



计算机科学

COMPUTER SCIENCE

一阶逻辑中一类多线型标准矛盾体的结构

曾丹, 何星星, 李莹芳, 李天瑞

引用本文

曾丹, 何星星, 李莹芳, 李天瑞. 一阶逻辑中一类多线型标准矛盾体的结构[J]. 计算机科学, 2025, 52(12): 200-208.

ZENG Dan, HE Xingxing, LI Yingfang, LI Tianrui. Structures of Multi-line Standard Contradictions in First-order Logic [J]. Computer Science, 2025, 52(12): 200-208.

相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

基于高频特征掩蔽的对抗攻击算法

High-frequency Feature Masking-based Adversarial Attack Algorithm

计算机科学, 2025, 52(10): 374-381. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.241000030>

基于动态平衡和距离抑制的点云语义分割主动学习

Active Learning for Point Cloud Semantic Segmentation Based on Dynamic Balance and Distance Suppression

计算机科学, 2025, 52(8): 180-187. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.240900104>

基于深度对比孪生网络的事件辨重方法

Deep Contrastive Siamese Network Based Repeated Event Identification

计算机科学, 2024, 51(12): 30-36. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.240300025>

基于季节分解的混合神经网络的时间序列预测

Time Series Prediction of Hybrid Neural Networks Based on Seasonal Decomposition

计算机科学, 2024, 51(11A): 231200008-7. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.231200008>

基于注意力机制和双分支网络的胸部疾病分类

Classification of Thoracic Diseases Based on Attention Mechanisms and Two-branch Networks

计算机科学, 2024, 51(11A): 230900116-6. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.230900116>

一阶逻辑中一类多线型标准矛盾体的结构

曾丹¹ 何星星¹ 李莹芳² 李天瑞³

¹ 西南交通大学数学学院 成都 611756

² 西南财经大学计算机与人工智能学院 成都 611130

³ 西南交通大学计算机与人工智能学院 成都 611756

(2654596400@qq.com)

摘要 自动推理是人工智能的重要研究领域,推理规则是影响其效率的关键因素。基于矛盾体分离的演绎推理是一种可靠且完备的推理规则,具有多文字、多子句协同和动态演绎等优势。矛盾体构造方法对演绎效率至关重要。基于此,提出基于命题逻辑一类矛盾体结构——多线型标准矛盾体,给出此类矛盾体在不同情况下的复合策略,即利用两个多线型标准矛盾体生成新的标准矛盾体的条件与方法,并对复合性质上的共性结论和特性结论进行区分;指出通过向子句添加特定文字,多线型标准矛盾体可以转换为更多条线的标准矛盾体,并给出此类矛盾体的文字添加策略;设计在命题逻辑中生成多线型标准矛盾体的算法;给出双线型矛盾体及完全标准矛盾体基于一阶逻辑的结构与性质。

关键词: 命题逻辑;一阶逻辑;标准矛盾体;多线型标准矛盾体;复合策略;文字添加策略

中图分类号 TP181

Structures of Multi-line Standard Contradictions in First-order Logic

ZENG Dan¹, HE Xingxing¹, LI Yingfang² and LI Tianrui³

¹ School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China

² School of Computing and Artificial Intelligence, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130, China

³ School of Computing and Artificial Intelligence, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China

Abstract Automatic reasoning constitutes a critical research domain in artificial intelligence, where inference rules play a pivotal role in determining its efficiency. Deductive reasoning based on the separation of contradictions represents a reliable and complete inference rule, offering advantages such as multi-literal collaboration, multi-clause integration, and dynamic deduction. The construction method of contradictions significantly impacts the efficiency of deduction. In light of this, this paper first introduces a type of contradiction structure grounded in propositional logic, i. e., multi-line standard contradictions, and elaborates on the compound strategies for such contradictions under various scenarios. Specifically, it outlines the conditions and methods for generating new standard contradictions by leveraging two multi-line standard contradictions, while distinguishing between common and characteristic conclusions regarding their compound properties. Secondly, the paper highlights that incorporating specific literals into clauses can transform multi-line standard contradictions into more streamlined linear standard contradictions, providing literals addition strategies tailored to such contradictions. Additionally, an algorithm for generating multi-line standard contradictions within propositional logic is designed. Finally, the structure and properties of double-line contradictions and complete standard contradictions based on first-order logic are presented.

Keywords Propositional logic, First-order logic, Standard contradiction, Multi-lines standard contradiction, Composite strategy, Literals addition strategy

到稿日期:2025-02-17 返修日期:2025-05-06

基金项目:国家自然科学基金(12102369);中央高校基本科研业务费专项资金(2682024ZTPY041);四川省科技计划项目(2024YFHZ031);成都市科技项目(2023-RK00-00080-ZF)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(12102369), Fundamental Research Funds for the Central Universities (2682024ZTPY041), Science and Technology Support Project of Sichuan Province (2024YFHZ031) and Science and Technology Project Supported by Chengdu Government(2023-RK00-00080-ZF).

通信作者:李莹芳(liyf@swufe.edu.cn)

1 引言

自动推理是人工智能的一个重要分支,它利用计算机程序模拟人类的推理过程,是从已知事实或前提中推导出新结论的技术。自动推理通过形式化建模人类逻辑认知过程,使得机器能够理解和解释人类语言,解决问题,进行规划和决策,为知识表示、逻辑推演及定理证明等关键任务提供数学基础^[1]。推理规则的构造与优化,是提升自动推理效率的关键因素。基于 Herbrand 定理提出的归结原理,标志着自动定理证明从理论探索迈向实践^[2-3]。此后,自动定理证明技术历经多阶段演进,如 Vampire^[4](等词处理和混合推理框架)、E^[5](支持高阶逻辑扩展)和 iProver^[6](混合推理引擎)等。

连接演算(Connection Calculus)^[7]作为另一重要推理范式,在处理复杂问题时面临回溯爆炸与搜索空间失控的挑战。Otten^[8]通过引入正则性约束与回溯限制机制,减少了冗余搜索步骤,并通过子句化转换优化连接密度计算。Wernhard 团队进一步突破传统局部推理模式,提出基于全局证明对象分析的 Łukasiewicz 问题最短证明生成方法^[9],并构建了一阶逻辑插值计算的理论体系^[10]。Färber 等^[11]将 Skolem 化过程与机器学习兼容,为机器学习与逻辑证明的结合奠定了基础。

尽管归结方法得到了不断的改进,但二元文字和子句处理方式导致其在处理复杂定理时,归结式数量呈组合爆炸。为此,Xu 等^[12]提出基于标准矛盾体分离的演绎理论,通过多元文字和子句协同推理降低其状态空间。Cao 等^[13]融合 CSE 与 E 证明器架构开发的矛盾体分离演绎算法,在 TPTP 高难度问题集上将证明率提升了 28%。Liu 等^[14]将启发式策略优化与子句完全重用机制用于矛盾体分离推理算法中^[15],基于该算法开发的证明器在国际自动定理证明器竞赛中持续保持前四位的性能优势^[16-18]。

