-2} \pm$	$3.23 \times 10^{-2} \pm$	$3.59 \times 10^{-2} \pm$
	$5.12 \times 10^{-3} (=)$	$3.65 \times 10^{-3} (=)$	$2.85 \times 10^{-3} (-)$	$3.35 \times 10^{-3} (-)$	3.21×10^{-3}
MMF5	$9.07 \times 10^{-2} \pm$	$8.66 \times 10^{-2} \pm$	$8.83 \times 10^{-2} \pm$	$9.02 \times 10^{-2} \pm$	$8.49 \times 10^{-2} \pm$
	$5.94 \times 10^{-3} (+)$	$4.38 \times 10^{-3} (=)$	$6.21 \times 10^{-3} (=)$	$5.09 \times 10^{-3} (+)$	3.85×10^{-3}
MMF7	$3.19 \times 10^{-2} \pm$	$3.03 \times 10^{-2} \pm$	$3.23 \times 10^{-2} \pm$	$3.38 \times 10^{-2} \pm$	$3.07 \times 10^{-2} \pm$
	$3.76 \times 10^{-3} (=)$	$2.73 \times 10^{-3} (=)$	$4.31 \times 10^{-3} (=)$	$5.91 \times 10^{-3} (=)$	5.46×10^{-3}
MMF8	$8.15 \times 10^{-2} \pm$	$8.14 \times 10^{-2} \pm$	$7.83 \times 10^{-2} \pm$	$8.49 \times 10^{-2} \pm$	$9.24 \times 10^{-2} \pm$
	$1.11 \times 10^{-2} (-)$	$8.16 \times 10^{-3} (-)$	$8.92 \times 10^{-3} (-)$	$8.57 \times 10^{-3} (=)$	1.43×10^{-2}
MMF10	$7.39 \times 10^{-2} \pm$	$1.19 \times 10^{-2} \pm$	$1.52 \times 10^{-2} \pm$	$2.76 \times 10^{-2} \pm$	$6.92 \times 10^{-2} \pm$
	$8.50 \times 10^{-2} (=)$	$9.40 \times 10^{-3} (-)$	$2.29 \times 10^{-2} (=)$	$5.79 \times 10^{-2} (=)$	7.34×10^{-2}
MMF11	$6.14 \times 10^{-3} \pm$	$7.45 \times 10^{-3} \pm$	$9.11 \times 10^{-3} \pm$	$9.01 \times 10^{-3} \pm$	$6.07 \times 10^{-3} \pm$
	$2.06 \times 10^{-4} (=)$	$1.15 \times 10^{-3} (+)$	$9.15 \times 10^{-4} (+)$	$1.16 \times 10^{-3} (+)$	4.32×10^{-4}
MMF12	$3.62 \times 10^{-3} \pm$	$3.67 \times 10^{-3} \pm$	$3.73 \times 10^{-3} \pm$	$4.13 \times 10^{-3} \pm$	$3.57 \times 10^{-3} \pm$
	$1.64 \times 10^{-4} (=)$	$2.18 \times 10^{-4} (=)$	$2.09 \times 10^{-4} (+)$	$6.85 \times 10^{-4} (+)$	1.12×10^{-4}
MMF13	$9.11 \times 10^{-2} \pm$	$9.64 \times 10^{-2} \pm$	$9.89 \times 10^{-2} \pm$	$1.01 \times 10^{-1} \pm$	$8.84 \times 10^{-2} \pm$
	$8.01 \times 10^{-3} (=)$	$6.29 \times 10^{-3} (=)$	$1.25 \times 10^{-2} (+)$	$1.35 \times 10^{-2} (+)$	8.58×10^{-3}
MMF14	$5.24 \times 10^{-2} \pm$	$5.14 \times 10^{-2} \pm$	$5.78 \times 10^{-2} \pm$	$5.81 \times 10^{-2} \pm$	$5.29 \times 10^{-2} \pm$
