计算机科学
COMPUTER SCIENCE

**部分不完备广义多尺度数据的最优尺度组合和属性约简**

周诗霖, 吴伟志, 李同军

引用本文

周诗霖, 吴伟志, 李同军. 部分不完备广义多尺度数据的最优尺度组合和属性约简[J]. 计算机科学, 2025, 52(11): 49-61.

ZHOU Shilin, WU Weizhi, LI Tongjun. Optimal Scale Combinations and Attribute Reduction for Partially Incomplete Generalized Multi- scale Data [J]. Computer Science, 2025, 52(11): 49-61.

---

计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.250700019

# 部分不完备广义多尺度数据的最优尺度组合和属性约简

周诗霖　吴伟志　李同军
浙江海洋大学信息工程学院　浙江 舟山 316022
(ztzzj@163.com)

**摘　要**　针对部分不完备广义多尺度数据集的知识获取问题,首先,将一个部分不完备广义多尺度决策系统变换成广义多尺度集值决策系统,然后在所获系统所给定的每个尺度组合和每个属性子集上定义对象集上的相容关系,并得到对应的相容类表示,进一步给出集合关于相容关系的上近似与下近似、信任度与似然度以及属性子集所拥有的信息量等概念。其次,在协调广义多尺度集值决策系统中定义6种最优尺度组合的概念并验证它们之间的相互关系,证明其中的5种最优尺度组合概念是相互等价的,而信息量最优尺度组合与其他5种最优尺度组合概念之间没有强弱关系。最后,在一个信任最优尺度组合的基础上给出协调广义多尺度集值决策系统的属性约简方法,并用示例说明信任最优尺度约简的计算。

**关键词**:属性约简;粒计算;最优尺度组合;部分不完备广义多尺度决策系统;粗糙集
**中图分类号**　TP182

# Optimal Scale Combinations and Attribute Reduction for Partially Incomplete Generalized Multi-scale Data

ZHOU Shilin,WU Weizhi and LI Tongjun
School of Information Engineering,Zhejiang Ocean University,Zhoushan,Zhejiang 316022,China

**Abstract**　For the issue of knowledge acquisition in partially incomplete generalized multi-scale data sets,firstly,this paper proposes a method to transform a partially incomplete generalized multi-scale decision system into a generalized multi-scale set-valued decision one. Then,a tolerance relation on the object sets under each scale combination with each attribute subset in the obtained generalized multi-scale set-valued decision system is then constructed. Corresponding tolerance classes are also built. Upper and lower approximations,belief and plausibility degrees of sets with respect to each tolerance relation as well as information quantities of the attribute subset are subsequently presented. Six types of optimal scale combinations in a consistent generalized multi-scale set-valued decision system are further defined and their relationships are examined. It is rigorously demonstrated that five types of optimal scale combinations are equivalent while there is no static relationship between the concept of information quantity optimal scale combination with any of the other five types. Finally,an attribute reduction approach based on a belief optimal scale combination in a consistent generalized multi-scale set-valued decision system is developed,and an illustrative example is employed to explain the calculation of a belief optimal scale reduct.

**Keywords**　Attribute reduction,Granular computing,Optimal scale combinations,Partially incomplete generalized multi-scale decision systems,Rough sets

## 1　引言

作为模拟人类思考问题的一种计算范式,粒计算[1-3](Granular Computing,GrC)以粒(Granule)为基本计算单位,通过信息粒化等方式实现对复杂问题的数据分析建模[4-7]。目前,粒计算在模式识别、人工智能、数据挖掘等领域获得了广泛的应用[8-13]。

作为处理不确定性问题的重要方法,粗糙集数据分析是粒计算的一个重要研究方向。粗糙集由Pawlak[14]首先提出,粗糙集分析中数据的表示形式称为信息系统。根据属性子集定义在论域上的等价关系将论域粒化,得到等价类,即信息粒,通过信息粒构造得到集合的上近似与下近似,从而进行属性约简,实现知识的有效获取。但等价关系较为苛刻,导致其在实际应用中存在一定局限性。对此,学者将等价关系拓展成其他非等价关系,从而衍生出概率粗糙集[15-17]、模糊粗糙集[18-22]等模型,以应对复杂场景。

到稿日期:2025-07-04　返修日期:2025-08-24
基金项目:国家自然科学基金(12371466)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(12371466).
通信作者:吴伟志(wuwz@zjou.edu.cn)

在经典粗糙集模型及其所应用的数据集中，都只针对单尺度层级下的属性值系统进行数据分析，即所处理的数据都是单尺度信息系统。但在现实问题中，对于某一对象的特定属性，由于尺度层级不同，对象在属性下的取值随尺度的变化而改变。例如，学生考试成绩登记表中记分方式有百分制，（优、良、中、及格、不及格）五级制，（合格、不合格）二级制。针对类似数据的知识表示与知识获取问题，Wu 等[23]首次提出了多尺度信息系统的概念，对应的粗糙集数据分析方法称为 Wu-Leung 模型。Wu-Leung 模型所处理的数据要求所有属性的尺度个数是相同的，但现实生活场景的数据集中可能出现不同属性所具有的尺度个数不一样的情形。基于此类情况，Li 等[24]提出了广义多尺度粗糙集数据分析模型，并通过引入尺度组合概念对数据集进行知识表示与决策知识获取。

D-S 证据理论[25-26]是另一个用来处理不确定性问题的有效工具。该理论通过基本概率赋值函数构建信任结构，并基于信任结构分别定义信任函数与似然函数，为不确定性分析提供量化依据。在粗糙集数据分析中，Zhang 等[27]最早提出一种将包含度与证据理论结合的知识约简方法。Wu[28]针对不完备决策系统，借助证据理论引入信任约简与似然约简的概念，给出了属性约简的数值特征刻画。近年来，在多尺度数据分析中，证据理论已成为多尺度数据不确定性分析的一种有效途径[29]。

集合值是粗糙集数据分析中用于记录数据不确定信息的常用方式，因此，集值数据集的特征提取与 IF-THEN 规则提取是基于粗糙集的决策知识获取研究的一个重要方向。Ma 等[30]基于集值信息系统的相容关系，引入信息量的概念，通过信息量构造属性重要性，并设计了集值信息系统的属性约简算法。Guan 等[31]通过定义相容关系和最大相容类，研究集值决策系统的知识获取问题。Qian 等[32]在集值信息系统中引入两种优势关系，提出合取集值序信息系统和析取集值序信息系统的概念并进行属性约简。Huang 等[33]利用序贯三支决策模型刻画了多尺度集值决策系统中不同尺度下 3 个决策区域的相互转换关系，利用边界域定义不确定度，并设计了一种基于不确定度的动态最优尺度选择算法。Hu 等[34]针对现有研究的多尺度决策系统中所有属性尺度级数相同及最优尺度选择未考虑实际应用代价等问题，提出了广义多尺度集值决策系统中基于三支决策的尺度空间更新方法及最优尺度选择方法，实验结果表明，该方法能有效提高计算效率。

在复杂应用环境下，信息系统中普遍存在属性值缺失的现象，这类数据在粗糙集方法中被定义为不完备信息系统[35-36]。Wu 等[37]提出了不完备多尺度信息系统这一概念，对该系统中不同尺度层级间的信息粒结构予以刻画，并进行最优尺度选择和规则提取。Song 等[38]利用信息粒和信息熵，给出了不完备集值信息系统的属性约简方法。Wang 等[39]针对多尺度信息系统中属性值有序、缺失以及属性尺度不同的情况，提出了不完备广义多尺度序信息系统，定义了基于优势关系的上下近似，并引入相对知识距离的概念来研究最优尺度组合选择问题。针对动态不完备广义多尺度模糊序决策系统的知识获取问题，Wang 等[40]通过引入基于优势关系的粗糙模糊集，将其与多粒度粗糙集结合，提出悲观多粒度粗糙模糊集和乐观多粒度粗糙模糊集，给出了 6 种最优尺度组合的定义，并设计了一种在动态环境（增加对象）下的最优尺度组合更新算法，最后通过数值实验验证了算法的有效性，为处理动态不完备多尺度模糊序决策系统中的知识获取和属性约简问题提供了新的思路和方法。

迄今为止，粗糙集数据分析中所研究的不完备信息系统都是针对缺省值（即完全不知道）的信息系统，而在实际生活中存在信息部分知道的情形，称这样的数据集为部分不完备信息系统。另外，多尺度数据有可能在细尺度下是部分不完备数据（即部分信息已知），而在粗尺度下会变成完备（即确定性）数据。目前对于这类数据的知识表示与知识获取的研究还没有很好地展开。为此，本文结合文献[28]、文献[29]和文献[30]，研究部分不完备广义多尺度决策系统的最优尺度组合选择与属性约简问题。

## 2　基础知识

设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为一个非空有限对象集，即论域，记 $\mathcal{P}(U)$ 为 $U$ 的幂集。对于 $X\in\mathcal{P}(U)$，记 $\sim X$ 为 $X$ 关于 $U$ 的补集，即 $\sim X=\{x\in U\mid x\notin X\}$，记 $|X|$ 为集合 $X$ 的基数。

### 2.1　信息系统

**定义 1**[14]　称 $S=(U,AT)$ 为一个信息系统，其中 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为论域，$AT=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 为一个非空有限属性集，对于任意 $a\in AT$，有 $a:U\rightarrow V_a$，即 $a(x)\in V_a$，$x\in U$，其中 $V_a=\{a(x)\mid x\in U\}$ 为属性 $a$ 的值域。

对于 $C\subseteq AT$，记：

$$R_C=\{(x,y)\in U\times U\mid a(x)=a(y),\forall a\in C\}\tag{1}$$

则 $R_C$ 为 $U$ 上的等价关系，它将 $U$ 粒化为两两不交等价类集 $U/R_C=\{[x]_C\mid x\in U\}$，其中：

$$[x]_C=\{y\in U\mid(x,y)\in R_C\}\tag{2}$$

为 $x$ 的 $R_C$-等价类。

**定义 2**[14]　称 $S=(U,AT\cup\{d\})$ 为一个决策系统，其中 $(U,AT)$ 是一个信息系统，$d\notin AT$，使得 $d:U\rightarrow V_d$，即 $d(x)\in V_d$，$x\in U$，$V_d$ 为 $d$ 的值域。此时，$AT=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 称为条件属性集，$d$ 称为决策属性。

由 $d$ 确定的等价关系如下：

$$R_d=\{(x,y)\in U\times U\mid d(x)=d(y)\}\tag{3}$$

不妨记 $V_d=\{1,2,\cdots,r\}$，则 $d$ 将论域 $U$ 粒化为两两互不相交的决策类：

$$U/R_d=\{[x]_d\mid x\in U\}=\{D_1,D_2,\cdots,D_r\}\tag{4}$$

其中，$D_k=\{x\in U\mid d(x)=k\}$，$k\in\{1,2,\cdots,r\}$。特别地，对于 $x\in U$，若 $d(x)=k$，则：

$$[x]_d=\{y\in U\mid d(x)=d(y)=k\}=D_k\tag{5}$$

Liang 等[41]首次提出了信息系统中一个属性子集拥有的信息量的概念。

**定义 3**[41]　设 $S=(U,AT)$ 为一个信息系统，$C\subseteq AT$，若 $U/R_C=\{X_1,X_2,\cdots,X_q\}$，则 $C$ 的信息量定义为：

$$I(C)=\sum_{i=1}^{q}\frac{|X_i|}{|U|}\left(1-\frac{|X_i|}{|U|}\right)=1-\frac{1}{|U|^2}\sum_{i=1}^{q}|X_i|^2 \tag{6}$$

### 2.2 集值决策系统和广义多尺度信息系统

**定义 4**[31] 称 $S=(U,AT)$ 为一个集值信息系统，其中 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为论域，$AT=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 为一个非空有限属性集，使得 $a_l:U\to\mathcal{P}(V_l)(1\leqslant l\leqslant m)$，$a_l\in AT$，$V_l$ 是 $a_l$ 的值域。

**定义 5**[31] 设 $S=(U,AT)$ 为一个集值信息系统，$C\subseteq AT$，定义 $C$ 在 $U$ 上导出的相容关系如下：

$$R_C^{\cap}=\{(x,y)\in U\times U\,|\,a(x)\cap a(y)\neq\varnothing,\forall a\in C\} \tag{7}$$

由 $R_C^{\cap}$ 导出的相容类全体为：

$$U/R_C^{\cap}=\{[x]_C^{\cap}\,|\,x\in U\} \tag{8}$$

其中，$[x]_C^{\cap}=\{y\in U\,|\,(x,y)\in R_C^{\cap}\}$ 为 $x$ 的 $R_C^{\cap}$-相容类。

**定义 6**[31] 设 $S=(U,AT)$ 为一个集值信息系统，对于 $X\in\mathcal{P}(U)$，$X$ 关于 $R_C^{\cap}$ 的下近似 $\underline{R_C^{\cap}}(X)$ 与上近似 $\overline{R_C^{\cap}}(X)$ 分别定义如下：

$$\underline{R_C^{\cap}}(X)=\{x\in U\,|\,[x]_C^{\cap}\subseteq X\} \tag{9}$$

$$\overline{R_C^{\cap}}(X)=\{x\in U\,|\,[x]_C^{\cap}\cap X\neq\varnothing\} \tag{10}$$