基于矛盾体分离的演绎推理过程首先令多个文字和子句动态参与演绎,然后删去子句集中的矛盾体,最后将剩余文字的析取作为分离式参与下一轮演绎。因此,矛盾体的识别与构造决定了演绎的效率。然而,若按照矛盾体定义验证,计算复杂度高,不能直接用于逻辑演算规则,矛盾体的结构和快速构造算法成为该演绎推理方法研究的重点。基于此,Tang 等^[19]建立了完全和最小标准矛盾体理论框架。He 等^[20]提出正则矛盾体构造的充要条件。Li 等^[21]给出复合矛盾体生成的多策略方法。Zang 等^[22]提出一种复合正则标准矛盾体,得到了生成新矛盾体的多个复合策略。Wang 等^[23]提出将多个标准矛盾体生成文字块矛盾型,通过添加互补矛盾集得到矛盾体。然而,现有矛盾体研究仍存在一些问题亟待解决,如矛盾体结构单一,构造策略局限于命题逻辑,一阶逻辑扩展尚未突破。

针对上述问题,本文提出一类多线型标准矛盾体的构造方法,主要工作包括:提出多线型标准矛盾体结构,并给出其复合策略、文字添加策略,设计生成扩展型多线型标准矛盾体的算法;将双线型矛盾体与完全标准矛盾体推广至具有函数依赖性的谓词逻辑系统,并给出当子句集包含仅由函数变项

构成的单子句时构成标准矛盾体的特定条件。

2 预备知识

命题逻辑中,初始符号包括命题变元、逻辑连接词和辅助符号,初始符号按规则递归生成命题逻辑公式。称命题变元为原子,原子或原子的非为文字,两个互补的文字为互补对,有限个文字的析取为子句,子句集 S 为 S 中所有子句合取构成的公式。

定义 1^[12] 设子句集 $S = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}, \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ 的笛卡尔积 $\prod_{i=1}^m B_i = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_m$ 是所有有序元组 (p_1, p_2, \dots, p_m) 的集合,其中, $p_i \in B_i (i=1, 2, \dots, m)$ 。

定义 2^[12] 设有子句集 $S = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$,若任意有序元组 $(p_1, p_2, \dots, p_m) \in \prod_{i=1}^m B_i$ 至少存在一个互补对,则称子句集 S 是标准矛盾体。

定义 3^[24] 设 D 是非空个体名称集合,定义在 D^n 上取值为 $\{T, F\}$ 的 n 元函数,称为 n 元命题函数或 n 元谓词。其中, D^n 表示集合 D 的 n 次笛卡尔乘积。

定义 4^[24] 设 S 是子句集,从 S 推出子句 C 的一个演绎是如下一个有限子句序列:

$$C_1, C_2, \dots, C_k$$

其中, C_i 或者是 S 中的子句,或者是 C_j 和 $C_r (j < i, r < i)$ 的归结式。

一阶逻辑中的初始符号包括常量符号、变量符号、函数符号和谓词符号。

定义 5^[24] 一阶逻辑中,项递归定义如下:

- (1) 常量符号是项;
- (2) 变量符号是项;
- (3) 若 f 是 n 元函数符号, t_1, \dots, t_n 是项,则 $f(t_1, \dots, t_n)$ 是项;

- (4) 所有项都是有限次使用(1)–(3)生成的符号串。

定义 6^[24] 一阶逻辑中,若 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 n 元谓词符号, t_1, \dots, t_n 是项,则 $P(t_1, \dots, t_n)$ 是原子。

定义 7^[24] 一阶逻辑公式中的公式可被递归定义为:

- (1) 原子是公式;
- (2) 若 H, G 是公式,则 $(\sim H), (H \wedge G), (H \vee G), (H \rightarrow G), (H \leftrightarrow G)$ 是公式;
- (3) 若 G 是公式, x 是 G 中的自由变元,则 $(\forall x)G, (\exists x)G$ 是公式;
- (4) 所有的公式均通过有限次使用(1)–(3)构造。

定义 8^[25] 一阶逻辑中,对于任意项 s 和 t ,以及任意个体变项 x ,“用 t 代入 s 中的 x ”或“对 s 中的 x 代入 t ”,都是指用 t 替换 s 中所有出现的 x 。用 $s(t/x)$ 表示用 t 代入 s 中的 x 的结果。

3 命题逻辑中多线型标准矛盾体结构

3.1 多线型标准矛盾体

定义 9 设 $S = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ 是命题逻辑中的子句集,

含有文字 P_1, P_2, \dots, P_{m-1} 。若存在唯一的文字 $P_i \in \{P_1, P_2, \dots, P_{m-1}\}$, 使得对任意 $C_j (1 \leq j \leq m)$, 有 $P_i \in C_j$ 或 $\sim P_i \in C_j$, 则称 P_i 为 S 的代表元。

定理 1 设 $S = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ 是命题逻辑中的子句集, 含有 $m-1$ 个文字 P_1, P_2, \dots, P_{m-1} 。 S 的代表元为 P_1 , 若满足:

- (1) $P_1 \in C_1$ 且 $\sim P_1 \in C_2$;
- (2) 对任意 $P_i (i \neq 1), P_i \in C_{i-1}$;
- (3) 令 $l = 2n + i - 1 (n \in \{1, 2, \dots, k-1\})$ 。当 $P_1 \in C_{i-1}$ 时, 对任意的 C_l 有 $\sim P_i, P_1 \in C_l$; 当 $\sim P_1 \in C_{i-1}$ 时, 对任意的 C_l 有 $\sim P_i, \sim P_1 \in C_l$ 。则 S 是标准矛盾体。

证明: 不失一般性, 仅证明 $k=3$ 时, 结论成立。当 $m=5$ 时, $C_1 = \{P_1, P_2\}, C_2 = \{\sim P_1, P_3\}, C_3 = \{P_1, \sim P_2, P_4\}, C_4 = \{\sim P_1, \sim P_3\}, C_5 = \{P_1, \sim P_2, \sim P_4\}$ 。显然, S 是标准矛盾体。