	$1.24 \times 10^{-3} (=)$	$1.13 \times 10^{-3} (-)$	$3.22 \times 10^{-3} (+)$	$2.73 \times 10^{-3} (+)$	1.02×10^{-3}
MMF15	$5.41 \times 10^{-2} \pm$	$5.47 \times 10^{-2} \pm$	$5.73 \times 10^{-2} \pm$	$5.85 \times 10^{-2} \pm$	$5.50 \times 10^{-2} \pm$
	$1.16 \times 10^{-3} (=)$	$1.22 \times 10^{-3} (=)$	$1.92 \times 10^{-3} (+)$	$1.34 \times 10^{-3} (+)$	1.17×10^{-3}
MMF14_a	$9.23 \times 10^{-2} \pm$	$9.11 \times 10^{-2} \pm$	$8.83 \times 10^{-2} \pm$	$9.10 \times 10^{-2} \pm$	$9.20 \times 10^{-2} \pm$
	$6.22 \times 10^{-3} (=)$	$5.02 \times 10^{-3} (=)$	$5.30 \times 10^{-3} (=)$	$4.23 \times 10^{-3} (=)$	6.05×10^{-3}
MMF15_a	$9.64 \times 10^{-2} \pm$	$9.33 \times 10^{-2} \pm$	$9.34 \times 10^{-2} \pm$	$9.60 \times 10^{-2} \pm$	$9.55 \times 10^{-2} \pm$
	$3.26 \times 10^{-3} (=)$	$4.59 \times 10^{-3} (=)$	$3.68 \times 10^{-3} (=)$	$3.68 \times 10^{-3} (=)$	6.19×10^{-3}
MMF10_1	$3.69 \times 10^{-2} \pm$	$2.08 \times 10^{-2} \pm$	$1.31 \times 10^{-2} \pm$	$3.49 \times 10^{-2} \pm$	$7.31 \times 10^{-2} \pm$
	$4.94 \times 10^{-2} (=)$	$3.39 \times 10^{-2} (=)$	$1.55 \times 10^{-2} (-)$	$5.99 \times 10^{-2} (=)$	7.82×10^{-2}
MMF11_1	$6.07 \times 10^{-3} \pm$	$7.35 \times 10^{-3} \pm$	$8.31 \times 10^{-3} \pm$	$8.62 \times 10^{-3} \pm$	$6.04 \times 10^{-3} \pm$
	$2.77 \times 10^{-4} (=)$	$7.66 \times 10^{-4} (+)$	$7.05 \times 10^{-4} (+)$	$1.24 \times 10^{-3} (+)$	4.53×10^{-4}
MMF12_1	$3.81 \times 10^{-3} \pm$	$3.70 \times 10^{-3} \pm$	$3.85 \times 10^{-3} \pm$	$3.59 \times 10^{-3} \pm$	$3.49 \times 10^{-3} \pm$
	$3.24 \times 10^{-4} (+)$	$1.63 \times 10^{-4} (+)$	$3.61 \times 10^{-4} (+)$	$2.10 \times 10^{-4} (=)$	7.42×10^{-5}
MMF13_1	$8.38 \times 10^{-2} \pm$	$8.26 \times 10^{-2} \pm$	$8.42 \times 10^{-2} \pm$	$8.62 \times 10^{-2} \pm$	$8.11 \times 10^{-2} \pm$
	$8.80 \times 10^{-3} (=)$	$5.38 \times 10^{-3} (=)$	$4.70 \times 10^{-3} (=)$	$4.40 \times 10^{-3} (+)$	5.82×10^{-3}
MMF15_1	$5.41 \times 10^{-2} \pm$	$5.41 \times 10^{-2} \pm$	$5.87 \times 10^{-2} \pm$	$5.83 \times 10^{-2} \pm$	$5.47 \times 10^{-2} \pm$
	$1.07 \times 10^{-3} (=)$	$1.27 \times 10^{-3} (=)$	$2.87 \times 10^{-3} (+)$	$2.20 \times 10^{-3} (+)$	8.03×10^{-4}