Ma 等[30]将信息量的概念推广到集值信息系统中，并用于分析该类数据的属性约简问题。

**定义 7**[30] 设 $S=(U,AT)$ 为一个集值信息系统，$C\subseteq AT$，$U/R_C^{\cap}=\{[x]_C^{\cap}\,|\,x\in U\}$ 是由 $R_C^{\cap}$ 导出的相容类全体，定义属性子集 $C$ 的信息量 $I(C)$ 如下：

$$I(C)=1-\frac{1}{|U|^2}\sum_{i=1}^{|U|}|[x_i]_C^{\cap}| \tag{11}$$

**定义 8**[31] 称 $S=(U,AT\cup\{d\})$ 为一个集值决策系统，其中 $(U,AT)$ 是一个集值信息系统，$d\notin AT$ 是决策属性，使得 $d:U\to V_d$，其中 $V_d$ 为 $d$ 的值域。

**定义 9**[24] 称 $S=(U,AT)$ 为一个广义多尺度信息系统，其中 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为论域，$AT=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 为一个非空有限属性集，且每个属性 $a\in AT$ 均为多尺度属性。若 $a_j$ 有 $I_j$ 个尺度，则一个广义多尺度信息系统可以表示为：

$$S=(U,AT)=(U,\{a_j^k\,|\,k=1,2,\cdots,I_j,j=1,2,\cdots,m\}) \tag{12}$$

其中，$a_j^k:U\to V_j^k$，$V_j^k$ 是 $a_j$ 在第 $k$ 个尺度下的值域，并且对于 $j\in\{1,2,\cdots,m\}$，$1\leqslant k\leqslant I_j-1$，存在一个满射 $g_j^{k,k+1}:V_j^k\to V_j^{k+1}$，使得 $a_j^{k+1}=g_j^{k,k+1}\circ a_j^k$，即 $a_j^{k+1}(x)=g_j^{k,k+1}(a_j^k(x))$，$x\in U$，称 $g_j^{k,k+1}$ 为信息粒度变换。

### 2.3 广义多尺度集值决策系统

**定义 10**[34] 称 $S=(U,AT\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\,|\,k=1,2,\cdots,I_j,j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d\})$ 为一个广义多尺度集值决策系统，其中 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为论域，$AT=\{a_j^k\,|\,k=1,2,\cdots,I_j,j=1,2,\cdots,m\}$ 为条件属性集，$I_j$ 为 $a_j\in AT$ 的尺度个数，且 $a_j^k:U\to\mathcal{P}(V_j^k)$，$V_j^k$ 是 $a_j$ 在第 $k$ 个尺度下的值域，且对于 $j\in\{1,2,\cdots,m\}$，$1\leqslant k\leqslant I_j-1$，存在满射 $g_j^{k,k+1}:V_j^k\to V_j^{k+1}$，使得对于任意 $x\in U$，有 $a_j^{k+1}(x)=\{g_j^{k,k+1}(v)\,|\,v\in a_j^k(x)\}$，称 $g_j^{k,k+1}$ 为信息粒度变换。$d\notin\{a_j^k\,|\,k=1,2,\cdots,I_j,j=1,2,\cdots,m\}$ 为决策属性，使得 $d:U\to V_d$，$V_d$ 为 $d$ 的值域。

**定义 11**[34] 设 $S=(U,\{a_j^k\,|\,k=1,2,\cdots,I_j,j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d\})$ 为一个广义多尺度集值决策系统，若 $a_j$ 取第 $l_j$ 个尺度 $(1\leqslant l_j\leqslant I_j)$，$j\in\{1,2,\cdots,m\}$，记 $K=(l_1,l_2,\cdots,l_m)$，称 $K$ 为 $S$ 的一个尺度组合。记 $S$ 的尺度组合全体为 $\mathcal{L}$，则 $S$ 的每个尺度组合 $K=(l_1,l_2,\cdots,l_m)\in\mathcal{L}$ 对应一个决策系统 $S^K=(U,AT^K\cup\{d\})$，其中 $AT^K=(a_1^{l_1},a_2^{l_2},\cdots,a_m^{l_m})$。

对于 $C\subseteq AT$，记 $K_C$ 为尺度组合 $K$ 在条件属性子集 $C$ 上的限制。例如，若 $AT=\{a_1,a_2,a_3\}$，$C=\{a_1,a_3\}$，$K=(3,3,2)\in\mathcal{L}$，则 $K_C=(3,2)$，$C^{K_C}=\{a_1^3,a_3^2\}$，为方便起见，将其简记为 $C^K=\{a_1^3,a_3^2\}$。

设有两个尺度组合 $K_1=(l_1^1,l_2^1,\cdots,l_m^1)\in\mathcal{L}$，$K_2=(l_1^2,l_2^2,\cdots,l_m^2)\in\mathcal{L}$，若对于任意 $j\in\{1,2,\cdots,m\}$，有 $l_j^1\leqslant l_j^2$，则称 $K_1$ 比 $K_2$ 细，或 $K_2$ 比 $K_1$ 粗，记为 $K_1\preceq K_2$。若 $K_1\preceq K_2$，且存在 $j\in\{1,2,\cdots,m\}$，使得 $l_j^1<l_j^2$，则称 $K_1$ 严格细于 $K_2$，或 $K_2$ 严格粗于 $K_1$，记为 $K_1\prec K_2$。进一步地，定义：

$$K_1\wedge K_2=(l_1^1\wedge l_1^2,l_2^1\wedge l_2^2,\cdots,l_m^1\wedge l_m^2) \tag{13}$$

$$K_1\vee K_2=(l_1^1\vee l_1^2,l_2^1\vee l_2^2,\cdots,l_m^1\vee l_m^2) \tag{14}$$

其中，$l_j^1\wedge l_j^2=\min\{l_j^1,l_j^2\}$，$l_j^1\vee l_j^2=\max\{l_j^1,l_j^2\}$，则容易验证：

$$K_1\preceq K_2\Leftrightarrow K_1\wedge K_2=K_1\Leftrightarrow K_1\vee K_2=K_2 \tag{15}$$

并且 $(K,\preceq,\wedge,\vee)$ 是一个完备格，其中最小元 $K_0$ 为 $(1,1,\cdots,1)$，最大元 $K_m$ 为 $(I_1,I_2,\cdots,I_m)$。

### 2.4 证据理论

**定义 12**[26] 设 $U$ 为论域，一个集函数 $m:\mathcal{P}(U)\to[0,1]$ 称为 $U$ 上的一个 mass 函数，若 $m(\varnothing)=0$ 且 $\sum_{X\subseteq U}m(X)=1$。对于 $X\in\mathcal{P}(U)$，若 $m(X)>0$，则称 $X$ 为 $m$ 的一个焦元。$\mathcal{M}=\{X\in\mathcal{P}(U)\,|\,m(X)>0\}$ 为 $m$ 所有焦元组成的集合，称 $(\mathcal{M},m)$ 是 $U$ 上的一个信任结构。

**定义 13**[26] 对于 $U$ 上的一个信任结构 $(\mathcal{M},m)$，称集函数 $Bel:\mathcal{P}(U)\to[0,1]$ 为 $U$ 上的一个信任函数，若：

$$Bel(X)=\sum_{Y\subseteq X}m(Y),\forall X\in\mathcal{P}(U) \tag{16}$$

称集函数 $Pl:\mathcal{P}(U)\to[0,1]$ 为 $U$ 上的一个似然函数，若：

$$Pl(X)=\sum_{Y\cap X\neq\varnothing}m(Y),\forall X\in\mathcal{P}(U) \tag{17}$$

易证：

$$Pl(\sim X)=1-Bel(X),\forall X\in\mathcal{P}(U) \tag{18}$$

## 3 部分不完备广义多尺度决策系统

### 3.1 部分不完备决策系统

**定义 14** 设 $S=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个决策系统，若存在 $x\in U$，$a\in AT$，使得 $a(x)$ 是缺省的或部分已知的，则称 $S$ 是一个部分不完备决策系统。若 $a(x)$ 取值是缺省的，则记 $a(x)=*$；若 $a(x)$ 是部分已知的，如存在 $W\subset V_a$，使得 $a(x)$ 不取 $W$ 中的值，则记 $a(x)=\neg W$。

注 1：$a(x)=\neg W$ 表示 $a(x)$ 是取 $V_a$ 中除 $W$ 中值以外可能的一个值，但具体哪一个值不确定。

以下将定义 14 中部分不完备决策系统转换为一个集值决策系统，对于任意 $x\in U$ 和任意 $a\in AT$，仍用 $a(x)$ 表示转换为集值决策系统后的新的集合值，则：

$$a(x)=\begin{cases}\{v\}, & 若\ a(x)=v\in V_a\\ V_a, & 若\ a(x)=*\\ V_a-W, & 若\ a(x)=\neg W\end{cases}\tag{19}$$

例 1　表 1 为一个部分不完备决策系统，其中 $U=\{x_1,x_2,x_3\}$表示 3 位患者，$AT=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$表示 4 种疾病，$a_1$ 为高血压，$a_2$ 为糖尿病，$a_3$ 为冠心病，$a_4$ 为高血脂。$V_1=V_2=\{1,2,3\}$，$V_3=V_4=\{1,2,3,4\}$。当属性取值为 1，2，3，4 时，分别代表患病程度为低、中、高、重度的情形。$d$ 取值为 1 代表病人处于重症状态，$d$ 取值为 2 代表病人不处于重症状态。例如，$a_3(x_3)=\neg\{3,4\}$表示已经知道患者 $x_3$ 的冠心病患病程度肯定不为高和重度，可能为低或中的情况，但具体哪种情况不确定；$a_1(x_1)=*$ 表示患者 $x_1$ 的高血压患病程度为未知值，可能为低、中或高的情况。表 1 经式(19)变换得到的集值决策系统如表 2 所列。

表 1　一个部分不完备决策系统

Table 1　Partially incomplete decision system

| $U$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | * | $\neg\{2\}$ | $\neg\{1\}$ | * | 1 |
| $x_2$ | $\neg\{2\}$ | 3 | 1 | $\neg\{1\}$ | 2 |
| $x_3$ | 3 | 1 | $\neg\{3,4\}$ | 2 | 2 |

表 2　一个转换后的集值决策系统

Table 2　Converted set-valued decision system

| $U$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | {1,2,3} | {1,3} | {2,3,4} | {1,2,3,4} | 1 |
| $x_2$ | {1,3} | {3} | {1} | {2,3,4} | 2 |
| $x_3$ | {3} | {1} | {1,2} | {2} | 2 |

### 3.2　部分不完备广义多尺度决策系统

迄今为止，对于不完备多尺度数据的知识获取问题已有诸多研究，现有文献所处理的不完备数据的对象属性值都是针对缺省情形的，此时若某个对象属性取值 $a(x)$在细尺度下取值是 *，则在粗尺度下取值仍然为 *[37]。但在现实生活中，可能存在随着尺度变粗后原来细尺度下部分不完备的属性取值变成了完备属性值的情况。例如，浙江省舟山市(地级市)下属有定海区、普陀区、岱山县、嵊泗县 4 个县级市和区，若对象属性取值 $a(x)$表示被询问记录 $x$(张三)是哪里人，由于某些原因只知道他肯定不是普陀人，但是一定是舟山人，则在区县级(细)尺度下记录张三这个人的属地可能是定海区、岱山县、嵊泗县之一区域的(即信息是部分不完备的)，但是在地级(粗)尺度下记录的是舟山人(即是完备属性值)。针对此类数据的知识表示与知识获取问题，本文研究部分不完备广义多尺度决策系统的最优尺度选择与知识约简问题。

**定义 15**　称一个广义多尺度决策系统 $S=(U,AT\cup\{d\})=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j,j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d\})$是一个部分不完备广义多尺度决策系统，若 $S^{K_0}=(U,AT^{K_0}\cup\{d\})=(U,\{a_j^1\mid j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d\})$是一个部分不完备决策系统。此时，对于任意 $j\in\{1,2,\cdots,m\}$和 $k\in\{1,2,\cdots,I_j-1\}$，存在一个信息粒度变换 $g_j^{k,k+1}:V_j^k\rightarrow V_j^{k+1}$，使得对于任意 $x\in U$，有：

$$a_j^{k+1}(x)=\begin{cases}g_j^{k,k+1}(v), & 若\ a_j^k(x)=v,v\in V_j^k\\ *, & 若\ a_j^k(x)=*\\ \{g_j^{k,k+1}(v)\mid v\in V_j^k-W\}, & 若\ a_j^k(x)=\neg W,W\subset V_j^k\end{cases}\tag{20}$$

特别地，若存在 $W\subset V_j^1$ 使得 $a_j^1(x)=\neg W$，则：

$$a_j^2(x)=\{g_j^{1,2}(v)\mid v\in V_j^1-W\}\tag{21}$$

且：

$$a_j^{k+1}(x)=\{g_j^{k,k+1}(v)\mid v\in a_j^k(x)\},2\leqslant k\leqslant I_j-1\tag{22}$$

为解决部分不完备广义多尺度数据的知识获取问题，首先将部分不完备广义多尺度决策系统按式(23)的方式转换为广义多尺度集值决策系统，在不至于引起混淆的情况下仍用 $a_j^k(x)$表示转换后的广义多尺度集值决策系统中对象 $x$ 在条件属性 $a_j$ 的第 $k$ 个尺度下的取值，则：

$$a_j^k(x)=\begin{cases}\{v\}, & 若\ a_j^k(x)=v,v\in V_j^k\\ V_j^k, & 若\ a_j^k(x)=*\\ V_j^k-W, & 若\ a_j^k(x)=\neg W,W\subset V_j^k\end{cases}\tag{23}$$

同时，对于新系统中的任意 $j\in\{1,2,\cdots,m\}$和 $1\leqslant k\leqslant I_j-1$，按照原系统中的信息粒度变换 $g_j^{k,k+1}:V_j^k\rightarrow V_j^{k+1}$，对于任意 $x\in U$，有：

$$a_j^{k+1}(x)=\begin{cases}\{g_j^{k,k+1}(v)\}, & 若\ a_j^k(x)=\{v\},v\in V_j^k\\ V_j^{k+1}, & 若\ a_j^k(x)=V_j^k\\ \{g_j^{k,k+1}(v)\mid v\in V_j^k-W\}, & 若\ a_j^k(x)=V_j^k-W,W\subset V_j^k\end{cases}\tag{24}$$