假设当 $m=K$ 时, S_K 是标准矛盾体。下证 $m=K+1$ 时, S_{K+1} 是标准矛盾体。根据 m 的奇偶, 可以分成两种情况进行讨论。

当 m 为奇数时, $C_m = \{\sim P_{m-1}, \sim P_{m-3}, P_1\}$ 。对任意有序元组 $(p_1, p_2, \dots, p_m) \in \prod_{i=1}^m C_i$, 由 S 的结构可知, $p_m = \sim P_{m-1}$ 或 P_1 或 $\sim P_{m-3}$ 。此时, 若 $p_m = \sim P_{m-1}$, 当 $p_{m-2} = P_{m-1}$ 时, (p_1, p_2, \dots, p_m) 存在互补对 $\sim P_{m-1}$ 和 P_{m-1} 。当 $p_{m-2} \neq P_{m-1}$ 时, 令 $C'_{m-2} = C_m / \{P_{m-1}\}, S' = \{C_1, C_2, \dots, C_{m-3}, C'_{m-2}, C_{m-1}\} = S_K$ 。由于 S_K 是标准矛盾体, 因此 $(p_1, p_2, \dots, p_{m-1})$ 至少存在一个互补对, 进而 (p_1, p_2, \dots, p_m) 存在互补对。若 $p_m = P_1$, 根据条件, 对任意 $P_i (i \neq 1)$, 当 $\sim P_1 \in C_{i-1}$ 时, 对任意 $C_l \subseteq S (l = 2n - i + 1, n \in \{1, 2\})$, 有 $\sim P_i, \sim P_1 \in C_l$ 。对于任意含 $\sim P_1$ 的子句, $(p_1, p_2, \dots, p_{m-1})$ 中要么取到 $\sim P_1$, 要么取到一对互补对。因此, (p_1, p_2, \dots, p_m) 存在一对互补对。若 $p_m = \sim P_{m-3}$, 考虑 p_{m-2} 是否为 P_{m-1} 。如果 $p_{m-2} \neq P_{m-1}$, 令 $C'_{m-2} = C_m / \{P_{m-1}\}$, 则子句集 $S' = \{C_1, C_2, \dots, C_{m-3}, C'_{m-2}, C_{m-1}\} = S_K$ 。由于 S_K 是标准矛盾体, 因此 $(p_1, p_2, \dots, p_{m-1})$ 至少存在一个互补对, 进而 (p_1, p_2, \dots, p_m) 存在一对互补对。如果 $p_{m-2} = P_{m-1}$, 由 $p_m = \sim P_{m-3}$, 令 $C'_{m-2} = \{\sim P_{m-3}\}$, 则有 $S' = \{C_1, C_2, \dots, C_{m-3}, C'_{m-2}, C_{m-1}\}$, 易得子句集 S' 是 S_K 中的倒数第二个子句删除两个文字的子句集 (由于 S_K 是标准矛盾体, 对其删除文字但没有删除子句)。因此, S' 是标准矛盾体, $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_{m-3}, p_{m-1}, p_m)$ 含有互补对, 从而 (p_1, p_2, \dots, p_m) 存在互补对。

当 m 为偶数时, 类似可证。因此, $m=K+1$ 时, S_{K+1} 也是标准矛盾体。根据数学归纳法, 结论成立。

从结构中发现上述子句集在形式下含有 k 条“线”, 定理 1 为正规 k -线型标准矛盾体提供了构造性定义。

定义 10 设 $S = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ 是命题逻辑中的子句集, 含有文字 P_1, P_2, \dots, P_{m-1} 。 S 的代表元为 P_1 , 若满足:

- (1) $P_1 \in C_1$ 且 $\sim P_1 \in C_2$;
- (2) 对任意 $P_i (i \neq 1), P_i \in C_{i-1}$;
- (3) 令 $l = 2n + i - 1 (n \in \{1, 2, \dots, k-1\})$ 。当 $P_1 \in C_{i-1}$

时, 对任意的 C_l 有 $\sim P_i, P_1 \in C_l$; 当 $\sim P_1 \in C_{i-1}$ 时, 对任意的 C_l 有 $\sim P_i, \sim P_1 \in C_l$ 。则称 S 是正规 k -线型标准矛盾体。

例 1 设 $S = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 是正规 3-线型标准矛盾体。根据定义 10, $C_1 = \{P_1, P_2\}, C_2 = \{\sim P_1, P_3\}$, 对于 $C_i (3 \leq i \leq n-1)$, 当 i 为奇数时, $C_i = \{P_1, P_{i+1}, \sim P_{i-1}, \sim P_{i-3}\}$; 反之, 当 i 为偶数时, $C_i = \{\sim P_1, P_{i+1}, \sim P_{i-1}, \sim P_{i-3}\}$ 。 C_{n-1} 和 C_n 根据 n 的奇偶性而有不同的形式。当 n 为奇数时, $C_{n-1} = \{\sim P_1, \sim P_{n-2}, \sim P_{n-4}\}, C_n = \{P_1, \sim P_{n-3}, \sim P_{n-1}\}$; 当 n 为偶数, $C_{n-1} = \{P_1, \sim P_{n-2}, \sim P_{n-4}\}, C_n = \{\sim P_1, \sim P_{n-3}, \sim P_{n-1}\}$ 。

当正规多线型标准矛盾体的“线”存在不完整时, 仍然是标准矛盾体, 称这样的子句集为扩展多线型标准矛盾体。

定义 11 设 $S = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ 是命题逻辑中的子句集, 含有文字 P_1, P_2, \dots, P_{m-1} 。 S 的代表元为 P_1 , 若满足:

- (1) $P_1 \in C_1$ 且 $\sim P_1 \in C_2$;
- (2) 对任意 $P_i (i \neq 1), P_i \in C_{i-1}$;
- (3) 令 $l = 2n + i - 1 (n \in \{1, 2, \dots, k-1\})$ 。当 $P_1 \in C_{i-1}$

时, 存在 C_l 使得 $\sim P_i, P_1 \in C_l$; 当 $\sim P_1 \in C_{i-1}$ 时, 存在 C_l 使得 $\sim P_i, \sim P_1 \in C_l$ 。则称 S 是扩展 k -线型标准矛盾体。

扩展 k -多线型标准矛盾体可以由正规 k -多线型标准矛盾体删除某些子句中的文字得到。由于存在代表元, 因此删除文字后的子句不是空子句。显然, 扩展 k -多线型标准矛盾体是标准矛盾体。将包含线的数量最多的正规多线型标准矛盾体, 称为满态正规多线型标准矛盾体。

推论 1 设 S 是含有 n 个子句的满态正规多线型标准矛盾体, 一共含 x 条线:

$$x = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ 是偶数} \\ \frac{n+1}{2}, & n \text{ 是奇数} \end{cases}$$

证明: 根据满态正规多线型标准矛盾体的结构直接可得。若 $S = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 是 k -正规多线型标准矛盾体, 则有 $2 \leq k \leq x$ 。其中, 当 n 为偶数时, $x = \frac{n}{2}$; 当 n 为奇数时, $x = \frac{n+1}{2}$ 。

3.2 多线型标准矛盾体的复合

引理 1 设 $S = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 是 k -线型标准矛盾体, 由文字 P_1, P_2, \dots, P_{n-1} 组成, 其中 $P_1, \sim P_1$ 是 S 的代表元。删掉一对互补文字 (非代表元) 后, 得到的子句集 S' 是含冗余子句的标准矛盾体。

证明: 设删去的一对文字是 $P_{i+1}, \sim P_{i+1} (i \geq 2)$, 如果 $i+1 \in \{2, 3, n-2, n-1\}$, 显然易证。