MMF15_a_1	$9.50 \times 10^{-2} \pm$	$9.79 \times 10^{-2} \pm$	$9.54 \times 10^{-2} \pm$	$9.31 \times 10^{-2} \pm$	$9.64 \times 10^{-2} \pm$
	$2.68 \times 10^{-3} (=)$	$5.19 \times 10^{-3} (=)$	$6.20 \times 10^{-3} (=)$	$3.84 \times 10^{-3} (=)$	5.36×10^{-3}
MMF16_11	$7.87 \times 10^{-2} \pm$	$7.68 \times 10^{-2} \pm$	$7.82 \times 10^{-2} \pm$	$7.91 \times 10^{-2} \pm$	$7.83 \times 10^{-2} \pm$
	$2.68 \times 10^{-3} (=)$	$4.72 \times 10^{-3} (=)$	$3.02 \times 10^{-3} (=)$	$4.19 \times 10^{-3} (=)$	3.72×10^{-3}
MMF16_12	$1.18 \times 10^{-1} \pm$	$1.15 \times 10^{-1} \pm$	$1.17 \times 10^{-1} \pm$	$1.15 \times 10^{-1} \pm$	$1.08 \times 10^{-1} \pm$
	$5.01 \times 10^{-3} (+)$	$9.98 \times 10^{-3} (=)$	$4.03 \times 10^{-3} (+)$	$1.12 \times 10^{-2} (=)$	1.53×10^{-2}
MMF16_13	$1.09 \times 10^{-1} \pm$	$1.10 \times 10^{-1} \pm$	$1.10 \times 10^{-1} \pm$	$1.09 \times 10^{-1} \pm$	$1.12 \times 10^{-1} \pm$
	$9.68 \times 10^{-3} (=)$	$3.71 \times 10^{-3} (=)$	$5.10 \times 10^{-3} (=)$	$3.10 \times 10^{-3} (=)$	7.20×10^{-3}
+/-/=	4/1/18	4/3/16	11/3/9	10/1/12	

表 6 不同参数在测试问题上的 IGD 结果

Table 6 IGD results for different parameters on test problems

Problem	MMOCL_0.3	MMOCL_0.5	MMOCL_0.7	MMOCL_0.9	MMOCL_0.1
MMF1	$4.22 \times 10^{-3} \pm$	$4.33 \times 10^{-3} \pm$	$4.30 \times 10^{-3} \pm$	$4.18 \times 10^{-3} \pm$	$3.33 \times 10^{-3} \pm$
	$4.74 \times 10^{-4} (+)$	$4.88 \times 10^{-4} (+)$	$5.49 \times 10^{-4} (+)$	$4.25 \times 10^{-4} (+)$	1.72×10^{-4}
MMF2	$3.59 \times 10^{-2} \pm$	$3.86 \times 10^{-2} \pm$	$4.08 \times 10^{-2} \pm$	$4.16 \times 10^{-2} \pm$	$3.65 \times 10^{-2} \pm$
	$9.34 \times 10^{-3} (=)$	$6.82 \times 10^{-3} (=)$	$1.03 \times 10^{-2} (=)$	$8.87 \times 10^{-3} (=)$	7.88×10^{-3}
MMF4	$4.39 \times 10^{-3} \pm$	$4.40 \times 10^{-3} \pm$	$4.40 \times 10^{-3} \pm$	$4.38 \times 10^{-3} \pm$	$3.88 \times 10^{-3} \pm$
	$3.14 \times 10^{-4} (+)$	$2.93 \times 10^{-4} (+)$	$2.19 \times 10^{-4} (+)$	$3.50 \times 10^{-4} (+)$	3.53×10^{-4}
MMF5	$4.77 \times 10^{-3} \pm$	$4.83 \times 10^{-3} \pm$	$4.99 \times 10^{-3} \pm$	$4.89 \times 10^{-3} \pm$	$4.01 \times 10^{-3} \pm$
	$3.82 \times 10^{-4} (+)$	$3.63 \times 10^{-4} (+)$	$4.21 \times 10^{-4} (+)$	$3.05 \times 10^{-4} (+)$	2.46×10^{-4}