由于 $V_j^{k+1}=g_j^{k,k+1}(V_j^k)=\{g_j^{k,k+1}(v)\mid v\in V_j^k\}$，因此根据信息粒度变换 $g_j^{k,k+1}:V_j^k\rightarrow V_j^{k+1}$，新系统的对象属性值的对应变换关系可以统一描述如下：

$$a_j^{k+1}(x)=\{g_j^{k,k+1}(v)\mid v\in a_j^k(x)\},x\in U\tag{25}$$

例 2　表 3 列出了一个关于公司员工 KPI 绩效考核的部分不完备广义多尺度决策系统，其中 $a_1,a_2,a_3$ 分别代表员工的出勤情况、工作业绩、团队协作能力评价指标，每一项评价指标的得分分别按照百分制、六级制以及二分制进行评价，其中 $A$ 表示远超预期，$B$ 表示超过预期，$C$ 表示达标，$D$ 表示有待改进，$E$ 表示不足，$F$ 表示极差，$H$ 表示通过，$L$ 表示不通过。不同尺度间的信息粒度变换如下。

对于属性 $a_j$(其中 $j=1,2$)，有：

1) $g_j^{1,2}:V_j^1\rightarrow V_j^2$，有：

$$g_j^{1,2}(v)=\begin{cases}A, & 若\ v\in[90,100]\\ B, & 若\ v\in[80,90)\\ C, & 若\ v\in[70,80)\\ D, & 若\ v\in[60,70)\\ E, & 若\ v\in[50,60)\\ F, & 若\ v\in[0,50)\end{cases}$$

2) $g_j^{2,3}:V_j^2\rightarrow V_j^3$，有：

$$g_j^{2,3}(v)=\begin{cases}H, & 若\ v\in\{A,B,C,D\}\\ L, & 若\ v\in\{E,F\}\end{cases}$$

对于属性 $a_3$，$g_3^{1,2}:V_3^1\rightarrow V_3^2$，有：

$$g_3^{1,2}(v)=\begin{cases}H, & 若\ v\in\{A,B,C,D\}\\ L, & 若\ v\in\{E,F\}\end{cases}$$

将表 3 所列的系统根据信息粒度变换转换为广义多尺度集值决策系统（见表 4）。

例如，$x_2$ 在 $a_2^1, a_2^2, a_2^3$ 下的属性值均为不完备的，根据信息粒度变换将其分别转换为 $a_2$ 的每个尺度对应值域：

$a_2^1(x_2)=V_2^1, a_2^2(x_2)=V_2^2, a_2^3(x_2)=V_2^3$

$x_1, x_3$ 在 $a_3^1$ 下的属性值为部分不完备的，将其转换为：

$a_3^1(x_1)=V_3^1-\{E,F\}=\{A,B,C,D\}=a_3^1(x_3)$

$x_{11}, x_{12}, x_{13}$ 在 $a_3^1$ 下的属性值为：

$a_3^1(x_{11})=V_3^1-\{A,B,C,D\}=\{E,F\}=a_3^1(x_{12})=a_3^1(x_{13})$

$x_9$ 在 $a_1^2$ 下的属性值为：

$a_1^2(x_9)=V_1^2-\{A,B,C,D\}=\{E,F\}$

对于转换后的表 4，其中：

$V_1^1=\{0,1,2,\cdots,100\}=V_2^1$

$V_1^2=\{A,B,C,D,E,F\}=V_2^2$

$V_1^3=\{H,L\}=V_2^3$

此时，3 个属性的信息粒度变换如下。

对于属性 $a_j$（其中 $j=1,2$），有：

1）$g_j^{1,2}: V_j^1 \to V_j^2$，有：

$$g_j^{1,2}(v)=\begin{cases}A, & 若\ v\in[90,100]\\ B, & 若\ v\in[80,90)\\ C, & 若\ v\in[70,80)\\ D, & 若\ v\in[60,70)\\ E, & 若\ v\in[50,60)\\ F, & 若\ v\in[0,50)\end{cases}$$

2）$g_j^{2,3}: V_j^2 \to V_j^3$，有：

$$g_j^{2,3}(v)=\begin{cases}H, & 若\ v\in\{A,B,C,D\}\\ L, & 若\ v\in\{E,F\}\end{cases}$$

对于属性 $a_3$，$g_3^{1,2}: V_3^1 \to V_3^2$，有：

$$g_3^{1,2}(v)=\begin{cases}H, & 若\ v\in\{A,B,C,D\}\\ L, & 若\ v\in\{E,F\}\end{cases}$$

表 3　一个部分不完备广义多尺度决策系统

Table 3　Partially incomplete generalized multi-scale decision system

| $U$ | $a_1$: $a_1^1 \xrightarrow{g_1^{1,2}}$ | $a_1^2 \xrightarrow{g_1^{2,3}}$ | $a_1^3$ | $a_2$: $a_2^1 \xrightarrow{g_2^{1,2}}$ | $a_2^2 \xrightarrow{g_2^{2,3}}$ | $a_2^3$ | $a_3$: $a_3^1 \xrightarrow{g_3^{1,2}}$ | $a_3^2$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 96 | $A$ | $H$ | 86 | $B$ | $H$ | $\neg\{E,F\}$ | $H$ | 1 |
| $x_2$ | 96 | $A$ | $H$ | * | * | * | $A$ | $H$ | 1 |
| $x_3$ | 83 | $B$ | $H$ | 97 | $A$ | $H$ | $\neg\{E,F\}$ | $H$ | 1 |
| $x_4$ | * | * | * | 86 | $B$ | $H$ | $A$ | $H$ | 1 |
| $x_5$ | 79 | $C$ | $H$ | 54 | $E$ | $L$ | $C$ | $H$ | 1 |
| $x_6$ | 85 | $B$ | $H$ | 56 | $E$ | $L$ | $B$ | $H$ | 1 |
| $x_7$ | 85 | $B$ | $H$ | 46 | $F$ | $L$ | $B$ | $H$ | 1 |
| $x_8$ | 79 | $C$ | $H$ | 77 | $C$ | $H$ | $D$ | $H$ | 2 |
| $x_9$ | $\leqslant 59$ | $\neg\{A,B,C,D\}$ | $L$ | 56 | $E$ | $L$ | $C$ | $H$ | 1 |
| $x_{10}$ | $\leqslant 49$ | $F$ | $L$ | 71 | $C$ | $H$ | $E$ | $L$ | 2 |
| $x_{11}$ | 52 | $E$ | $L$ | 66 | $D$ | $H$ | $\neg\{A,B,C,D\}$ | $L$ | 2 |
| $x_{12}$ | 61 | $D$ | $H$ | $\leqslant 49$ | $F$ | $L$ | $\neg\{A,B,C,D\}$ | $L$ | 2 |
| $x_{13}$ | 61 | $D$ | $H$ | 54 | $E$ | $L$ | $\neg\{A,B,C,D\}$ | $L$ | 2 |
| $x_{14}$ | 92 | $A$ | $H$ | 86 | $B$ | $H$ | $D$ | $H$ | 2 |
| $x_{15}$ | 54 | $E$ | $L$ | 83 | $B$ | $H$ | $E$ | $L$ | 2 |
| $x_{16}$ | 56 | $E$ | $L$ | 89 | $B$ | $H$ | $F$ | $L$ | 2 |
| $x_{17}$ | 43 | $F$ | $L$ | 41 | $F$ | $L$ | $F$ | $L$ | 2 |
| $x_{18}$ | 46 | $F$ | $L$ | 58 | $E$ | $L$ | $F$ | $L$ | 2 |

表 4　一个转换后的广义多尺度集值决策系统

Table 4　Converted generalized multi-scale set-valued decision system

| $U$ | $a_1$: $a_1^1 \xrightarrow{g_1^{1,2}}$ | $a_1^2 \xrightarrow{g_1^{2,3}}$ | $a_1^3$ | $a_2$: $a_2^1 \xrightarrow{g_2^{1,2}}$ | $a_2^2 \xrightarrow{g_2^{2,3}}$ | $a_2^3$ | $a_3$: $a_3^1 \xrightarrow{g_3^{1,2}}$ | $a_3^2$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\{96\}$ | $\{A\}$ | $\{H\}$ | $\{86\}$ | $\{B\}$ | $\{H\}$ | $\{A,B,C,D\}$ | $\{H\}$ | 1 |
| $x_2$ | $\{96\}$ | $\{A\}$ | $\{H\}$ | $V_2^1$ | $V_2^2$ | $V_2^3$ | $\{A\}$ | $\{H\}$ | 1 |
| $x_3$ | $\{83\}$ | $\{B\}$ | $\{H\}$ | $\{97\}$ | $\{A\}$ | $\{H\}$ | $\{A,B,C,D\}$ | $\{H\}$ | 1 |
| $x_4$ | $V_1^1$ | $V_1^2$ | $V_1^3$ | $\{86\}$ | $\{B\}$ | $\{H\}$ | $\{A\}$ | $\{H\}$ | 1 |
| $x_5$ | $\{79\}$ | $\{C\}$ | $\{H\}$ | $\{54\}$ | $\{E\}$ | $\{L\}$ | $\{C\}$ | $\{H\}$ | 1 |
| $x_6$ | $\{85\}$ | $\{B\}$ | $\{H\}$ | $\{56\}$ | $\{E\}$ | $\{L\}$ | $\{B\}$ | $\{H\}$ | 1 |
| $x_7$ | $\{85\}$ | $\{B\}$ | $\{H\}$ | $\{46\}$ | $\{F\}$ | $\{L\}$ | $\{B\}$ | $\{H\}$ | 1 |
| $x_8$ | $\{79\}$ | $\{C\}$ | $\{H\}$ | $\{77\}$ | $\{C\}$ | $\{H\}$ | $\{D\}$ | $\{H\}$ | 2 |
| $x_9$ | $\{0,1,\cdots,59\}$ | $\{E,F\}$ | $\{L\}$ | $\{56\}$ | $\{E\}$ | $\{L\}$ | $\{C\}$ | $\{H\}$ | 1 |
| $x_{10}$ | $\{0,1,\cdots,49\}$ | $\{F\}$ | $\{L\}$ | $\{71\}$ | $\{C\}$ | $\{H\}$ | $\{E\}$ | $\{L\}$ | 2 |
| $x_{11}$ | $\{52\}$ | $\{E\}$ | $\{L\}$ | $\{66\}$ | $\{D\}$ | $\{H\}$ | $\{E,F\}$ | $\{L\}$ | 2 |
| $x_{12}$ | $\{61\}$ | $\{D\}$ | $\{H\}$ | $\{0,1,\cdots,49\}$ | $\{F\}$ | $\{L\}$ | $\{E,F\}$ | $\{L\}$ | 2 |
| $x_{13}$ | $\{61\}$ | $\{D\}$ | $\{H\}$ | $\{54\}$ | $\{E\}$ | $\{L\}$ | $\{E,F\}$ | $\{L\}$ | 2 |
| $x_{14}$ | $\{92\}$ | $\{A\}$ | $\{H\}$ | $\{86\}$ | $\{B\}$ | $\{H\}$ | $\{D\}$ | $\{H\}$ | 2 |
| $x_{15}$ | $\{54\}$ | $\{E\}$ | $\{L\}$ | $\{83\}$ | $\{B\}$ | $\{H\}$ | $\{E\}$ | $\{L\}$ | 2 |
| $x_{16}$ | $\{56\}$ | $\{E\}$ | $\{L\}$ | $\{89\}$ | $\{B\}$ | $\{H\}$ | $\{F\}$ | $\{L\}$ | 2 |
| $x_{17}$ | $\{43\}$ | $\{F\}$ | $\{L\}$ | $\{41\}$ | $\{F\}$ | $\{L\}$ | $\{F\}$ | $\{L\}$ | 2 |
| $x_{18}$ | $\{46\}$ | $\{F\}$ | $\{L\}$ | $\{58\}$ | $\{E\}$ | $\{L\}$ | $\{F\}$ | $\{L\}$ | 2 |

尺度组合的格结构如图 1 所示。

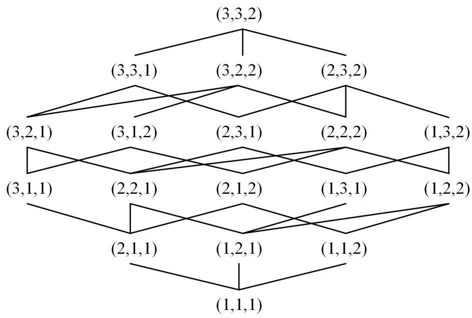


图 1 尺度组合的格结构

Fig. 1 Lattice structure of scale combinations

**定义 16**[34] 设 $S=(U,\{a_j^k \mid k=1,2,\cdots,I_j,j=1,2,\cdots,m\})$ 是一个广义多尺度集值信息系统，$C\subseteq AT$，$K=(l_1,l_2,\cdots,l_m)\in\mathcal{L}$，记：

$$R^{\cap}_{C^K}=\{(x,y)\in U\times U \mid a_j^{l_j}(x)\cap a_j^{l_j}(y)\neq\varnothing,\forall a_j^{l_j}\in C^K\} \tag{26}$$