若 $i+1 \in \{4, 5, \dots, n-3\}$, 由定义可知 $P_{i+1} \in C_i, \sim P_{i+1} \in C_{i+2}, \sim P_{i+1} \in C_{i+4}$ 。令 $C'_i = C_i / \{P_{i+1}\}, C'_{i+2} = C_{i+2} / \{\sim P_{i+1}\}, C'_{i+4} = C_{i+4} / \{\sim P_{i+1}\}$, 则 $S' = \{C_1, C_2, \dots, C'_i, C_{i+1}, C'_{i+2}, C_{i+3}, C'_{i+4}, \dots, C_n\}$, 由于 3 线型标准矛盾体不含冗余子句, 因此 $C_1 \times \dots \times C_i \times C_{i+1} \times C_{i+3} \times \dots \times C_n$ 存在不含互补对的有序元组, 易证有序元组含 P_{i+1} 。那么 $C_1 \times \dots \times C'_i \times C_{i+1} \times$

$C_{i+3} \times C_{i+5} \times \cdots \times C_n$ 的任意有序元组都含互补对,根据定义可知子句集 $\{C_1, \dots, C_i', C_{i+1}, C_{i+3}, C_{i+5}, \dots, C_n\}$ 是标准矛盾体,则 S' 是含冗余子句的标准矛盾体。

其他情况,类似可证。

将两个多线型标准矛盾体进行复合,下面给出 k -多线型标准矛盾体的一些共性结论。

命题 1 假设 $S_1 = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 和 $S_2 = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ 是两个不含相同文字的 k -线型标准矛盾体,从 S_1 和 S_2 中各选取一个子句,复合得到新子句,其和剩余子句一起组成的新子句集是标准矛盾体。

证明:(反证法)不妨设选取的子句是 A_n, B_1 ,下证子句集 $S = \{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n \vee B_1, B_2, \dots, B_m\}$ 是标准矛盾体。假设子句集 S 不是标准矛盾体,则存在 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1} \times (A_n \vee B_1) \times B_2 \times \cdots \times B_m$ 的有序元组 $(p_1, p_2, \dots, p_{m+n-1})$ 不存在互补对。根据条件,要么有 $p_n \in A_n$,要么有 $p_n \in B_1$ 。如果 $p_n \in A_n$,那么 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 的有序元组 (p_1, p_2, \dots, p_n) 不存在互补对,这与 S_1 是标准矛盾体矛盾;如果 $p_n \in B_1$,那么 $B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m$ 的有序元组 $(p_n, p_{n+1}, \dots, p_{m+n-1})$ 不存在互补对,这与 S_2 是标准矛盾体矛盾。因此,有序元组 $(p_1, p_2, \dots, p_{m+n-1})$ 存在互补对, S 是标准矛盾体。

其他复合情况,类似可证。

注 1 设 S_1 和 S_2 是两个不含相同文字的 k -线型标准矛盾体,从 S_1 和 S_2 中各选取 2 个子句,将这些子句两两复合获得两个新子句,再和其他子句组成新的子句集 S ,那么子句集 S 不是标准矛盾体。

在注 1 的情况下,删除某些文字后,可得标准矛盾体。

命题 2 假设 $S_1 = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 和 $S_2 = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ 是两个不含相同文字的 k -线型标准矛盾体,从 S_1 和 S_2 中各选取 2 个子句,将这个子句两两复合获得两个新子句,再与其他子句组成新的子句集,并删除 S_1 中的代表元或者 S_2 中的代表元,得到的子句集 S 是标准矛盾体。

证明:不妨设删除的文字是 S_2 中的代表元 P_1 ,为了叙述方便,令 $S = \{A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, A_{n-1} \vee B_1, A_n \vee B_2, B_3, \dots, B_m\}$,其他情况类似可证。假设删除 S_2 中的代表元后得到的子句集 S 不是标准矛盾体。根据定义, $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-2} \times (A_{n-1} \vee B_1) \times (A_n \vee B_2) \times B_3 \times \cdots \times B_m$ 存在有序元组 $(p_1, p_2, \dots, p_{m+n-2})$ 不存在互补对。由 S_1 是标准矛盾体,可知 $p_{n-1} \notin A_{n-1}$ 或 $p_n \notin A_n$ 。因为如果 $p_{n-1} \in A_{n-1}$ 且 $p_n \in A_n$,那么 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-2} \times A_{n-1} \times A_n$ 存在有序元组 (p_1, p_2, \dots, p_n) ,不含互补对,这与 S_1 是标准矛盾体矛盾。

如果 $p_{n-1} \notin A_{n-1}$,那么 $p_{n-1} \in B_1$,则 $B_1 \times B_3 \times \cdots \times B_m$ 含有序元组 $(p_{n-1}, p_{n+1}, \dots, p_{m+n-2})$,不含互补对。由于 S 中删去了 S_2 中的代表元 P_1 , $(p_{n-1}, p_{n+1}, \dots, p_{m+n-2})$ 中不存在 P_1 和 $\sim P_1$ 。根据 k -线型标准矛盾体的定义,有 $P_1 \in B_2$,那么 $B_1 \times B_2 \times B_3 \times \cdots \times B_m$ 存在有序元组 $(p_{n-1}, \sim P_1, p_{n+1}, \dots, p_{m+n-2})$,不含互补对,这与 S_2 是标准矛盾体矛盾。

如果 $p_n \notin A_n$,那么 $p_n \in B_2$,则 $B_2 \times B_3 \times \cdots \times B_m$ 存在有序元组 $(p_n, p_{n+1}, \dots, p_{m+n-2})$,不存在互补对。由于 S 中删去了

S_2 中的代表元 P_1 ,因此 $(p_n, p_{n+1}, \dots, p_{m+n-2})$ 中不存在 P_1 和 $\sim P_1$ 。根据 k -线型标准矛盾体的定义,有 $P_1 \in B_1$,那么 $B_1 \times B_2 \times B_3 \times \cdots \times B_m$ 存在有序元组 $(P_1, p_n, p_{n+1}, \dots, p_{m+n-2})$ 不含互补对,这与 S_2 是标准矛盾体矛盾。

综上所述, $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-2} \times A_{n-1} \vee B_1 \times A_n \vee B_2 \times B_3 \times \cdots \times B_m$ 的任意有序元组 $(p_1, p_2, \dots, p_{m+n-2})$ 都存在互补对,那么 S 是标准矛盾体。

定理 2 假设 $S_1 = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 和 $S_2 = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ 是两个不含相同文字的 k -线型标准矛盾体,从 S_1 中任取 2 个子句,从 S_2 中取出 B_1, B_2 或者 B_{m-1}, B_m ,将这些子句两两复合获得两个新子句,再与其他子句组成新的子句集 S 。 S 是标准矛盾体的充要条件是从中删除了 S_1 或 S_2 的代表元。