MMF7	$3.55 \times 10^{-3} \pm$	$3.48 \times 10^{-3} \pm$	$3.38 \times 10^{-3} \pm$	$3.57 \times 10^{-3} \pm$	$3.28 \times 10^{-3} \pm$
	$4.35 \times 10^{-4} (=)$	$2.99 \times 10^{-4} (=)$	$2.87 \times 10^{-4} (=)$	$4.60 \times 10^{-4} (=)$	2.72×10^{-4}
MMF8	$5.01 \times 10^{-3} \pm$	$5.49 \times 10^{-3} \pm$	$5.19 \times 10^{-3} \pm$	$4.85 \times 10^{-3} \pm$	$4.16 \times 10^{-3} \pm$
	$7.00 \times 10^{-4} (+)$	$1.09 \times 10^{-2} (+)$	$8.71 \times 10^{-4} (+)$	$6.64 \times 10^{-4} (+)$	7.63×10^{-4}
MMF10	$7.89 \times 10^{-2} \pm$	$2.85 \times 10^{-2} \pm$	$2.94 \times 10^{-2} \pm$	$3.60 \times 10^{-2} \pm$	$8.02 \times 10^{-2} \pm$
	$6.09 \times 10^{-2} (=)$	$1.27 \times 10^{-2} (-)$	$2.13 \times 10^{-2} (-)$	$4.14 \times 10^{-2} (=)$	5.66×10^{-2}
MMF11	$2.83 \times 10^{-2} \pm$	$2.90 \times 10^{-2} \pm$	$3.06 \times 10^{-2} \pm$	$2.99 \times 10^{-2} \pm$	$2.71 \times 10^{-2} \pm$
	$8.52 \times 10^{-4} (=)$	$2.37 \times 10^{-3} (=)$	$2.03 \times 10^{-3} (+)$	$2.47 \times 10^{-3} (+)$	2.86×10^{-3}
MMF12	$4.62 \times 10^{-3} \pm$	$4.51 \times 10^{-3} \pm$	$4.60 \times 10^{-3} \pm$	$5.46 \times 10^{-3} \pm$	$4.45 \times 10^{-3} \pm$
	$4.75 \times 10^{-4} (=)$	$7.74 \times 10^{-4} (=)$	$7.63 \times 10^{-4} (=)$	$1.62 \times 10^{-3} (=)$	4.49×10^{-4}
MMF13	$3.59 \times 10^{-2} \pm$	$3.79 \times 10^{-2} \pm$	$3.80 \times 10^{-2} \pm$	$3.78 \times 10^{-2} \pm$	$3.55 \times 10^{-2} \pm$
	$2.11 \times 10^{-3} (=)$	$2.18 \times 10^{-3} (+)$	$2.91 \times 10^{-3} (=)$	$2.61 \times 10^{-3} (=)$	2.12×10^{-3}
MMF14	$7.65 \times 10^{-2} \pm$	$7.59 \times 10^{-2} \pm$	$8.85 \times 10^{-2} \pm$	$9.03 \times 10^{-2} \pm$	$7.75 \times 10^{-2} \pm$
	$1.50 \times 10^{-3} (=)$	$1.34 \times 10^{-3} (-)$	$6.50 \times 10^{-3} (+)$	$6.25 \times 10^{-3} (+)$	2.38×10^{-3}
MMF15	$1.07 \times 10^{-1} \pm$	$1.07 \times 10^{-1} \pm$	$1.15 \times 10^{-1} \pm$	$1.17 \times 10^{-1} \pm$	$1.09 \times 10^{-1} \pm$
	$1.58 \times 10^{-3} (=)$	$1.76 \times 10^{-3} (=)$	$4.63 \times 10^{-3} (+)$	$3.57 \times 10^{-3} (+)$	2.44×10^{-3}
MMF14_a	$1.01 \times 10^{-1} \pm$	$1.02 \times 10^{-1} \pm$	$1.02 \times 10^{-1} \pm$	$1.02 \times 10^{-1} \pm$	$9.45 \times 10^{-2} \pm$