$R^{\cap}_{C^K}$ 是由 $C^K$ 导出的相容关系。记 $x$ 关于 $R^{\cap}_{C^K}$ 的相容类为：

$$[x]^{\cap}_{C^K}=\{y\in U \mid (x,y)\in R^{\cap}_{C^K},x\in U \tag{27}$$

则由 $R^{\cap}_{C^K}$ 导出的相容类全体为：

$$U/R^{\cap}_{C^K}=\{[x]^{\cap}_{C^K} \mid x\in U\} \tag{28}$$

对于 $X\in\mathcal{P}(U)$，$X$ 关于 $R^{\cap}_{C^K}$ 的下近似 $\underline{R^{\cap}_{C^K}}(X)$ 与上近似 $\overline{R^{\cap}_{C^K}}(X)$ 分别定义如下：

$$\underline{R^{\cap}_{C^K}}(X)=\{x\in U \mid [x]^{\cap}_{C^K}\subseteq X\} \tag{29}$$

$$\overline{R^{\cap}_{C^K}}(X)=\{x\in U \mid [x]^{\cap}_{C^K}\cap X\neq\varnothing\} \tag{30}$$

**定义 17**[34] 对于广义多尺度集值决策系统 $S=(U,AT\cup\{d\})$ 和 $D\in U/R_d$，$D$ 关于相容关系 $R^{\cap}_{C^K}$ 的下近似 $\underline{R^{\cap}_{C^K}}(D)$ 和上近似 $\overline{R^{\cap}_{C^K}}(D)$ 分别为：

$$\underline{R^{\cap}_{C^K}}(D)=\{x\in U \mid [x]^{\cap}_{C^K}\subseteq D\} \tag{31}$$

$$\overline{R^{\cap}_{C^K}}(D)=\{x\in U \mid [x]^{\cap}_{C^K}\cap D\neq\varnothing\} \tag{32}$$

**定义 18** 设 $S=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个广义多尺度集值决策系统，$C\subseteq AT$，$K\in\mathcal{L}$，则 $C^K$ 关于决策属性 $d$ 的信息量如下：

$$I(C^K \mid d)=1-\frac{1}{|U|^2}\sum_{i=1}^{|U|}|[x_i]^{\cap}_{C^K}\cap[x_i]_d| \tag{33}$$

**定理 1** 设 $S=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个广义多尺度集值决策系统，$C\subseteq AT$，$K\in\mathcal{L}$，记：

$$Bel^{\cap}_{C^K}(X)=P(\underline{R^{\cap}_{C^K}}(X))=\frac{|\underline{R^{\cap}_{C^K}}(X)|}{|U|},X\in\mathcal{P}(U) \tag{34}$$

$$Pl^{\cap}_{C^K}(X)=P(\overline{R^{\cap}_{C^K}}(X))=\frac{|\overline{R^{\cap}_{C^K}}(X)|}{|U|},X\in\mathcal{P}(U) \tag{35}$$

则 $Bel^{\cap}_{C^K}:\mathcal{P}(U)\rightarrow[0,1]$ 与 $Pl^{\cap}_{C^K}:\mathcal{P}(U)\rightarrow[0,1]$ 分别为 $U$ 上的信任函数与似然函数，对应的 mass 函数为：

$$m^{\cap}_{C^K}(X)=\begin{cases}\dfrac{|\varphi^{\cap}_{C^K}(X)|}{|U|}, & 若\ X\in U/R^{\cap}_{C^K}\\ 0, & 若\ X\notin U/R^{\cap}_{C^K}\end{cases} \tag{36}$$

其中，$\varphi^{\cap}_{C^K}(X)=\{x\in U \mid [x]^{\cap}_{C^K}=X\}$。

**定理 2** 设 $S=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个广义多尺度集值决策系统，$C\subseteq AT$，$K_1\in\mathcal{L}$，$K_2\in\mathcal{L}$，若 $K_1\preceq K_2$，则对于任意 $x\in U$ 与 $X\in\mathcal{P}(U)$，以下结论成立：

1) $R^{\cap}_{C^{K_1}}\subseteq R^{\cap}_{C^{K_2}}$；

2) $[x]^{\cap}_{C^{K_1}}\subseteq[x]^{\cap}_{C^{K_2}}$；

3) $\overline{R^{\cap}_{C^{K_1}}}(X)\subseteq\overline{R^{\cap}_{C^{K_2}}}(X)$；

4) $\underline{R^{\cap}_{C^{K_2}}}(X)\subseteq\underline{R^{\cap}_{C^{K_1}}}(X)$。

证明：1) 对于任意 $(x,y)\in R^{\cap}_{C^{K_1}}$，由 $K_1\preceq K_2$ 及信息粒度变换得：

$$\{(x,y)\in U\times U \mid a_j^{K_1}(x)\cap a_j^{K_1}(y)\neq\varnothing,\forall a_j^{K_1}\in C^{K_1}\}\subseteq$$
$$\{(x,y)\in U\times U \mid a_j^{K_2}(x)\cap a_j^{K_2}(y)\neq\varnothing,\forall a_j^{K_2}\in C^{K_2}\} \tag{37}$$

故有 $(x,y)\in R^{\cap}_{C^{K_2}}$，因此 $R^{\cap}_{C^{K_1}}\subseteq R^{\cap}_{C^{K_2}}$。

2) 由结论 1) 可得。

3) 对于任意 $x\in\overline{R^{\cap}_{C^{K_1}}}(X)$，由上近似的定义知 $[x]^{\cap}_{C^{K_1}}\cap X\neq\varnothing$。又由结论 2) 得 $[x]^{\cap}_{C^{K_1}}\subseteq[x]^{\cap}_{C^{K_2}}$，从而 $[x]^{\cap}_{C^{K_2}}\cap X\neq\varnothing$，即 $x\in\overline{R^{\cap}_{C^{K_2}}}(X)$，因此 $\overline{R^{\cap}_{C^{K_1}}}(X)\subseteq\overline{R^{\cap}_{C^{K_2}}}(X)$。

4) 对于任意 $x\in\underline{R^{\cap}_{C^{K_2}}}(X)$，由下近似的定义知 $[x]^{\cap}_{C^{K_2}}\subseteq X$。又由结论 2) 得 $[x]^{\cap}_{C^{K_1}}\subseteq[x]^{\cap}_{C^{K_2}}$，故 $[x]^{\cap}_{C^{K_1}}\subseteq X$，从而 $x\in\underline{R^{\cap}_{C^{K_1}}}(X)$，因此 $\underline{R^{\cap}_{C^{K_2}}}(X)\subseteq\underline{R^{\cap}_{C^{K_1}}}(X)$。证毕。

**定理 3** 设 $S=(U,\{a_j^k \mid k=1,2,\cdots,I_j,j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d\})$ 是一个广义多尺度集值决策系统，$C\subseteq AT$，$K_1\in\mathcal{L}$，$K_2\in\mathcal{L}$，若 $K_1\preceq K_2$，则 $I(AT^{K_1} \mid d)\geqslant I(AT^{K_2} \mid d)$。

证明：对于任意 $x_i\in U$，由定理 2 知 $[x_i]^{\cap}_{AT^{K_1}}\subseteq[x_i]^{\cap}_{AT^{K_2}}$，故得 $|[x_i]^{\cap}_{AT^{K_1}}\cap[x_i]_d|\leqslant|[x_i]^{\cap}_{AT^{K_2}}\cap[x_i]_d|$，从而：

$$\sum_{i=1}^{|U|}|[x_i]^{\cap}_{AT^{K_1}}\cap[x_i]_d|\leqslant\sum_{i=1}^{|U|}|[x_i]^{\cap}_{AT^{K_2}}\cap[x_i]_d| \tag{38}$$

于是由定义 18 可得 $I(AT^{K_1} \mid d)\geqslant I(AT^{K_2} \mid d)$。证毕。

**定理 4** 设 $S=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个广义多尺度集值决策系统，若 $C\subseteq AT$，$K\in\mathcal{L}$，$X\in\mathcal{P}(U)$，$Y\in\mathcal{P}(U)$，则：

1) $\underline{R^{\cap}_{C^K}}(X)\subseteq X\subseteq\overline{R^{\cap}_{C^K}}(X)$；

2) 若 $X\subseteq Y$，则：

$\underline{R^{\cap}_{C^K}}(X)\subseteq\underline{R^{\cap}_{C^K}}(Y)$，$\overline{R^{\cap}_{C^K}}(X)\subseteq\overline{R^{\cap}_{C^K}}(Y)$；

3) 对于 $K_0=(1,1,\cdots,1)$，$K_m=(I_1,I_2,\cdots,I_m)$，有：

$\underline{R^{\cap}_{C^{K_m}}}(X)\subseteq\underline{R^{\cap}_{C^K}}(X)\subseteq\underline{R^{\cap}_{C^{K_0}}}(X)$；

$\overline{R^{\cap}_{C^{K_0}}}(X)\subseteq\overline{R^{\cap}_{C^K}}(X)\subseteq\overline{R^{\cap}_{C^{K_m}}}(X)$；

$I(C^{K_m})\leqslant I(C^K)\leqslant I(C^{K_0})$。

证明：结论 1) 和 2) 类似于文献[42]可证；结论 3) 类似于定理 2 与定理 3 可直接证明。证毕。

**定理 5** 设 $S=(U,\{a_j^k \mid k=1,2,\cdots,I_j,j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d\})$ 是一个广义多尺度集值决策系统，$C\subseteq AT$，$K_1\in\mathcal{L}$，$K_2\in\mathcal{L}$，若 $K_1 * K_2$，则对于任意 $D\in U/R_d$，有：

1) $\underline{R^{\cap}_{C^{K_1}}}(D)\subseteq D\subseteq\overline{R^{\cap}_{C^{K_1}}}(D)$；

2) $\underline{R^{\cap}_{C^{K_2}}}(D)\subseteq\underline{R^{\cap}_{C^{K_1}}}(D)$；

3) $\overline{R^{\cap}_{C^{K_1}}}(D)\subseteq\overline{R^{\cap}_{C^{K_2}}}(D)$。

证明：结论 1) 类似于文献[42]可证；结论 2) 和 3) 类似于定理 2 可直接证明。证毕。

**推论 1** 设 $S=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个广义多尺度集值决策系统，$C\subseteq AT$，$K_1\in\mathcal{L}$，$K_2\in\mathcal{L}$，且 $K_1\preceq K_2$，则对于任意

$X\in\mathcal{P}(U)$，有：

$$Bel^{\cap}_{C^{K_2}}(X)\leqslant Bel^{\cap}_{C^{K_1}}(X)\leqslant\frac{|X|}{|U|}\leqslant Pl^{\cap}_{C^{K_1}}(X)\leqslant Pl^{\cap}_{C^{K_2}}(X) \tag{39}$$

证明：因为 $K_1\preceq K_2$，由定理 2 知 $\underline{R^{\cap}_{C^{K_2}}}(X)\subseteq\underline{R^{\cap}_{C^{K_1}}}(X)$，从而 $Bel^{\cap}_{C^{K_2}}(X)=P(\underline{R^{\cap}_{C^{K_2}}}(X))\leqslant P(\underline{R^{\cap}_{C^{K_1}}}(X))=Bel^{\cap}_{C^{K_1}}(X)$。因为 $\overline{R^{\cap}_{C^{K_1}}}(X)\subseteq\overline{R^{\cap}_{C^{K_2}}}(X)$，于是 $Pl^{\cap}_{C^{K_1}}(X)=P(\overline{R^{\cap}_{C^{K_1}}}(X))\leqslant P(\overline{R^{\cap}_{C^{K_2}}}(X))=Pl^{\cap}_{C^{K_2}}(X)$。又由于 $\underline{R^{\cap}_{C^{K_1}}}(X)\subseteq X\subseteq\overline{R^{\cap}_{C^{K_1}}}(X)$，故 $P(\underline{R^{\cap}_{C^{K_1}}}(X))\subseteq P(X)\subseteq P(\overline{R^{\cap}_{C^{K_1}}}(X))$，即 $Bel^{\cap}_{C^{K_1}}(X)\leqslant\frac{|X|}{|U|}\leqslant Pl^{\cap}_{C^{K_1}}(X)$，因此：

$$Bel^{\cap}_{C^{K_2}}(X)\leqslant Bel^{\cap}_{C^{K_1}}(X)\leqslant\frac{|X|}{|U|}\leqslant Pl^{\cap}_{C^{K_1}}(X)\leqslant Pl^{\cap}_{C^{K_2}}(X) \tag{40}$$

证毕。

**定义 19** 设 $S=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个广义多尺度集值决策系统，$K_0=(1,1,\cdots,1)\in\mathcal{L}$，若 $R^{\cap}_{AT^{K_0}}\subseteq R_d$，则称 $S$ 是协调的，否则称 $S$ 是不协调的。

## 4 最优尺度组合和属性约简

### 4.1 部分不完备广义多尺度决策系统的最优尺度组合

从本节开始所讨论的广义多尺度集值决策系统都是从一个部分不完备广义多尺度决策系统变换得到的，不再赘述。

**定义 20** 设 $S=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个广义多尺度集值决策系统，$K_0=(1,1,\cdots,1)$，$K\in\mathcal{L}$，则：

1）若 $R^{\cap}_{AT^K}\subseteq R_d$，则称 $S^K$ 关于 $S$ 是协调的，否则称 $S^K$ 关于 $S$ 是不协调的；若 $S^K$ 关于 $S$ 是协调的，且对于满足 $K\prec K_1$ 的任意 $K_1\in\mathcal{L}$，$S^{K_1}$ 关于 $S$ 是不协调的，则称 $K$ 是 $S$ 的一个最优尺度组合。

2）若对于任意 $x\in U$，有 $\underline{R^{\cap}_{AT^K}}([x]_d)=\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}([x]_d)$，则称 $S^K$ 关于 $S$ 是下近似协调的，否则称 $S^K$ 关于 $S$ 不是下近似协调的；若 $S^K$ 关于 $S$ 是下近似协调的，且对于满足 $K\prec K_1$ 的任意 $K_1\in\mathcal{L}$，存在 $z\in U$，使得 $\underline{R^{\cap}_{AT^{K_1}}}([z]_d)\neq\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}([z]_d)$，则称 $K$ 是 $S$ 的一个下近似最优尺度组合。