证明:充分性根据命题 2 直接可得,仅证明必要性。不妨设 S_1 中的代表元留下,下面讨论 S_2 中的代表元在各个子句中的情况。令 $S = \{A_1, \dots, A_{n-2}, A_{n-1} \vee B_1, A_n \vee B_2, B_3, \dots, B_m\}$,其他情况类似可证。对于 S_2 中的代表元 P_1 :

(1) 如果 $P_1 \in A_{n-1} \vee B_1$,由多线型标准矛盾体的性质可知, $\{B_3, B_4, \dots, B_m\}$ 应含有 $k-1$ 条负文字的线,因此 $B_3 \times \cdots \times B_m$ 存在有序元组 $(p_{n+1}, \dots, p_{m+n-2})$ 不含互补对,其中 $p_{n+1}, \dots, p_{m+n-2}$ 各不相同且不等于 $P_1, \sim P_1$ 。由于 S_1 是不含冗余子句的标准矛盾体,因此 $A_1 \times \cdots \times A_{n-2} \times A_n$ 至少存在一个有序元组 $(p_1, \dots, p_{n-2}, p_n)$ 不含互补对。因为 S_1 和 S_2 不含相同文字,所以存在 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-2} \times (A_{n-1} \vee B_1) \times (A_n \vee B_2) \times B_3 \times \cdots \times B_m$ 存在有序元组 $(p_1, \dots, p_{n-2}, P_1, p_n, p_{n+1}, \dots, p_{m+n-2})$ 不含互补对,则 S 不是标准矛盾体。

(2) 如果 $\sim P_1 \in A_n \vee B_2$,从(1)可知 $B_3 \times \cdots \times B_m$ 存在有序元组 $(p_{n+1}, \dots, p_{m+n-2})$ 不含互补对,其中 $p_{n+1}, \dots, p_{m+n-2}$ 各不相同且不等于 $P_1, \sim P_1$ 。由于 S_1 是不含冗余子句的标准矛盾体,因此 $A_1 \times \cdots \times A_{n-2} \times A_{n-1}$ 至少存在一个有序元组 $(p_1, \dots, p_{n-2}, p_{n-1})$ 不含互补对。因为 S_1 和 S_2 不含相同文字,所以存在 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-2} \times (A_{n-1} \vee B_1) \times (A_n \vee B_2) \times B_3 \times \cdots \times B_m$ 存在有序元组 $(p_1, \dots, p_{n-2}, p_{n-1}, \sim P_1, p_{n+1}, \dots, p_{m+n-2})$ 不含互补对,则 S 不是标准矛盾体。

(3) 如果 B_3 中存在 S_2 中的代表元未删去,那么 $P_1 \in B_3$,由(1)可知, $B_3 \times \cdots \times B_m$ 中存在有序元组 $(p_{n+1}, p_{n+2}, \dots, p_{m+n-2})$ 不含互补对,其中 $p_{n+1}, p_{n+2}, \dots, p_{m+n-2}$ 各不相同且不等于 $P_1, \sim P_1$ 。由多线型标准矛盾体的定义可知, $\sim p_{n+1} \in B_1$ 。因此,在 $B_1 \times B_3 \times B_4 \times \cdots \times B_m$ 中存在一个有序元组 $(\sim p_{n+1}, P_1, p_{n+2}, \dots, p_{m+n-2})$ 不含互补对。由于 S_1 是不含冗余子句的标准矛盾体,因此 $A_1 \times \cdots \times A_{n-2} \times A_n$ 至少存在一个有序元组 $(p_1, \dots, p_{n-2}, p_n)$ 不含互补对。因为 S_1 和 S_2 不含相同文字,所以存在 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-2} \times (A_{n-1} \vee B_1) \times (A_n \vee B_2) \times B_3 \times \cdots \times B_m$ 存在有序元组 $(p_1, \dots, p_{n-2}, \sim p_{n+1}, P_1, p_{n+2}, \dots, p_{m+n-2})$ 不含互补对,则 S 不是标准矛盾体。如果 B_4 中存在 S_2 中的代表元未删去,证明类似。

(4) 如果存在 B_i ($5 \leq i \leq m$),使得 $P_1 \in B_i$ 或 $\sim P_1 \in B_i$ 。根据 k -线型标准矛盾体的性质, $\sim P_{i-1} \in B_i$,从而有 $P_{i-1} \in B_{i-2}, \sim P_{i-3} \in B_{i-2}$ 。

若 i 是偶数, 到最后有 $P_3 \in B_2$, 易得出 $B_2 \times B_3 \times B_4 \times B_5 \times \dots \times B_{i-2} \times B_{i-1} \times B_i \times B_{i+1} \times B_{i+2} \times \dots \times B_m$ 存在有序元组 $(P_3, \sim P_2, P_5, \sim P_4, \dots, P_{i-1}, \sim P_{i-2}, \sim P_1, \sim P_i, \sim P_{i+1}, \dots, \sim P_{m-1})$ 不含互补对。由于 S_1 是不含冗余子句的标准矛盾体, 因此 $A_1 \times \dots \times A_{n-2} \times A_{n-1}$ 至少存在一个有序元组 $(p_1, \dots, p_{n-2}, p_{n-1})$ 不含互补对。因为 S_1 和 S_2 不含相同文字, 所以 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-2} \times (A_{n-1} \vee B_1) \times (A_n \vee B_2) \times B_3 \times \dots \times B_m$ 存在有序元组 $(p_1, \dots, p_{n-1}, P_3, \sim P_2, \dots, P_{i-1}, \sim P_{i-2}, \sim P_1, \dots, \sim P_{m-1})$ 不含互补对, 则 S 不是标准矛盾体。

如果 i 是奇数, 类似可证。

注 2 设 S_1 和 S_2 是两个不含相同文字的 k -线型标准矛盾体, 从 S_1 和 S_2 中各选取 3 个子句, 将这些子句两两复合获得两个新子句, 再与其他子句组成新的子句集, 即使删除 S_1 中的代表元或者 S_2 中的代表元, 得到的子句集 S 不是标准矛盾体。

对于两个具有相同代表元 P_1 且无其他公共文字的多线型标准矛盾体, 复合后的子句要么含有两个相同文字, 要么同时含有 $P_1, \sim P_1$ 。由于不能生成重言式, 因此复合后的子句必然含有两个 P_1 或 $\sim P_1$, 称复合子句的代表元是 p_1 或 $\sim p_1$ 。

命题 3 假设 $S_1 = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 和 $S_2 = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ 是两个具有相同代表元 P_1 且无其他公共文字的多线型标准矛盾体, 从 S_1 和 S_2 中各选取一个子句进行复合, 复合子句和其他子句组成的子句集是标准矛盾体。

证明: 与命题 1 类似可证。

定理 3 假设 $S_1 = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 和 $S_2 = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ 是两个具有相同代表元 P_1 且无其他公共文字的多线型标准矛盾体, 从 S_1 和 S_2 中各选取两个子句, 两两进行复合。那么, 复合得到的子句集 S 是标准矛盾体的充要条件是两个复合子句的代表元一个是 P_1 且另一个是 $\sim P_1$ 。