	$2.35 \times 10^{-3} (+)$	$1.99 \times 10^{-3} (+)$	$2.95 \times 10^{-3} (+)$	$2.44 \times 10^{-3} (+)$	2.72×10^{-3}
MMF15_a	$1.46 \times 10^{-1} \pm$	$1.47 \times 10^{-1} \pm$	$1.47 \times 10^{-1} \pm$	$1.48 \times 10^{-1} \pm$	$1.45 \times 10^{-1} \pm$
	$2.31 \times 10^{-3} (=)$	$5.34 \times 10^{-3} (=)$	$3.88 \times 10^{-3} (=)$	$4.14 \times 10^{-3} (=)$	4.98×10^{-3}
MMF10_1	$5.60 \times 10^{-2} \pm$	$3.96 \times 10^{-2} \pm$	$2.95 \times 10^{-2} \pm$	$4.11 \times 10^{-2} \pm$	$8.25 \times 10^{-2} \pm$
	$5.24 \times 10^{-2} (=)$	$4.46 \times 10^{-2} (=)$	$2.07 \times 10^{-2} (-)$	$4.21 \times 10^{-2} (=)$	5.86×10^{-2}
MMF11_1	$2.70 \times 10^{-2} \pm$	$2.94 \times 10^{-2} \pm$	$2.94 \times 10^{-2} \pm$	$2.94 \times 10^{-2} \pm$	$2.74 \times 10^{-2} \pm$
	$1.69 \times 10^{-3} (=)$	$1.86 \times 10^{-3} (=)$	$2.47 \times 10^{-3} (=)$	$3.04 \times 10^{-3} (=)$	3.59×10^{-3}
MMF12_1	$4.54 \times 10^{-3} \pm$	$4.34 \times 10^{-3} \pm$	$4.79 \times 10^{-3} \pm$	$4.38 \times 10^{-3} \pm$	$4.03 \times 10^{-3} \pm$
	$9.93 \times 10^{-4} (=)$	$3.57 \times 10^{-4} (+)$	$5.23 \times 10^{-4} (+)$	$3.87 \times 10^{-4} (+)$	3.14×10^{-4}
MMF13_1	$2.81 \times 10^{-2} \pm$	$2.95 \times 10^{-2} \pm$	$3.05 \times 10^{-2} \pm$	$3.02 \times 10^{-2} \pm$	$3.06 \times 10^{-2} \pm$
	$3.97 \times 10^{-3} (=)$	$3.51 \times 10^{-3} (=)$	$5.48 \times 10^{-3} (=)$	$4.49 \times 10^{-3} (=)$	4.47×10^{-3}
MMF15_1	$1.07 \times 10^{-1} \pm$	$1.06 \times 10^{-1} \pm$	$1.17 \times 10^{-1} \pm$	$1.16 \times 10^{-1} \pm$	$1.08 \times 10^{-1} \pm$
	$1.56 \times 10^{-3} (=)$	$1.56 \times 10^{-3} (-)$	$4.51 \times 10^{-3} (+)$	$3.73 \times 10^{-3} (+)$	1.99×10^{-3}
MMF15_a_1	$1.47 \times 10^{-1} \pm$	$1.47 \times 10^{-1} \pm$	$1.47 \times 10^{-1} \pm$	$1.46 \times 10^{-1} \pm$	$1.47 \times 10^{-1} \pm$
	$4.75 \times 10^{-3} (=)$	$2.52 \times 10^{-3} (=)$	$3.62 \times 10^{-3} (=)$	$1.92 \times 10^{-3} (=)$	3.89×10^{-3}
MMF16_11	$1.13 \times 10^{-1} \pm$	$1.25 \times 10^{-1} \pm$	$1.27 \times 10^{-1} \pm$	$1.26 \times 10^{-1} \pm$	$1.16 \times 10^{-1} \pm$