3）若对于任意 $x\in U$，有 $\overline{R^{\cap}_{AT^K}}([x]_d)=\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}([x]_d)$，则称 $S^K$ 关于 $S$ 是上近似协调的，否则称 $S^K$ 关于 $S$ 不是上近似协调的；若 $S^K$ 关于 $S$ 是上近似协调的，且对于满足 $K\prec K_1$ 的任意 $K_1\in\mathcal{L}$，存在 $z\in U$，使得 $\overline{R^{\cap}_{AT^{K_1}}}([z]_d)\neq\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}([z]_d)$，则称 $K$ 是 $S$ 的一个上近似最优尺度组合。

4）若对于任意 $x\in U$，有 $Bel^{\cap}_{AT^K}([x]_d)=Bel^{\cap}_{AT^{K_0}}([x]_d)$，则称 $S^K$ 关于 $S$ 是信任协调的，否则称 $S^K$ 关于 $S$ 不是信任协调的；若 $S^K$ 关于 $S$ 是信任协调的，且对于满足 $K\prec K_1$ 的任意 $K_1\in\mathcal{L}$，存在 $z\in U$，使得 $Bel^{\cap}_{AT^{K_1}}([z]_d)\neq Bel^{\cap}_{AT^{K_0}}([z]_d)$，则称 $K$ 是 $S$ 的一个信任最优尺度组合。

5）若对于任意 $x\in U$，有 $Pl^{\cap}_{AT^K}([x]_d)=Pl^{\cap}_{AT^{K_0}}([x]_d)$，则称 $S^K$ 关于 $S$ 是似然协调的，否则称 $S^K$ 关于 $S$ 不是似然协调的；若 $S^K$ 关于 $S$ 是似然协调的，且对于满足 $K\prec K_1$ 的任意 $K_1\in\mathcal{L}$，存在 $z\in U$，使得 $Pl^{\cap}_{AT^{K_1}}([z]_d)\neq Pl^{\cap}_{AT^{K_0}}([z]_d)$，则称 $K$ 是 $S$ 的一个似然最优尺度组合。

6）若 $I(AT^K|d)=I(AT^{K_0}|d)$，则称 $S^K$ 关于 $S$ 是信息量协调的，否则称 $S^K$ 关于 $S$ 不是信息量协调的；若 $S^K$ 关于 $S$ 是信息量协调的，且对于满足 $K\prec K_1$ 的任意 $K_1\in\mathcal{L}$，有 $I(AT^{K_1}|d)<I(AT^{K_0}|d)$，则称 $K$ 是 $S$ 的一个信息量最优尺度组合。

**定理 6** 设 $S=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个广义多尺度集值决策系统，$K_0=(1,1,\cdots,1)$，$K\in\mathcal{L}$，则：

1）$S^K$ 关于 $S$ 是下近似协调的，当且仅当 $S^K$ 关于 $S$ 是信任协调的；

2）$K$ 是 $S$ 的一个下近似最优尺度组合，当且仅当 $K$ 是 $S$ 的一个信任最优尺度组合；

3）$S^K$ 关于 $S$ 是上近似协调的，当且仅当 $S^K$ 关于 $S$ 是似然协调的；

4）$K$ 是 $S$ 的一个上近似最优尺度组合，当且仅当 $K$ 是 $S$ 的一个似然最优尺度组合。

证明：1）（必要性）对于任意 $x\in U$，因为 $S^K$ 关于 $S$ 是下近似协调的，所以有 $\underline{R^{\cap}_{AT^K}}([x]_d)=\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}([x]_d)$。取 $D\in U/R_d$ 使得 $[x]_d=D$，即 $\underline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)=\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)$，从而有 $P(\underline{R^{\cap}_{AT^K}}(D))=P(\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D))$，于是 $Bel^{\cap}_{AT^K}(D)=Bel^{\cap}_{AT^{K_0}}(D)$，即 $Bel^{\cap}_{AT^K}([x]_d)=Bel^{\cap}_{AT^{K_0}}([x]_d)$，因此 $S^K$ 关于 $S$ 是信任协调的。

（充分性）对于任意 $x\in U$，因为 $S^K$ 关于 $S$ 是信任协调的，所以 $Bel^{\cap}_{AT^K}([x]_d)=Bel^{\cap}_{AT^{K_0}}([x]_d)$。取 $D\in U/R_d$ 使得 $[x]_d=D$，即 $Bel^{\cap}_{AT^K}(D)=Bel^{\cap}_{AT^{K_0}}(D)$，从而有 $\frac{|\underline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)|}{|U|}=\frac{|\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)|}{|U|}$，于是 $|\underline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)|=|\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)|$。再结合定理 5 的结论 $\underline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)\subseteq\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)$，可以推得 $\underline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)=\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)$，即 $\underline{R^{\cap}_{AT^K}}([x]_d)=\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}([x]_d)$，因此 $S^K$ 关于 $S$ 是下近似协调的。

2）由结论 1）得到。

3）（必要性）对于任意 $x\in U$，因为 $S^K$ 关于 $S$ 是上近似协调的，所以 $\overline{R^{\cap}_{AT^K}}([x]_d)=\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}([x]_d)$。取 $D\in U/R_d$ 使得 $[x]_d=D$，即 $\overline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)=\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)$，从而有 $P(\overline{R^{\cap}_{AT^K}}(D))=P(\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D))$，故得 $Pl^{\cap}_{AT^K}(D)=Pl^{\cap}_{AT^{K_0}}(D)$，即 $Pl^{\cap}_{AT^K}([x]_d)=Pl^{\cap}_{AT^{K_0}}([x]_d)$，因此 $S^K$ 关于 $S$ 是似然协调的。

（充分性）对于任意 $x\in U$，因为 $S^K$ 关于 $S$ 是似然协调的，所以 $Pl^{\cap}_{AT^K}([x]_d)=Pl^{\cap}_{AT^{K_0}}([x]_d)$。取 $D\in U/R_d$ 使得 $[x]_d=D$，即 $Pl^{\cap}_{AT^K}(D)=Pl^{\cap}_{AT^{K_0}}(D)$，从而有 $\frac{|\overline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)|}{|U|}=\frac{|\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)|}{|U|}$，即 $|\overline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)|=|\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)|$。再结合定理 5 的结论 $\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)\subseteq\overline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)$，即可推出 $\overline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)=\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)$，故得 $\overline{R^{\cap}_{AT^K}}([x]_d)=\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}([x]_d)$，因此 $S^K$ 关于 $S$ 是上近似协调的。

4）由结论 3）得到。证毕。

**定理 7** 设 $S=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个广义多尺度集值决策系统，$K_1\in\mathcal{L}$，$K_2\in\mathcal{L}$，且 $K_1\preceq K_2$，若 $S^{K_2}$ 关于 $S$ 是协调的，则 $S^{K_1}$ 关于 $S$ 是协调的。

证明：设 $S^{K_2}$ 关于 $S$ 是协调的，即 $R^{\cap}_{AT^{K_2}}\subseteq R_d$，又由 $K_1\preceq K_2$ 和定理 2 知 $R^{\cap}_{AT^{K_1}}\subseteq R^{\cap}_{AT^{K_2}}$，从而 $R^{\cap}_{AT^{K_1}}\subseteq R_d$，因此 $S^{K_1}$ 关于 $S$ 是协调的。证毕。

下面讨论定义 20 所给出的 6 种最优尺度组合概念之间的关系。

**定理 8** 设 $S=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个协调广义多尺度集值决策系统，$K\in\mathcal{L}$，则 $S^K$ 关于 $S$ 是协调的，当且仅当 $S^K$ 关于 $S$ 是下近似协调的。

证明：(必要性)对于任意 $x\in U$，取 $D\in U/R_d$ 使得 $[x]_d=D$。首先，由定理 5 知，$\underline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)\subseteq D$。其次，对于任意 $y\in[x]_d=D$，由 $[x]_d$ 定义可知，$[y]_d=[x]_d=D$。由于 $S^K$ 关于 $S$ 是协调的，即 $R^{\cap}_{AT^K}\subseteq R_d$，从而 $[y]^{\cap}_{AT^K}\subseteq[y]_d=D$，即 $[y]^{\cap}_{AT^K}\subseteq[x]_d=D$，于是由下近似定义知，$y\in\underline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)$，故有 $D\subseteq\underline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)$，从而证得 $D=\underline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)$。另一方面，由定理 5 的结论 2)知 $\underline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)\subseteq\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)$，从而 $D\subseteq\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)$。再由定理 5 的结论 1)知 $\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)\subseteq D$，因此 $\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)=D=\underline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)$，即 $S^K$ 关于 $S$ 是下近似协调的。

(充分性)对于任意 $y\in U$，取 $D\in U/R_d$ 使得 $[y]_d=D$。由于 $S$ 是协调的，即 $R^{\cap}_{AT^{K_0}}\subseteq R_d$，从而 $[y]^{\cap}_{AT^{K_0}}\subseteq[y]_d=D$。对于任意 $x\in[y]_d=D$，由 $[y]_d$ 定义可知，$[x]_d=[y]_d=D$，故有 $[y]^{\cap}_{AT^{K_0}}\subseteq[x]_d=D$，从而由下近似定义知 $y\in\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)$。又由于 $S^K$ 关于 $S$ 是下近似协调的，因此 $\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)=\underline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)$，故有 $y\in\underline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)$，于是由下近似的定义得 $[y]^{\cap}_{AT^K}\subseteq D=[y]_d$，即 $S^K$ 关于 $S$ 是协调的。证毕。

**定理 9** 设 $S=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个协调广义多尺度集值决策系统，$K\in\mathcal{L}$，$S^K$ 关于 $S$ 是协调的，当且仅当 $S^K$ 关于 $S$ 是上近似协调的。

证明：(必要性)对于任意 $x\in U$，取 $D\in U/R_d$ 使得 $[x]_d=D$。首先，对于任意 $x\in\overline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)$，由上近似定义知 $[x]^{\cap}_{AT^K}\cap D\neq\varnothing$。由于 $S^K$ 关于 $S$ 是协调的，即 $R^{\cap}_{AT^K}\subseteq R_d$，从而 $[x]^{\cap}_{AT^K}\subseteq[x]_d=D$，故有 $[x]^{\cap}_{AT^K}\cap D=[x]^{\cap}_{AT^K}\neq\varnothing$，且对于任意 $D'\in U/R_d$，$D'\neq D$，有 $[x]^{\cap}_{AT^K}\cap D'=\varnothing$。由定理 2 得，$\varnothing\neq[x]^{\cap}_{AT^{K_0}}\subseteq[x]^{\cap}_{AT^K}$，因此 $[x]^{\cap}_{AT^{K_0}}\cap D'=\varnothing$，且 $[x]^{\cap}_{AT^{K_0}}\cap D\neq\varnothing$。由上近似定义知 $x\in\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)$，故得 $\overline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)\subseteq\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)$。其次，由定理 5 的结论 3)得 $\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)\subseteq\overline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)$，于是 $\overline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)=\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)$，因此 $S^K$ 关于 $S$ 是上近似协调的。

(充分性)对于任意 $x\in U$，取 $D\in U/R_d$ 使得 $[x]_d=D$。由于 $S$ 是协调的，即 $R^{\cap}_{AT^{K_0}}\subseteq R_d$，从而可得 $[x]^{\cap}_{AT^{K_0}}\subseteq[x]_d=D$，因此 $[x]^{\cap}_{AT^{K_0}}\cap D=[x]^{\cap}_{AT^{K_0}}\neq\varnothing$，所以 $x\in\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)$。由于 $S^K$ 关于 $S$ 是上近似协调的，因此 $\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D)=\overline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)$，故有 $x\in\overline{R^{\cap}_{AT^K}}(D)$，于是由上近似的定义得 $[x]^{\cap}_{AT^K}\cap D\neq\varnothing$。又由 $S^K$ 关于 $S$ 是上近似协调可知，对于任意 $D'\in U/R_d$，有 $\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D')=\overline{R^{\cap}_{AT^K}}(D')$，从而对于任意 $y\in U$，有：

$$[y]^{\cap}_{AT^K}\cap D'\neq\varnothing\Leftrightarrow[y]^{\cap}_{AT^{K_0}}\cap D'\neq\varnothing \tag{41}$$

由于 $S$ 是协调的，因此 $[x]^{\cap}_{AT^{K_0}}\subseteq D$，且对于满足 $D'\neq D$ 的任意 $D'\in U/R_d$，有：

$$[x]^{\cap}_{AT^{K_0}}\cap D'=\varnothing \tag{42}$$

由于 $[x]^{\cap}_{AT^K}\cap D\neq\varnothing$，于是由式(41)和式(42)可知，对于满足 $D'\neq D$ 的任意 $D'\in U/R_d$，有 $[x]^{\cap}_{AT^K}\cap D'=\varnothing$，因此 $[x]^{\cap}_{AT^K}\cap D=[x]^{\cap}_{AT^K}$，故 $[x]^{\cap}_{AT^K}\subseteq D=[x]_d$，所以 $S^K$ 关于 $S$ 是协调的。证毕。

**定理 10** 设 $S=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个协调广义多尺度集值决策系统，$K_0=(1,1,\cdots,1)$，$K\in\mathcal{L}$，则 $S^K$ 关于 $S$ 是协调的，当且仅当 $S^K$ 关于 $S$ 是信任协调的。