证明: (充分性) 令 $S = \{A_1, \dots, A_{n-2}, A_{n-1} \vee B_1, A_n \vee B_2, B_3, \dots, B_m\}$ 。实际上, 这种复合只有当 n 是偶数时成立, 因为当 n 是奇数时, $P_1 \in A_n, \sim P_1 \in B_2$, 则 A_n 与 B_2 是无法进行复合的。假设 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-2} \times (A_{n-1} \vee B_1) \times (A_n \vee B_2) \times B_3 \times \dots \times B_m$ 的任意一个有序元组为 $(p_1, p_2, \dots, p_{n+m-2})$, 考虑 p_{n-1}, p_n 。如果有有序元组不含互补对, 要么 $p_{n-1} \in A_{n-1}$ 且 $p_n \in B_2$, 要么 $p_{n-1} \in B_1$ 且 $p_n \in A_n$ 。如果 $p_{n-1} \in A_{n-1}$ 且 $p_n \in B_2$ 时, $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$ 是 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}$ 的有序元组, 根据定义, 要么 $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$ 含互补对, 要么 $P_1 \in (p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$; 同理, $(p_n, p_{n+1}, \dots, p_{n+m-2})$ 是 $B_2 \times B_3 \times \dots \times B_m$ 的有序元组, 根据定义, 要么 $(p_n, p_{n+1}, \dots, p_{n+m-2})$ 含互补对, 要么 $\sim P_1 \in (p_n, p_{n+1}, \dots, p_{n+m-2})$, 从而 $(p_1, p_2, \dots, p_{n+m-2})$ 含互补对, S 是标准矛盾体。如果 $p_{n-1} \in B_1$ 且 $p_n \in A_n$, 类似可证。

(必要性) 情况 1 复合子句的代表元都是 P_1 ;

情况 2 复合子句的代表元都是 $\sim P_1$ 。

对于情况 1, 讨论 n 和 m 的奇偶, 以方便证明。当 n 为偶数, m 为奇数时, 在 S_1 和 S_2 中, 分别有 $\frac{n}{2}, \frac{m+1}{2}$ 个子句含 P_1 , 那么在 S 中有 $\frac{n}{2} + \frac{m+1}{2} - 2 = \frac{n+m-3}{2}$ 个子句含 P_1 。对于 S_1 和 S_2 而言, 除开 $P_1, \sim P_1$, 共含 $n+m-4$ 对文字, 根据多线型

标准矛盾体的结构特点, 在 S 中这 $\frac{n+m-3}{2}$ 个子句除了 P_1 外, 共含 $\frac{n+m-3}{2}$ 对文字, 所以这些子句存在不含 P_1 的有序元组不含互补对。对于其他子句, 可取 $\sim P_1$, 这说明子句集 S 存在有序元组不含互补对。当 n 为偶数, m 为偶数时, 在 S_1 和 S_2 中, 分别有 $\frac{n}{2}, \frac{m}{2}$ 个子句含 P_1 , 那么在 S 中有 $\frac{n}{2} + \frac{m}{2} - 2 = \frac{n+m-4}{2}$ 个子句含 P_1 。对于 S_1 和 S_2 , 除开 $P_1, \sim P_1$, 共含 $n+m-4$ 对文字, 根据多线型标准矛盾体的结构特点, 在 S 中这 $\frac{n+m-4}{2}$ 个子句除了 P_1 外, 共含 $\frac{n+m-4}{2}$ 对文字, 所以这些子句存在不含 P_1 的有序元组不含互补对。对于其他子句, 可取 $\sim P_1$, 这说明子句集 S 存在有序元组不含互补对。当 n 和 m 的奇偶性为其他情况时, 类似可证。

情况 2 的证明与情况 1 类似。

综上, 如果两个复合子句的代表元都是 P_1 或都是 $\sim P_1$, 复合得到的子句集 S 不是标准矛盾体。必要性得证。

注 3 设 S_1 和 S_2 是两个具有相同代表元 P_1 且无其他公共文字的多线型标准矛盾体。从 S_1 和 S_2 中各选取 3 个子句, 两两进行复合, 得到的子句集 S 不是标准矛盾体。

命题 4 假设 $S_1 = \{A_1, \dots, A_n\}$ 和 $S_2 = \{B_1, \dots, B_m\}$ 是两个 k -线型标准矛盾体, 仅含一个公共文字 P^* , 其中 P^* 不是 S_1 的代表元, 也不是 S_2 的代表元。从中各选取一个子句复合, 得到的新子句集 S 是标准矛盾体。

证明: 不妨设 $p^* \in A_i$ 且 $p^* \in B_j$ 。首先, 如果复合选取的子句是 A_i 和 B_j , 可令 $S = \{A_i \cup B_j, A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n, B_1, \dots, B_{j-1}, B_{j+1}, \dots, B_m\}$ 。对于 S 的任意一个有序元组 (p_1, \dots, p_{n+m-1}) , 如果 $p_1 \in A_i$, 那么 (p_1, \dots, p_n) 是 S_1 的一个有序元组, 显然含互补对; 如果 $p_1 \in B_j$, 那么 $(p_1, p_{n+1}, \dots, p_{n+m-1})$ 是 S_2 的一个有序元组, 显然含互补对。因此, (p_1, \dots, p_{n+m-1}) 含互补对。根据 k -线型标准矛盾体的特点, 有 $\sim P^* \in A_{i+2}$ 且 $\sim P^* \in B_{j+2}$ 。如果复合选取的子句是 A_{i+2} 和 B_{j+2} , 与上述情况类似可证, S 是标准矛盾体。如果复合选取的子句是 A_i 和 B_{j+2} , 那么复合得到的新子句含有 $P^*, \sim P^*$, 这种复合没有意义; 同理, 复合选取的子句是 A_{i+1} 和 B_j 也没有意义。如果是其他复合情况, 根据命题 1, S 是标准矛盾体。

注 4 设 $S_1 = \{A_1, \dots, A_n\}$ 和 $S_2 = \{B_1, \dots, B_m\}$ 是两个 k -线型标准矛盾体, 仅含一个公共文字 P^* , 其中 P^* 不是 S_1 的代表元, 也不是 S_2 的代表元。从中各选取两个子句, 两两复合。如果选择的子句中均不含 $P^*, \sim P^*$, 那么得到的新子句集 S 不是标准矛盾体。