	$2.44 \times 10^{-3} (=)$	$5.85 \times 10^{-3} (+)$	$3.96 \times 10^{-3} (+)$	$5.11 \times 10^{-3} (+)$	4.71×10^{-3}
MMF16_12	$1.45 \times 10^{-1} \pm$	$1.51 \times 10^{-1} \pm$	$1.51 \times 10^{-1} \pm$	$1.55 \times 10^{-1} \pm$	$1.44 \times 10^{-1} \pm$
	$8.73 \times 10^{-3} (=)$	$1.12 \times 10^{-2} (=)$	$5.74 \times 10^{-3} (+)$	$6.77 \times 10^{-3} (+)$	3.84×10^{-3}
MMF16_13	$1.48 \times 10^{-1} \pm$	$1.54 \times 10^{-1} \pm$	$1.53 \times 10^{-1} \pm$	$1.52 \times 10^{-1} \pm$	$1.49 \times 10^{-1} \pm$
	$6.00 \times 10^{-3} (=)$	$8.34 \times 10^{-3} (=)$	$5.14 \times 10^{-3} (=)$	$3.24 \times 10^{-3} (=)$	6.41×10^{-3}
+/-/=	5/0/18	8/3/9	12/2/9	12/0/11	

结束语 多模态多目标优化问题是一个广泛存在于现实生活中的优化问题。随着目前优化环境的复杂化,提供多个符合决策者需求的解决方案可以方便决策者更好地应对来自意外因素的影响,但目前多模态多目标的研究工作大多忽视了问题中具有良好质量的局部最优解。对此,本文提出了一种基于局部中心解聚类的多模态多目标优化算法 MMOCL 该算法可以同时求解只含全局 PS 的 MMOPs 以及全局 PS 和局部 PS 共存的 MMOPs;并通过实验验证了所提算法的有效性。

目前的多模态多目标研究工作多是针对低维决策变量的问题展开的,而实际问题中存在的多模态多目标问题可能存在于高维度、含约束等更加复杂的特征。因此,未来还将继续开展高维、含约束问题的研究。

参 考 文 献

- [1] FONSECA C M, FLEMING P J. An overview of evolutionary algorithms in multiobjective optimization [J]. Evolutionary Computation, 1995, 3(1): 1-16.
- [2] ZHANG Y, GONG D W, HAO G S, et al. Particle swarm optimization for multi-objective systems with interval parameters [J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(8): 921-928.
- [3] GONG W, LIAO Z, MI X, et al. Nonlinear equations solving with intelligent optimization algorithms: A survey [J]. Complex System Modeling and Simulation, 2021, 1(1): 15-32.
- [4] LIN C, TIAN D, DUAN X, et al. 3D environmental perception modeling in the simulated autonomous-driving systems [J].

- Complex System Modeling and Simulation, 2021, 1(1): 45-54.
- [5] DEB K. Multi-objective genetic algorithms: Problem difficulties and construction of test problems[J]. *Evolutionary Computation*, 1999, 7(3): 205-230.
- [6] ZHANG G J, CHEN M, ZHOU X G. Two-stage differential evolution algorithm using dynamic niche radius for multimodal optimization[J]. *Control and Decision*, 2016, 31(7): 1185-1191.
- [7] YUE C T, LIANG J, QU B Y, et al. A survey on multimodal multiobjective optimization [J]. *Control and Decision*, 2021, 36(11): 2577-2588.