证明：由定理 6 和定理 8 即得。证毕。

**定理 11** 设 $S=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个协调广义多尺度集值决策系统，$K_0=(1,1,\cdots,1)$，$K\in\mathcal{L}$，则 $S^K$ 关于 $S$ 是协调的，当且仅当 $S^K$ 关于 $S$ 是似然协调的。

证明：由定理 6 和定理 9 即得。证毕。

对于协调广义多尺度集值决策系统的一个尺度组合 $K$，$S^K$ 关于 $S$ 是协调的、$S^K$ 关于 $S$ 是下近似协调的、$S^K$ 关于 $S$ 是上近似协调的、$S^K$ 关于 $S$ 是信任协调的和 $S^K$ 关于 $S$ 是似然协调的互为充要条件。6 种最优尺度组合关系具体如图 2 所示。

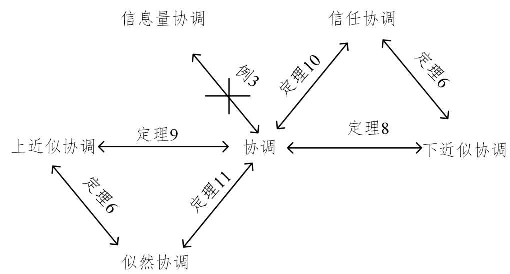


图 2　6 种协调性之间的关系

Fig. 2　Relationships of six different types of consistency

**定义 21** 设 $S=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j,j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d\})$ 是一个广义多尺度集值决策系统，$K\in\mathcal{L}$，$S^K$ 的信任和 $BS^K$ 与似然和 $PS^K$ 分别定义如下：

$$BS^K=\sum_{D\in U/R_d}Bel^{\cap}_{AT^K}(D) \tag{43}$$

$$PS^K=\sum_{D\in U/R_d}Pl^{\cap}_{AT^K}(D) \tag{44}$$

**定理 12** 设 $S=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j,j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d\})$ 是一个广义多尺度集值决策系统，$K\in\mathcal{L}$，$K_0=(1,1,\cdots,1)\in\mathcal{L}$，则：

1)$S^K$ 关于 $S$ 是信任协调的，当且仅当 $BS^K=BS^{K_0}$；

2)$K$ 是 $S$ 的一个信任最优尺度组合，当且仅当 $BS^K=BS^{K_0}$，且对于满足 $K\prec K_1$ 的任意 $K_1\in\mathcal{L}$，有 $BS^{K_1}<BS^{K_0}$；

3)$S^K$ 关于 $S$ 是似然协调的，当且仅当 $PS^K=PS^{K_0}$；

4)$K$ 是 $S$ 的一个似然最优尺度组合，当且仅当 $PS^K=PS^{K_0}$，且对于满足 $K\prec K_1$ 的任意 $K_1\in\mathcal{L}$，有 $PS^{K_1}<PS^{K_0}$。

证明：1)(必要性)根据定义 20 和定义 21 可证。

(充分性)不妨设 $U/R_d=\{D_1,D_2,\cdots,D_r\}$，由于 $BS^K=BS^{K_0}$，由定义 21 可知：

$$\sum_{i=1}^{r}Bel^{\cap}_{AT^K}(D_i)=\sum_{i=1}^{r}Bel^{\cap}_{AT^{K_0}}(D_i) \tag{45}$$

由推论 1 可知，对于任意 $D_i\in U/R_d$：

$$Bel^{\cap}_{AT^K}(D_i)\leqslant Bel^{\cap}_{AT^{K_0}}(D_i) \tag{46}$$

从而：

$$Bel^{\cap}_{AT^K}(D_i)=Bel^{\cap}_{AT^{K_0}}(D_i),\ \forall D_i\in U/R_d \tag{47}$$

因此 $S^K$ 关于 $S$ 是信任协调的。

2)根据定义 20、结论 1)和推论 1 可得；

3)与 4)的证明类似于结论 1)与结论 2)的证明可得。证毕。

例 3(续例 2) 经计算可得 $d$ 的决策类如下：

$[x_1]_d=[x_2]_d=[x_3]_d=[x_4]_d=[x_5]_d=[x_6]_d=[x_7]_d=[x_9]_d=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_9\}$

$[x_8]_d=[x_{10}]_d=[x_{11}]_d=[x_{12}]_d=[x_{13}]_d=[x_{14}]_d=[x_{15}]_d=[x_{16}]_d=[x_{17}]_d=[x_{18}]_d=\{x_8,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18}\}$

则：

$$U/R_d=\{D_1,D_2\}=\{\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_9\},\{x_8,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18}\}\}$$

对于 $K_0=(1,1,1)$，可得 $U$ 关于 $AT^{K_0}$ 的相容类为：

$[x_1]^{\cap}_{AT^{K_0}}=\{x_1,x_2,x_4\}$，$[x_2]^{\cap}_{AT^{K_0}}=\{x_1,x_2,x_4\}$

$[x_3]^{\cap}_{AT^{K_0}}=\{x_3\}$，$[x_4]^{\cap}_{AT^{K_0}}=\{x_1,x_2,x_4\}$

$[x_5]^{\cap}_{AT^{K_0}}=\{x_5\}$，$[x_6]^{\cap}_{AT^{K_0}}=\{x_6\}$，$[x_7]^{\cap}_{AT^{K_0}}=\{x_7\}$

$[x_8]^{\cap}_{AT^{K_0}}=\{x_8\}$，$[x_9]^{\cap}_{AT^{K_0}}=\{x_9\}$，$[x_{10}]^{\cap}_{AT^{K_0}}=\{x_{10}\}$

$[x_{11}]^{\cap}_{AT^{K_0}}=\{x_{11}\}$，$[x_{12}]^{\cap}_{AT^{K_0}}=\{x_{12}\}$

$[x_{13}]^{\cap}_{AT^{K_0}}=\{x_{13}\}$，$[x_{14}]^{\cap}_{AT^{K_0}}=\{x_{14}\}$

$[x_{15}]^{\cap}_{AT^{K_0}}=\{x_{15}\}$，$[x_{16}]^{\cap}_{AT^{K_0}}=\{x_{16}\}$

$[x_{17}]^{\cap}_{AT^{K_0}}=\{x_{17}\}$，$[x_{18}]^{\cap}_{AT^{K_0}}=\{x_{18}\}$

则：

$$U/R^{\cap}_{AT^{K_0}}=\{\{x_3\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_7\},\{x_8\},\{x_9\},\{x_{10}\},\{x_{11}\},\{x_{12}\},\{x_{13}\},\{x_{14}\},\{x_{15}\},\{x_{16}\},\{x_{17}\},\{x_{18}\},\{x_1,x_2,x_4\}\}$$

由于 $R^{\cap}_{AT^{K_0}}\subseteq R_d$，因此 $S$ 是协调的。

1)计算 $S$ 的一个最优尺度组合。

对于 $K_7=(1,3,1)$，经计算有：

$[x_1]^{\cap}_{AT^{K_7}}=\{x_1,x_2,x_4\}=[x_2]^{\cap}_{AT^{K_7}}$，$[x_3]^{\cap}_{AT^{K_7}}=\{x_3,x_4\}$

$[x_4]^{\cap}_{AT^{K_7}}=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$[x_5]^{\cap}_{AT^{K_7}}=\{x_5\}$

$[x_6]^{\cap}_{AT^{K_7}}=\{x_6,x_7\}=[x_7]^{\cap}_{AT^{K_7}}$，$[x_8]^{\cap}_{AT^{K_7}}=\{x_8\}$

$[x_9]^{\cap}_{AT^{K_7}}=\{x_9\}$，$[x_{10}]^{\cap}_{AT^{K_7}}=\{x_{10}\}$

$[x_{11}]^{\cap}_{AT^{K_7}}=\{x_{11}\}$，$[x_{12}]^{\cap}_{AT^{K_7}}=\{x_{12},x_{13}\}=[x_{13}]^{\cap}_{AT^{K_7}}$

$[x_{14}]^{\cap}_{AT^{K_7}}=\{x_{14}\}$，$[x_{15}]^{\cap}_{AT^{K_7}}=\{x_{15}\}$

$[x_{16}]^{\cap}_{AT^{K_7}}=\{x_{16}\}$，$[x_{17}]^{\cap}_{AT^{K_7}}=\{x_{17}\}$

$[x_{18}]^{\cap}_{AT^{K_7}}=\{x_{18}\}$

则：

$$U/R^{\cap}_{AT^{K_7}}=\{\{x_5\},\{x_8\},\{x_9\},\{x_{10}\},\{x_{11}\},\{x_{14}\},\{x_{15}\},\{x_{16}\},\{x_{17}\},\{x_{18}\},\{x_3,x_4\},\{x_6,x_7\},\{x_{12},x_{13}\},\{x_1,x_2,x_4\},\{x_1,x_2,x_3,x_4\}\}$$

于是 $R^{\cap}_{AT^{K_7}}\subseteq R_d$，因此 $S^{K_7}$ 关于 $S$ 是协调的。

对于 $K_{11}=(2,3,1)$，经计算有：

$[x_1]^{\cap}_{AT^{K_{11}}}=\{x_1,x_2,x_4,x_{14}\}$，$[x_2]^{\cap}_{AT^{K_{11}}}=\{x_1,x_2,x_4\}$

$[x_3]^{\cap}_{AT^{K_{11}}}=\{x_3,x_4\}$，$[x_4]^{\cap}_{AT^{K_{11}}}=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$

$[x_5]^{\cap}_{AT^{K_{11}}}=\{x_5\}$，$[x_6]^{\cap}_{AT^{K_{11}}}=\{x_6,x_7\}=[x_7]^{\cap}_{AT^{K_{11}}}$

$[x_8]^{\cap}_{AT^{K_{11}}}=\{x_8\}$，$[x_9]^{\cap}_{AT^{K_{11}}}=\{x_9\}$

$[x_{10}]^{\cap}_{AT^{K_{11}}}=\{x_{10}\}$，$[x_{11}]^{\cap}_{AT^{K_{11}}}=\{x_{11},x_{15},x_{16}\}$

$[x_{12}]^{\cap}_{AT^{K_{11}}}=\{x_{12},x_{13}\}$，$[x_{13}]^{\cap}_{AT^{K_{11}}}=\{x_{12},x_{13}\}$

$[x_{14}]^{\cap}_{AT^{K_{11}}}=\{x_1,x_{14}\}$，$[x_{15}]^{\cap}_{AT^{K_{11}}}=\{x_{11},x_{15}\}$

$[x_{16}]^{\cap}_{AT^{K_{11}}}=\{x_{11},x_{16}\}$，$[x_{17}]^{\cap}_{AT^{K_{11}}}=\{x_{17},x_{18}\}$

$[x_{18}]^{\cap}_{AT^{K_{11}}}=\{x_{17},x_{18}\}$

则：

$$U/R^{\cap}_{AT^{K_{11}}}=\{\{x_5\},\{x_8\},\{x_9\},\{x_{10}\},\{x_3,x_4\},\{x_6,x_7\},\{x_1,x_{14}\},\{x_{12},x_{13}\},\{x_{11},x_{15}\},\{x_{11},x_{16}\},\{x_{17},x_{18}\},\{x_{11},x_{15},x_{16}\},\{x_1,x_2,x_4\},\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\{x_1,x_2,x_4,x_{14}\}\}$$

于是 $R^{\cap}_{AT^{K_{11}}}\not\subseteq R_d$，因此 $S^{K_{11}}$ 关于 $S$ 是不协调的。

对于 $K_{13}=(1,3,2)$，经计算有：

$[x_1]^{\cap}_{AT^{K_{13}}}=\{x_1,x_2,x_4\}=[x_2]^{\cap}_{AT^{K_{13}}}$

$[x_3]^{\cap}_{AT^{K_{13}}}=\{x_3,x_4\}$，$[x_4]^{\cap}_{AT^{K_{13}}}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_8,x_{14}\}$

$[x_5]^{\cap}_{AT^{K_{13}}}=\{x_5\}$，$[x_6]^{\cap}_{AT^{K_{13}}}=\{x_6,x_7\}=[x_7]^{\cap}_{AT^{K_{13}}}$

$[x_8]^{\cap}_{AT^{K_{13}}}=\{x_4,x_8\}$，$[x_9]^{\cap}_{AT^{K_{13}}}=\{x_9\}$

$[x_{10}]^{\cap}_{AT^{K_{13}}}=\{x_{10}\}$，$[x_{11}]^{\cap}_{AT^{K_{13}}}=\{x_{11}\}$

$[x_{12}]^{\cap}_{AT^{K_{13}}}=\{x_{12},x_{13}\}=[x_{13}]^{\cap}_{AT^{K_{13}}}$

$[x_{14}]^{\cap}_{AT^{K_{13}}}=\{x_4,x_{14}\}$，$[x_{15}]^{\cap}_{AT^{K_{13}}}=\{x_{15}\}$

$[x_{16}]^{\cap}_{AT^{K_{13}}}=\{x_{16}\}$，$[x_{17}]^{\cap}_{AT^{K_{13}}}=\{x_{17}\}$

$[x_{18}]^{\cap}_{AT^{K_{13}}}=\{x_{18}\}$

则：

$$U/R^{\cap}_{AT^{K_{13}}}=\{\{x_5\},\{x_9\},\{x_{10}\},\{x_{11}\},\{x_{15}\},\{x_{16}\},\{x_{17}\},\{x_{18}\},\{x_3,x_4\},\{x_4,x_8\},\{x_6,x_7\},\{x_{12},x_{13}\},\{x_4,x_{14}\},\{x_1,x_2,x_4\},\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_8,x_{14}\}\}$$