定理 4 假设 $S_1 = \{A_1, \dots, A_n\}$ 和 $S_2 = \{B_1, \dots, B_m\}$ 是两个 k -线型标准矛盾体, 仅含一个公共文字 P^* , 其中 P^* 不是 S_1 的代表元, 也不是 S_2 的代表元; 并且根据定义, 对于 S_1 和 S_2 , 有 $P^* \in A_i, P^* \in B_j$, 且 $\sim P^* \in A_{i+2}, \sim P^* \in B_{j+2}$ 。因此, $S = \{A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, A_{i+3}, \dots, A_n, A_i \cup B_j, A_{i+2} \cup B_{j+2}, B_1, \dots, B_{j-1}, B_{j+1}, B_{j+3}, \dots, B_m\}$ 是标准矛盾体。

证明: 由于复合子句 $A_i \cup B_j, A_{i+2} \cup B_{j+2}$ 分别含有重复文

字 P^* , $\sim P^*$, 因此 S 可以看作 S_1 删除了文字 P^* , $\sim P^*$ 之后再和 S_2 进行复合得到的子句集。设 S_1 删除了文字 P^* , $\sim P^*$ 之后的子句集为 $S_1' = \{A_1, A_2, \dots, A_i', A_{i+1}, A_{i+2}', \dots, A_n\}$, 则 $S = \{A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, A_{i+3}, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, A_i' \cup B_j, A_{i+2}' \cup B_{j+2}\}$ 。对于 S 的任意一个有序元组 (p_1, \dots, p_{n+m-2}) , 考虑 p_i 和 p_{i+2} 。如果 $p_i \in A_i'$, 根据引理1, $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_i' \times A_{i+1} \times A_{i+3} \times \dots \times A_n$ 的任意有序元组含互补对, 即 $(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, p_{i+3}, \dots, p_n)$ 含互补对。如果 $p_{i+2} \in A_{i+2}'$, 根据引理1, $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times A_{i+2}' \times A_{i+3} \times \dots \times A_n$ 的任意有序元组 $(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, p_{i+2}, p_{i+3}, \dots, p_n)$ 都含互补对。如果 $p_i \notin A_i'$ 且 $p_{i+2} \notin A_{i+2}'$, 那么 $p_i \in B_j$ 且 $p_{i+2} \in B_{j+2}$ 。由 S_2 是标准矛盾体, 可知 $B_j \times B_{j+2} \times B_1 \times \dots \times B_{j-1} \times B_{j+1} \times B_{j+3} \times \dots \times B_m$ 的任意有序元组 $(p_i, p_{i+2}, p_{n+1}, \dots, p_{n+m-2})$ 都含互补对。

注5 设 S_1 和 S_2 是两个只有一个公共文字的 k -线型标准矛盾体, 且这个公共文字不是定义中的代表元。从 S_1 和 S_2 中各选取3个子句, 两两进行复合, 得到的子句集 S 不是标准矛盾体。

在上述结论中, 复合生成的标准矛盾体未必具有多线型特征, 但命题5和命题6证明了在特定约束下可保持其多线型结构。

命题5 假设 $S_1 = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ (n 是偶数) 和 $S_2 = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ 是两个具有相同代表元 P_1 且无其他公共文字的多线型标准矛盾体。子句集 $S = \{A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, A_{n-1} \vee B_1, A_n \vee B_2, B_3, \dots, B_m\}$ 是多线型标准矛盾体。

证明: 根据定义, $P_1 \in A_{n-1}, \sim P_1 \in A_n, P_1 \in B_1, \sim P_1 \in B_2$, 则 A_{n-1} 与 B_1, A_n 与 B_2 可以复合。根据命题1, S 是标准矛盾体。复合后的子句集 S 是多线型标准矛盾体。

命题6 假设 $S_1 = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ (n 是偶数) 和 $S_2 = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ 是两个具有相同代表元 P_1 且无其他公共文字的正规 k -线型标准矛盾体。子句集 $S = \{A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, A_{n-1} \vee B_1, A_n \vee B_2, B_3, \dots, B_m\}$ 是扩展 k -线型标准矛盾体。

证明: 与命题5类似可证。

3.3 多线型标准矛盾体的文字添加策略

定理5 设 $S = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ 是正规 k -线型标准矛盾体, 则:

(1) 对于任意 $P_{2i+1}, C_{2l} \subseteq S (l > i + k + n; n \in \mathbb{Z})$, 若 $C_{2l}' = C_{2l} \cup \{\sim P_{2i+1}\}$, 那么 $S' = \{C_1, C_2, \dots, C_{2l-1}, C_{2l}', C_{2l+1}, \dots, C_m\}$ 是标准矛盾体。

(2) 对于任意 $P_{2i}, C_{2l+1} \subseteq S (l > i + k + n - 1)$, 若 $C_{2l+1}' = C_{2l+1} \cup \{\sim P_{2i}\}$, 那么 $S' = \{C_1, C_2, \dots, C_{2l}, C_{2l+1}', C_{2l+2}, \dots, C_m\}$ 是标准矛盾体。

证明: 仅需证(1), (2)可类似证明。对于文字 P_{2i+1} , 根据定义有 $C_{2i} = \{P_{2i+1}, \sim P_1\}$ 。设子句集 S' 的任意一个有序元组为 (p_1, p_2, \dots, p_m) , 则 $p_{2i} \in C_{2i} \cup \{\sim P_{2i+1}\}$ 。如果 $p_{2i} \in C_{2i}$, 那么 (p_1, p_2, \dots, p_m) 是子句集 S 的有序元组, 含互补对。如果 $p_{2i} \in \sim P_{2i+1}$, 根据 $C_{2i} = \{P_{2i+1}, \sim P_1\}$, 要么有 $p_{2i} = P_{2i+1}$, 则 (p_1, p_2, \dots, p_m) 包含有互补对 $P_{2i+1}, \sim P_{2i+1}$; 要么有 $p_{2i} =$

$\sim P_1$, 而在 S 中, 从含 P_1 的子句取出有序元组, 要么取到 P_1 , 要么取到互补对, 所以在 S' 中这些含 P_1 的子句和 C_{2i} 取出的有序元组都含互补对。综上可得, (p_1, p_2, \dots, p_m) 含互补对, S' 是标准矛盾体。

命题7 设 $S = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ ($n \geq 5$) 是正规 k -线型标准矛盾体, 有 m 个位置可以添加对应负文字。其中:

$$m = \begin{cases} \frac{(n-2k+1)^2}{4}, & n \text{ 是奇数} \\ \frac{(n-2k+2)(n-2k)}{4}, & n \text{ 是偶数} \end{cases}$$

证明: 根据 k -线型标准矛盾体的特点, 第 k 条线含有 $(n-2)-2 \times (k-2) = n-2k+2$ 个文字。如果 n 为奇数, 满态正规的 k -线型标准矛盾体的最后一条线含有1个文字; 如果 n 为偶数, 满态正规的 k -线型标准矛盾体的最后一条线含有2个文字。故而, 当 n 为奇数时, 有 m 个位置可以添加对应负文字, 其中, $m = 1 + 3 + \dots + [n-2(k+1)+2] = \frac{1}{2}[1 + (n-2k)](\frac{n+1}{2} - k) = \frac{(n-2k+1)^2}{4}$; 当 n 为偶数时, 有 m 个位置可以添加对应负文字, 其中, $m = 2 + 4 + \dots + [n-2(k+1)+2] = \frac{1}{2}[2 + (n-2k)](\frac{n}{2} - k) = \frac{(n-2k+2)(n-2k)}{4}$ 。综合以上两种情况, 得证。