- [8] TANABE R, ISHIBUCHI H. A review of evolutionary multimodal multiobjective optimization [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 24(1): 193-200.
- [9] LIU Y, ISHIBUCHI H, YEN G G, et al. Handling imbalance between convergence and diversity in the decision space in evolutionary multimodal multiobjective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 24(3): 551-565.
- [10] LI W, ZHANG T, WANG R, et al. Weighted indicator-based evolutionary algorithm for multimodal multiobjective optimization [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2021, 25(6): 1064-1078.
- [11] WANG W, LI G, WANG Y, et al. Clearing-based multimodal multi-objective evolutionary optimization with layer-to-layer strategy[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2022, 68: 100976.
- [12] TIAN Y, LIU R, ZHANG X, et al. A multipopulation evolutionary algorithm for solving large-scale multimodal multiobjective optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2020, 25(3): 405-418.
- [13] FAN Q, YAN X. Solving multimodal multiobjective problems through zoning search[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, 51(8): 4836-4847.
- [14] YAO X, LI W, PAN X, et al. Multimodal multi-objective evolutionary algorithm for multiple path planning[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2022, 169: 108145.
- [15] XIAO J M, ZHOU Q, QU B Y, et al. Multi-objective evolutionary algorithm and its application in electric power environment economic dispatch [J]. *Journal of Zhengzhou University: Engineering Science*, 2016, 37(2): 1-9.
- [16] YUE C, QU B, YU K, et al. A novel scalable test problem suite for multimodal multiobjective optimization[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2019, 48: 62-71.
- [17] LIU Y, ISHIBUCHI H, NOJIMA Y, et al. Searching for local pareto optimal solutions: A case study on polygon-based problems[C]// 2019 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC). New Zealand: IEEE, 2019: 896-903.
- [18] YUE C T, LIANG J J, QU B Y, et al. Multimodal multiobjective optimization in feature selection[C]// 2019 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC). New Zealand: IEEE, 2019: 302-309.
- [19] XU W W, LIANG J, YUE C T, et al. Multimodal multi-objective differential evolution algorithm for solving nonlinear equations [J]. *Application Research of Computers*, 2019, 36(5): 1305-1310.
- [20] ZHANG T, LI W, WANG R. Surrogated-assisted multimodal multi-objective optimization for hybrid renewable energy system [J]. *Complex & Intelligent Systems*, 2023, 9(4): 4075-4087.
- [21] RABBANI M, HEIDARI R, YAZDANPARAST R. A stochastic multi-period industrial hazardous waste location-routing problem: Integrating NSGA-II and Monte Carlo simulation[J]. *European Journal of Operational Research*, 2019, 272(3): 945-961.
- [22] DAI M, TANG D, GIRET A, et al. Multi-objective optimization for energy-efficient flexible job shop scheduling problem with transportation constraints[J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2019, 59: 143-157.
- [23] KALYANMOY D. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, 6(2): 182-197.
- [24] ZHANG Q, LI H, MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2007, 11(6): 712-731.
- [25] DEB K, TIWARI S. Omni-optimizer: A generic evolutionary algorithm for single and multi-objective optimization[J]. *European Journal of Operational Research*, 2008, 185(3): 1062-1087.
- [26] SHIRO M, PREUSS M, NAUJOKS B, et al. Enhancing decision space diversity in evolutionary multiobjective algorithms[C]// *Evolutionary Multi-Criterion Optimization: 5th International Conference*. Nantes: Springer, 2009: 95-109.
- [27] LIU Y, ISHIBUCHI H, NOJIMA Y, et al. A double-niched evolutionary algorithm and its behavior on polygon-based problems [C]// *Parallel Problem Solving from Nature-PPSN XV: 15th International Conference*. Coimbra: Springer International Publishing, 2018: 262-273.
- [28] YUE C, QU B, LIANG J. A multiobjective particle swarm optimizer using ring topology for solving multimodal multiobjective problems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 22(5): 805-817.