于是 $R^{\cap}_{AT^{K_{13}}}\not\subseteq R_d$，因此 $S^{K_{13}}$ 关于 $S$ 是不协调的。

由于尺度组合的格 $(K,\preceq,\wedge,\vee)$ 中(见图 1)严格比 $K_7=(1,3,1)$ 粗的尺度组合的父节点只有 $K_{11}=(2,3,1)$ 与 $K_{13}=(1,3,2)$，因此 $K_7=(1,3,1)$ 是 $S$ 的一个最优尺度组合。

2)计算 $S$ 的一个下近似最优尺度组合。

对于 $K_0=(1,1,1)$，有：

$\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D_1)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_9\}$

$\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D_2)=\{x_8,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18}\}$

对于 $K_7=(1,3,1)$，有：

$\underline{R^{\cap}_{AT^{K_7}}}(D_1)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_9\}=\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D_1)$

$\underline{R^{\cap}_{AT^{K_7}}}(D_2)=\{x_8,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18}\}=\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D_2)$

因此，$S^{K_7}$ 关于 $S$ 是下近似协调的。

对于 $K_{11}=(2,3,1)$，有：

$\underline{R^{\cap}_{AT^{K_{11}}}}(D_1)=\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_9\}\neq\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D_1)$

$\underline{R^{\cap}_{AT^{K_{11}}}}(D_2)=\{x_8,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18}\}\neq\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D_2)$

因此，$S^{K_{11}}$ 关于 $S$ 不是下近似协调的。

对于 $K_{13}=(1,3,2)$，有：

$\underline{R^{\cap}_{AT^{K_{13}}}}(D_1)=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_9\}\neq\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D_1)$

$\underline{R^{\cap}_{AT^{K_{13}}}}(D_2)=\{x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18}\}\neq\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D_2)$

因此，$S^{K_{13}}$ 关于 $S$ 不是下近似协调的。

综上，由于尺度组合的格 $(K,\preceq,\wedge,\vee)$ 中(见图 1)严格

比 $K_7=(1,3,1)$粗的尺度组合的父节点只有 $K_{11}=(2,3,1)$与 $K_{13}=(1,3,2)$,因此 $K_7=(1,3,1)$是 $S$ 的一个下近似最优尺度组合。

3)计算 $S$ 的一个上近似最优尺度组合。

对于 $K_0=(1,1,1)$,有:

$\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D_1)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_9\}$

$\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D_2)=\{x_8,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18}\}$

对于 $K_7=(1,3,1)$,有:

$\overline{R^{\cap}_{AT^{K_7}}}(D_1)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_9\}=\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D_1)$

$$\begin{aligned}\overline{R^{\cap}_{AT^{K_7}}}(D_2)&=\{x_8,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18}\}\\&=\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D_2)\end{aligned}$$

因此,$S^{K_7}$ 关于 $S$ 是上近似协调的。

对于 $K_{11}=(2,3,1)$,有:

$$\begin{aligned}\overline{R^{\cap}_{AT^{K_{11}}}}(D_1)&=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_9,x_{14}\}\\&\neq\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{R^{\cap}_{AT^{K_{11}}}}(D_2)&=\{x_1,x_8,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18}\}\\&\neq\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D_2)\end{aligned}$$

因此,$S^{K_{11}}$ 关于 $S$ 不是上近似协调的。

对于 $K_{13}=(1,3,2)$,有:

$$\begin{aligned}\overline{R^{\cap}_{AT^{K_{13}}}}(D_1)&=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{14}\}\\&\neq\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{R^{\cap}_{AT^{K_{13}}}}(D_2)&=\{x_4,x_8,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18}\}\\&\neq\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D_2)\end{aligned}$$

因此,$S^{K_{13}}$ 关于 $S$ 不是上近似协调的。

综上,由于尺度组合的格($K$,≤,∧,∨)中(见图 1)严格比 $K_7=(1,3,1)$粗的尺度组合的父节点只有 $K_{11}=(2,3,1)$与 $K_{13}=(1,3,2)$,因此 $K_7=(1,3,1)$是 $S$ 的一个上近似最优尺度组合。

4)计算 $S$ 的一个信任最优尺度组合。

对于 $K_0=(1,1,1)$,其信任函数如下:

$$Bel^{\cap}_{AT^{K_0}}(D_1)=\frac{|\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D_1)|}{|U|}=\frac{8}{18}$$

$$Bel^{\cap}_{AT^{K_0}}(D_2)=\frac{|\underline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D_2)|}{|U|}=\frac{10}{18}$$

计算其信任和为:

$$BS^{K_0}=\sum_{D\in U/R_d}Bel^{\cap}_{AT^{K_0}}(D)=1$$

对于 $K_7=(1,3,1)$,其信任函数如下:

$$Bel^{\cap}_{AT^{K_7}}(D_1)=\frac{|\underline{R^{\cap}_{AT^{K_7}}}(D_1)|}{|U|}=\frac{8}{18}$$

$$Bel^{\cap}_{AT^{K_7}}(D_2)=\frac{|\underline{R^{\cap}_{AT^{K_7}}}(D_2)|}{|U|}=\frac{10}{18}$$

计算其信任和为:

$$BS^{K_7}=\sum_{D\in U/R_d}Bel^{\cap}_{AT^{K_7}}(D)=1=BS^{K_0}$$

因此,$S^{K_7}$ 关于 $S$ 是信任协调的。

对于 $K_{11}=(2,3,1)$,其信任函数如下:

$$Bel^{\cap}_{AT^{K_{11}}}(D_1)=\frac{|\underline{R^{\cap}_{AT^{K_{11}}}}(D_1)|}{|U|}=\frac{7}{18}$$

$$Bel^{\cap}_{AT^{K_{11}}}(D_2)=\frac{|\underline{R^{\cap}_{AT^{K_{11}}}}(D_2)|}{|U|}=\frac{9}{18}$$

计算其信任和为:

$$BS^{K_{11}}=\sum_{D\in U/R_d}Bel^{\cap}_{AT^{K_{11}}}(D)=\frac{16}{18}<BS^{K_0}$$

因此,$S^{K_{11}}$ 关于 $S$ 不是信任协调的。

对于 $K_{13}=(1,3,2)$,其信任函数如下:

$$Bel^{\cap}_{AT^{K_{13}}}(D_1)=\frac{|\underline{R^{\cap}_{AT^{K_{13}}}}(D_1)|}{|U|}=\frac{7}{18}$$

$$Bel^{\cap}_{AT^{K_{13}}}(D_2)=\frac{|\underline{R^{\cap}_{AT^{K_{13}}}}(D_2)|}{|U|}=\frac{8}{18}$$

计算其信任和为:

$$BS^{K_{13}}=\sum_{D\in U/R_d}Bel^{\cap}_{AT^{K_{13}}}(D)=\frac{15}{18}<BS^{K_0}$$

因此,$S^{K_{13}}$ 关于 $S$ 不是信任协调的。

综上,由于尺度组合的格($K$,≤,∧,∨)中(见图 1)严格比 $K_7=(1,3,1)$粗的尺度组合的父节点只有 $K_{11}=(2,3,1)$与 $K_{13}=(1,3,2)$,因此 $K_7=(1,3,1)$是 $S$ 的一个信任最优尺度组合。

5)计算 $S$ 的一个似然最优尺度组合。

对于 $K_0=(1,1,1)$,其似然函数如下:

$$Pl^{\cap}_{AT^{K_0}}(D_1)=\frac{|\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D_1)|}{|U|}=\frac{8}{18}$$

$$Pl^{\cap}_{AT^{K_0}}(D_2)=\frac{|\overline{R^{\cap}_{AT^{K_0}}}(D_2)|}{|U|}=\frac{10}{18}$$

计算其似然和为:

$$PS^{K_0}=\sum_{D\in U/R_d}Pl^{\cap}_{AT^{K_0}}(D)=1$$

对于 $K_7=(1,3,1)$,其似然函数如下:

$$Pl^{\cap}_{AT^{K_7}}(D_1)=\frac{|\overline{R^{\cap}_{AT^{K_7}}}(D_1)|}{|U|}=\frac{8}{18}$$

$$Pl^{\cap}_{AT^{K_7}}(D_2)=\frac{|\overline{R^{\cap}_{AT^{K_7}}}(D_2)|}{|U|}=\frac{10}{18}$$

计算其似然和为:

$$PS^{K_7}=\sum_{D\in U/R_d}Pl^{\cap}_{AT^{K_7}}(D)=1=PS^{K_0}$$

因此,$S^{K_7}$ 关于 $S$ 是似然协调的。

对于 $K_{11}=(2,3,1)$,其似然函数如下:

$$Pl^{\cap}_{AT^{K_{11}}}(D_1)=\frac{|\overline{R^{\cap}_{AT^{K_{11}}}}(D_1)|}{|U|}=\frac{9}{18}$$

$$Pl^{\cap}_{AT^{K_{11}}}(D_2)=\frac{|\overline{R^{\cap}_{AT^{K_{11}}}}(D_2)|}{|U|}=\frac{11}{18}$$

计算其似然和为:

$$PS^{K_{11}}=\sum_{D\in U/R_d}Pl^{\cap}_{AT^{K_{11}}}(D)=\frac{20}{18}>PS^{K_0}$$

因此,$S^{K_{11}}$ 关于 $S$ 不是似然协调的。

对于 $K_{13}=(1,3,2)$,其似然函数如下:

$$Pl^{\cap}_{AT^{K_{13}}}(D_1)=\frac{|\overline{R^{\cap}_{AT^{K_{13}}}}(D_1)|}{|U|}=\frac{10}{18}$$

$$Pl^{\cap}_{AT^{K_{13}}}(D_2)=\frac{|\overline{R^{\cap}_{AT^{K_{13}}}}(D_2)|}{|U|}=\frac{11}{18}$$

计算其似然和为:

$$PS^{K_{13}}=\sum_{D\in U/R_d}Pl^{\cap}_{AT^{K_{13}}}(D)=\frac{21}{18}>PS^{K_0}$$

因此,$S^{K_{13}}$ 关于 $S$ 不是似然协调的。

综上，由于尺度组合的格$(\mathcal{K},\preceq,\wedge,\vee)$中(见图1)严格比$K_7=(1,3,1)$粗的尺度组合的父节点只有$K_{11}=(2,3,1)$与$K_{13}=(1,3,2)$，因此$K_7=(1,3,1)$是$S$的一个似然最优尺度组合。

6)计算$S$的一个信息量最优尺度组合。

对于$K_0=(1,1,1)$，经计算有：

$$I(AT^{K_0}\mid d)=\frac{75}{81}$$

对于$K_8=(1,2,2)$，经计算有：

$$I(AT^{K_8}\mid d)=\frac{75}{81}=I(AT^{K_0}\mid d)$$

因此，$S^{K_8}$关于$S$是信息量协调的。

对于$K_{12}=(2,2,2)$，经计算有：

$$I(AT^{K_{12}}\mid d)=\frac{149}{162}<I(AT^{K_0}\mid d)$$

因此，$S^{K_{12}}$关于$S$不是信息量协调的。

对于$K_{13}=(1,3,2)$，经计算有：

$$I(AT^{K_{13}}\mid d)=\frac{49}{54}<I(AT^{K_0}\mid d)$$

因此，$S^{K_{13}}$关于$S$不是信息量协调的。

综上，由于尺度组合的格$(\mathcal{K},\preceq,\wedge,\vee)$中(见图1)严格比$K_8=(1,2,2)$粗的尺度组合的父节点只有$K_{12}=(2,2,2)$与$K_{13}=(1,3,2)$，因此$K_8=(1,2,2)$是$S$的一个信息量最优尺度组合。

对于$K_8=(1,2,2)$，经计算有：

$$[x_1]^{\cap}_{AT^{K_8}}=\{x_1,x_2,x_4\}=[x_2]^{\cap}_{AT^{K_8}},[x_3]^{\cap}_{AT^{K_8}}=\{x_3\}$$
$$[x_4]^{\cap}_{AT^{K_8}}=\{x_1,x_2,x_4,x_{14}\},[x_5]^{\cap}_{AT^{K_8}}=\{x_5\}$$
$$[x_6]^{\cap}_{AT^{K_8}}=\{x_6\},[x_7]^{\cap}_{AT^{K_8}}=\{x_7\},[x_8]^{\cap}_{AT^{K_8}}=\{x_8\}$$
$$[x_9]^{\cap}_{AT^{K_8}}=\{x_9\},[x_{10}]^{\cap}_{AT^{K_8}}=\{x_{10}\}$$
$$[x_{11}]^{\cap}_{AT^{K_8}}=\{x_{11}\},[x_{12}]^{\cap}_{AT^{K_8}}=\{x_{12}\}$$
$$[x_{13}]^{\cap}_{AT^{K_8}}=\{x_{13}\},[x_{14}]^{\cap}_{AT^{K_8}}=\{x_4,x_{14}\}$$
$$[x_{15}]^{\cap}_{AT^{K_8}}=\{x_{15}\},[x_{16}]^{\cap}_{AT^{K_8}}=\{x_{16}\}$$
$$[x_{17}]^{\cap}_{AT^{K_8}}=\{x_{17}\},[x_{18}]^{\cap}_{AT^{K_8}}=\{x_{18}\}$$

则：

$$U/R^{\cap}_{AT^{K_8}}=\{\{x_3\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_7\},\{x_8\},\{x_9\},\{x_{10}\},\{x_{11}\},\{x_{12}\},\{x_{13}\},\{x_{15}\},\{x_{16}\},\{x_{17}\},\{x_{18}\},\{x_4,x_{14}\},\{x_1,x_2,x_4\},\{x_1,x_2,x_4,x_{14}\}\}$$

于是$R^{\cap}_{AT^{K_8}}\not\subseteq R_d$，因此$S^{K_8}$关于$S$是不协调的，故$K_8=(1,2,2)$不是$S$的一个最优尺度组合。