- [29] ZHANG W, LI G, ZHANG W, et al. A cluster based PSO with leader updating mechanism and ring-topology for multimodal multi-objective optimization[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2019, 50: 100569.
- [30] LIANG J, GUO Q, YUE C, et al. A self-organizing multi-objective particle swarm optimization algorithm for multimodal multi-objective problems[C]// *Advances in Swarm Intelligence: 9th International Conference*. Shanghai: Springer International Publishing, 2018: 550-560.
- [31] LIANG J, XU W, YUE C, et al. Multimodal multiobjective optimization with differential evolution[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2019, 44: 1028-1059.
- [32] PAL M, BANDYOPADHYAY S. Differential evolution for multi-modal multi-objective problems[C]// *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion*. Berlin, 2019: 1399-1406.
- [33] LIANG J, QIAO K, YUE C, et al. A clustering-based differential

- evolution algorithm for solving multimodal multi-objective optimization problems[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2021, 60:100788.
- [34] YUE C T, LIANG J J, SUGANTHAN P N, et al. MMOGA for solving multimodal multiobjective optimization problems with local Pareto sets[C]// 2020 IEEE Congress on Evolutionary Computation(CEC). IEEE, 2020:1-8.
- [35] LI W, YAO X, ZHANG T, et al. Hierarchy ranking method for multimodal multiobjective optimization with local Pareto fronts [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2023, 27(1):98-110.
- [36] LIN Q, LIN W, ZHU Z, et al. Multimodal multiobjective evolutionary optimization with dual clustering in decision and objective spaces[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2020, 25(1):130-144.
- [37] LIANG J, SUGANTHAN P, QU B, et al. Problem definitions and evaluation criteria for the CEC 2020 special session on multimodal multiobjective optimization [C]// Proceedings of the 2020 IEEE Congress on Evolutionary Computation(CEC). Glasgow; IEEE, 2020.
- [38] CHEN H K, WU G H, HUO L S, et al. Objective space division based adaptive multiobjective optimization algorithm[J]. *Journal of Software*, 2018, 29(9):2649-2663.
- [39] LI Z, ZOU J, YANG S, et al. A two-archive algorithm with decomposition and fitness allocation for multi-modal multi-objective optimization[J]. *Information Sciences*, 2021, 574:413-430.
- [40] LIU Y, YEN G G, GONG D. A multimodal multiobjective evolutionary algorithm using two-archive and recombination strategies [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 23(4):660-674.
- [41] YUE C T, SUGANTHAN P N, LIANG J, et al. Differential evolution using improved crowding distance for multimodal multiobjective optimization[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2021, 62:100849.
- [42] SUN Y, YEN G G, YI Z. IGD indicator-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 23(2):173-187.
- [43] RIQUELME N, LUCKEN C, BARAN B. Performance metrics in multi-objective optimization[C]// 2015 Latin American Computing Conference(CLEI). Salvador; IEEE, 2015:1-11.
- [44] DANG Q L, XU W, YUAN Y F. A dynamic resource allocation strategy with reinforcement learning for multimodal multi-objective optimization [J]. *Machine Intelligence Research*, 2022, 19(2):138-152.
- [45] LI B L, SHI X L, GOU C X, et al. Multivariant optimization algorithm and its convergence analysis[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(5):949-959.
- [46] ZHOU A, ZHANG Q, JIN Y. Approximating the set of Pareto-optimal solutions in both the decision and objective spaces by an estimation of distribution algorithm[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2009, 13(5):1167-1189.



YUE Caitong, born in 1990, Ph.D, professor. His main research interests include multimodal multiobjective optimization, pattern recognition, neural network and particle swarm optimization.



LIANG Jing, born in 1981, Ph.D, professor, Ph.D supervisor. Her main research interests include evolutionary computation, swarm intelligence, multi-objective optimization and neural network.

(责任编辑:何杨)