对于$K_7=(1,3,1)$，经计算有：

$$I(AT^{K_7}\mid d)=\frac{49}{54}<I(AT^{K_0}\mid d)$$

因此$S^{K_7}$关于$S$不是信息量协调的，故$K_7=(1,3,1)$不是$S$的一个信息量最优尺度组合，但根据1)计算知其为$S$的一个最优尺度组合。

综上，信息量最优尺度组合与其余5种最优尺度组合没有固定的关系，例如$K_7=(1,3,1)$是$S$的一个最优尺度组合，但它不是$S$的一个信息量最优尺度组合，$K_8=(1,2,2)$是$S$的一个信息量最优尺度组合，但它不是$S$的一个最优尺度组合。

## 4.2 部分不完备广义多尺度决策系统的属性约简

本节在最优尺度组合基础上讨论部分不完备广义多尺度决策系统的属性约简问题。以保持决策类信任度不变的最优信任约简为例进行叙述，其他几种类型的最优尺度约简的定义与计算可类似讨论。

**定义22** 设$S=(U,AT\cup\{d\})$是一个集值决策系统，$C\subseteq AT$，对于任意$D\in U/R_d$，有$Bel^{\cap}_{C}(D)=Bel^{\cap}_{AT}(D)$，则称$C$是$S$的一个信任协调集。进一步地，若对于任意$b\in C$，$Bel^{\cap}_{C-\{b\}}(D)\neq Bel^{\cap}_{AT}(D)$，则称$C$是$S$的一个信任约简。

**定义23** 设$S=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j,j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d\})$是一个协调广义多尺度集值决策系统，$C\subseteq AT$，$K\in\mathcal{L}$，若$K$是$S$的一个信任最优尺度组合，对于任意$D\in U/R_d$，有$Bel^{\cap}_{C^K}(D)=Bel^{\cap}_{AT^K}(D)$，则称$C$是$S$在最优尺度组合$K$下的一个信任协调集。进而，若对于任意$b\in C$，$Bel^{\cap}_{C^K-\{b^K\}}(D)\neq Bel^{\cap}_{AT^K}(D)$，则称$C$是$S^K$的一个信任约简，简称$C$是$S$的一个最优信任约简。

**定义24** 设$S=(U,\{a_j^k\mid k=1,2,\cdots,I_j,j=1,2,\cdots,m\}\cup\{d\})$是一个协调广义多尺度集值决策系统，$K\in\mathcal{L}$，且$K$是$S$的一个最优尺度组合，$C\subseteq AT$，若$a_j^{l_j}\in C^K$，定义$a_j^{l_j}$在$C^K$中关于$d$的内重要度为：

$$sig_{\mathrm{in}}(a_j^{l_j},C^K,d)=\sum_{D\in U/R_d}Bel^{\cap}_{C^K}(D)-\sum_{D\in U/R_d}Bel^{\cap}_{C^K-\{a_j^{l_j}\}}(D) \tag{48}$$

信任核$Core_{Bel^K}$是所有信任约简的交集，易证：

$$Core_{Bel^K}=\{a_j^{l_j}\in C^K\mid sig_{\mathrm{in}}(a_j^{l_j},C^K,d)>0\} \tag{49}$$

通过增添某些属性，能够将信任核扩充成为一个信任约简$C^K$，直至满足：

$$\sum_{D\in U/R_d}Bel^{\cap}_{C^K}(D)=BS^{K_0}(U/R_d)$$

例4(续例3) 已知$K_7=(1,3,1)$是$S$的一个信任最优尺度组合，且$BS^{K_7}=\sum_{D\in U/R_d}Bel^{\cap}_{AT^{K_7}}(D)=1$。

1)设$C_1^{K_7}=\{a_2^3,a_3^1\}$，有$\sum_{D\in U/R_d}Bel^{\cap}_{C_1^{K_7}}(D)=\frac{7}{9}$，故：

$$sig_{\mathrm{in}}(a_1^1,C_1^{K_7},d)=BS^{K_7}-\sum_{D\in U/R_d}Bel^{\cap}_{C_1^{K_7}}(D)=\frac{2}{9}>0$$

2)设$C_2^{K_7}=\{a_1^1,a_3^1\}$，有$\sum_{D\in U/R_d}Bel^{\cap}_{C_2^{K_7}}(D)=1$，故：

$$sig_{\mathrm{in}}(a_2^3,C_2^{K_7},d)=BS^{K_7}-\sum_{D\in U/R_d}Bel^{\cap}_{C_2^{K_7}}(D)=0$$

3)设$C_3^{K_7}=\{a_1^1,a_2^3\}$，有$\sum_{D\in U/R_d}Bel^{\cap}_{C_3^{K_7}}(D)=\frac{4}{9}$，故：

$$sig_{\mathrm{in}}(a_3^1,C_3^{K_7},d)=BS^{K_7}-\sum_{D\in U/R_d}Bel^{\cap}_{C_3^{K_7}}(D)=\frac{5}{9}>0$$

综上可得，$S$在$K_7$上的信任核为$\{a_1^1,a_3^1\}$。

设$A_1^{K_7}=\{a_1^1\}$，有$\sum_{D\in U/R_d}Bel^{\cap}_{A_1^{K_7}}(D)=\frac{5}{18}\neq BS^{K_7}$；

设$A_2^{K_7}=\{a_3^1\}$，有$\sum_{D\in U/R_d}Bel^{\cap}_{A_2^{K_7}}(D)=\frac{7}{9}\neq BS^{K_7}$；

设$A_3^{K_7}=\{a_1^1,a_3^1\}$，有$\sum_{D\in U/R_d}Bel^{\cap}_{A_3^{K_7}}(D)=1=BS^{K_7}$；

故$A_3^{K_7}=\{a_1^1,a_3^1\}$为$S$的一个最优信任约简。

**结束语** 在广义多尺度粗糙集数据分析模型中，最优尺度选择和属性约简是知识表示与知识获取的关键。针对部分不完备广义多尺度决策系统，首先将其转换为一个广义多尺度集值决策系统，然后通过定义不同尺度组合下的相容关系

将论域粒化，获得相应的信息粒集合，并进一步给出了决策类关于条件属性子集的下近似与上近似以及信任函数与似然函数等，用于刻画不确定概念的定性和定量指标。其次，利用证据理论和信息量给出了在转换后系统中的 6 种最优尺度组合的定义，并证明了它们之间的强弱关系。这为进一步研究部分不完备多尺度数据的知识获取问题奠定了理论基础。

在后续的研究中，一方面，可以探索不协调部分不完备多尺度数据的相关理论问题；另一方面，可以进一步讨论部分不完备多尺度数据的特征提取、决策知识获取以及相关不确定性分析等问题。

## 参 考 文 献


[1] PEDRYC Z W. Granular computing for data analytics: a manifesto of human-centric computing[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2018, 5(6): 1025-1034.

[2] LIN T Y. Granular computing: structures, representations, and applications[C]// Proceedings of the 9th International Conference on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular Computing. Berlin: Springer, 2003: 16-24.

[3] ZADEH L A. Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 90(2): 111-127.

[4] HOBBS J R. Granularity[C]// Proceedings of the 9th International Joint Conference on Artificial Intelligence. San Francisco: Morgan Kaufmann, 1985: 432-435.

[5] YAO Y Y. Granular computing: basic issues and possible solutions[C]// Proceedings of the 5th Joint Conference on Information Sciences. New Jersey: Association for Intelligent Machinery, 2000: 186-189.

[6] YAO J T. Information granulation and granular relationships [C]// 2005 IEEE International Conference on Granular Computing. IEEE, 2005: 326-329.

[7] MENCAR C, FANELLI A M. Interpretability constraints for fuzzy information granulation[J]. Information Sciences, 2008, 178(24): 4585-4618.

[8] PEDRYCZ W. Granular computing for machine learning: pursuing new development horizons[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2025, 55(1): 460-471.

[9] DENG X Y, LI J H, QIAN Y H, et al. An emerging incremental fuzzy concept-cognitive learning model based on granular computing and conceptual knowledge clustering[J]. IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence, 2024, 8(3): 2417-2432.

[10] XUE R X, YI S C, WANG P X. GBDEN: a fast clustering algorithm for large-scale data based on granular ball[J]. Computer Science, 2024, 51(12): 166-173.

[11] JING X Y, ZHAO J J, YAN Z, et al. Granular classifier: building traffic granules for encrypted traffic classification based on granular computing[J]. Digital Communications and Networks, 2024, 10(5): 1428-1438.

[12] ZHANG L J, LIN G P, LIN Y D, et al. Feature subset selection for multi-scale neighborhood decision information system[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2023, 36(1): 49-59.

[13] CHEN B Y, YUAN Z, PENG D Z, et al. Integrating granular computing with density estimation for anomaly detection in high-dimensional heterogeneous data[J]. Information Sciences, 2025, 690: 121566.

[14] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.

[15] LI W, WANG X L, YANG B. Three-way decisions with dual hesitant fuzzy covering-based rough set and their applications in medical diagnosis [J]. Applied Soft Computing, 2024, 160: 111695.

[16] HAN N N, QIAO J S, LI T B, et al. Multigranulation fuzzy probabilistic rough sets induced by overlap functions and their applications[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2024, 481: 108893.

[17] YE J, SUN B Z, CHU X L, et al. Valued outranking relation-based heterogeneous multi-decision multigranulation probabilistic rough set and its use in medical decision-making[J]. Expert Systems with Applications, 2023, 228: 120296.

[18] JIANG H B, HU B Q. On four novel kinds of fuzzy β-covering-based rough sets and their applications to three-way approximations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2025, 507: 109312.

[19] WANG X, HUANG B. Rough set model based on fuzzy purity granular ball [J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2025, 38(3): 221-232.

[20] JI X, DUAN W Y, PENG J H, et al. Fuzzy rough set attribute reduction based on decision ball model[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2025, 179: 109364.

[21] XU J C, ZHANG S, BAI Q, et al. Attribute reduction algorithm based on fuzzy neighborhood relative decision entropy[J]. Computer Science, 2025, 52(2): 165-172.

[22] MA L W, LI M F. Covering rough set models, fuzzy rough set models and soft rough set models induced by covering similarity [J]. Information Sciences, 2025, 689: 121520.

[23] WU W Z, LEUNG Y. Theory and applications of granular labelled partitions in multi-scale decision tables[J]. Information Sciences, 2011, 181(18): 3878-3897.

[24] LI F, HU B Q. A new approach of optimal scale selection to multi-scale decision tables[J]. Information Sciences, 2017, 381: 193-208.

[25] DEMPSTER A P. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping[J]. The Annals of Mathematical Statistics, 1967, 38(2): 325-339.

[26] SHAFER G. A Mathematical Theory of Evidence[M]. Princeton: Princeton University Press, 1976.

[27] ZHANG M, XU L D, ZHANG W X, et al. A rough set approach to knowledge reduction based on inclusion degree and evidence reasoning theory[J]. Expert Systems, 2003, 20(5): 298-304.

[28] WU W Z. Attribute reduction based on evidence theory in incomplete decision systems [J]. Information Sciences, 2008, 178(5): 1355-1371.

[29] WU W Z, LEUNG Y. Optimal scale selection for multi-scale decision tables[J]. International Journal of Approximate Reason-

ing,2013,54(8):1107-1129.

[30] MA J M,ZHANG W X. Information quantity-based attribute reduction in set-valued information systems[J]. Fuzzy Systems and Mathematics,2013,27(2):177-182.

[31] GUAN Y Y,WANG H K. Set-valued information systems[J]. Information Sciences,2006,176(17):2507-2525.

[32] QIAN Y H,DANG C Y,LIANG J Y,et al. Set-valued ordered information systems[J]. Information Sciences,2009,179(16):2809-2832.

[33] HUANG Y D,ZHANG Y J,XU J F. Incremental approaches for optimal scale selection in dynamic multi-scale set-valued decision tables[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics,2023,14(6):2251-2270.

[34] HU J,CHEN Y,ZHANG Q H,et al. Optimal scale selection for generalized multi-scale set-valued decision systems[J]. Journal of Computer Research and Development,2022,59(9):2027-2038.

[35] KRYSZKIEWICZ M. Rough set approach to incomplete information systems[J]. Information Sciences,1998,112(1/2/3/4):39-49.

[36] KRYSZKIEWICZ M. Rules in incomplete information systems[J]. Information Sciences,1999,113(3/4):271-292.

[37] WU W Z,QIAN Y H,LI T J,et al. On rule acquisition in incomplete multi-scale decision tables[J]. Information Sciences,2017,378:282-302.

[38] SONG Y,LUO D M,XIE N X,et al. Uncertainty measurement for incomplete set-valued data with application to attribute reduction[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics,2022,13(10):3031-3069.

[39] WANG X X,YIN F,YIN M,et al. Incomplete generalized multi-scale ordered information systems and optimal scale combination selection[C]// 2023 3rd International Symposium on Computer Technology and Information Science(ISCTIS). IEEE,2023:796-802.

[40] WANG T Y,YANG B. Optimal scale selection of dynamic incomplete generalized multi-scale fuzzy ordered decision systems based on rough fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,2025,515:109420.

[41] LIANG J Y,QU K S,XU Z B. Reduction of attribute in information systems [J]. Systems Engineering-Theory & Practice,2001(12):76-80.

[42] ZHU K,WU W Z,LIU M X. Optimal scale combinations and attribute reduction for consistent generalized multi-scale ordered fuzzy decision systems[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence,2024,37(6):538-556.

**ZHOU Shilin**, born in 2002, postgraduate. His main research interests include rough sets and granular computing.

**WU Weizhi**, born in 1964, Ph.D, professor, is a member of CCF(No. 09246S). His main research interests include rough sets, granular computing, data mining and artificial intelligence.

(责任编辑:李亚辉)