此外, 还将讨论双线型标准矛盾体的另外一种文字添加策略, 这个策略不能推广到多线型标准矛盾体中。

命题8 设 $S = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ 是一个双线型标准矛盾体, 有如下添加策略:

(1) 任取 $P_{2i+1}, C_{2l} \subseteq S (2 \leq 2l \leq 2i-2; i, l \in \mathbb{Z})$ 。若 $C_{2l}' = C_{2l} \cup \{p_{2i+1}\}$, 则 $S = \{C_1, C_2, \dots, C_{2l-1}, C_{2l}', C_{2l+1}, \dots, C_m\}$ 是标准矛盾体。

(2) 任取 $P_{2i}, C_{2l+1} \subseteq S (1 \leq 2l \leq 2i-2; i, l \in \mathbb{Z})$ 。若 $C_{2l+1}' = C_{2l+1} \cup \{P_{2i}\}$, 则 $S = \{C_1, C_2, \dots, C_{2l}, C_{2l+1}', C_{2l+2}, \dots, C_m\}$ 是标准矛盾体。

证明: 仅需证(1), (2)可类似证明。对于文字 P_{2i+1} , 根据定义有 $C_{2i+2} = \{\sim P_{2i+1}, \sim P_1\}$ 。设子句集 S' 的任意一个有序元组为 (p_1, p_2, \dots, p_m) , 则 $p_{2l} \in C_{2l} \cup \{P_{2i+1}\}$ 。如果 $p_{2l} \in C_{2l}$, 那么 (p_1, p_2, \dots, p_m) 是子句集 S 的有序元组, 含互补对。如果 $p_{2l} = P_{2i+1}$, 对于 P_{2i+2} , 若 $p_{2i+2} = \sim P_{2i+1}$, 则 (p_1, p_2, \dots, p_m) 含互补对 $P_{2i+1}, \sim P_{2i+1}$; 若 $p_{2i+2} = \sim P_1$, 而在 S 中, 从含 P_1 的子句取出有序元组, 要么取到 P_1 , 要么取到互补对, 所以在 S' 中, 含 P_1 的子句和 C_{2i+2} 取出的有序元组含互补对。综上可得, (p_1, p_2, \dots, p_m) 含互补对, S' 是标准矛盾体。

命题9 设 $S = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ ($n \geq 5$) 是双线型标准矛盾体, 有 α 个位置可以添加对应正文字。其中:

$$\alpha = \begin{cases} \frac{(n-3)^2}{4}, & n \text{ 是奇数} \\ \frac{(n-2)(n-4)}{4}, & n \text{ 是偶数} \end{cases}$$

证明: 令 $S_n = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 有 T_n 个位置可添加文字。当 n 为奇数时, 若 $T_5 = 1$, 假设 $T_{2k+3} = k^2$, 现求 $T_{2(k+1)+3}$ 。由

$S_{2(k+1)+3} = S_{2k+3} \cup \{C_{2k+4}, C_{2k+5}\}$, C_{2k+4} 可添加 k 项, C_{2k+5} 可添加 $k+1$ 项, 则 $T_{2(k+1)+3} = k^2 + k + k + 1 = (k+1)^2$. 由数学归纳法可知, $T_{2k+3} = k^2$. 因此, n 为奇数时, S_n 有 $T_n = \frac{(n-3)^2}{4}$ 个位置可添加文字; 当 n 为偶数时, 同理, S_n 有 $\frac{(n-4)(n-2)}{4}$ 个位置可添加对应文字.

注 6 命题 8 无法直接从双线型标准矛盾体推广至 k -线型 ($k \geq 3$) 标准矛盾体. 即便对双线型标准矛盾体而言, 也很难讨论清楚同时在结构右下方添加负文字且在结构左上方添加正文字得到的子句集是否是标准矛盾体.

4 算法框架

任给两个子句 A 和 B , 按照文献[22]中的算法 3.1 构造复合子句 $D = F(B, C)$. 依据定理 3, 算法 1 从两个多线型标准矛盾体中各选取两个子句进行复合. 考虑到两个矛盾体之间的命题变元的情况, 根据所得的复合子句, 可以直接得到生成新的矛盾体的结构.

算法 1 多线型标准矛盾体复合算法

输入: 代表元相同(均为 P_1)的 k -线型标准矛盾体 $\bigwedge_{i=1}^m B_i$ 和 $\bigwedge_{j=1}^n C_j$

输出: 矛盾体 SC

1. 初始化 SC
2. 若 $P_1 \in B_{m-1} \&\& P_1 \in C_1 \&\& \sim P_1 \in B_m \&\& \sim P_1 \in C_2$ 则
3. 对于 $i=1$ 到 2 执行
4. 计算 $D_i = F(B_{m-2+i}, C_i)$
5. 更新 SC 为:

$$SC \leftarrow ((\bigwedge_{i=1}^m B_i) \wedge B_{m-1} \wedge B_m) \wedge ((\bigwedge_{j=1}^n C_j) \wedge C_1 \wedge C_2) \wedge D_1 \wedge D_2$$

6. 结束循环
7. 结束条件判断
8. 返回 SC

算法 2 给出了直接复合正规多线型标准矛盾体中的部分子句, 再与剩余子句复合生成新的扩展多线型矛盾体的方法.

算法 2 扩展多线型标准矛盾体生成算法

输入: 代表元相同(均为 P_1)的 k -线型标准矛盾体 $\bigwedge_{i=1}^m B_i$ 和 $\bigwedge_{j=1}^n C_j$

输出: 矛盾体 SC

1. 初始化 SC
2. 若 $P_1 \in B_{m-k+1} \&\& P_1 \in C_1 \&\& \sim P_1 \in B_{m-k+2} \&\& \sim P_1 \in C_2 \&\& \dots \&\& (P_1 \in B_m \&\& P_1 \in C_k \parallel \sim P_1 \in B_m \&\& \sim P_1 \in C_k)$ 则
3. 对于 $i=1$ 到 k 执行
4. 计算 $D_i = F(B_{m-k+i}, C_i)$
5. 更新 SC 为:

$$SC \leftarrow ((\bigwedge_{i=1}^m B_i) \wedge \bigwedge_{i=1}^k B_{m-k+i}) \wedge ((\bigwedge_{j=1}^n C_j) \wedge \bigwedge_{j=1}^k C_j) \wedge (\bigwedge_i^k D_i)$$

6. 结束循环
7. 结束条件判断
8. 返回 SC

基于算法 1 生成的矛盾体和基于算法 2 生成的矛盾体删掉冗余子句后满足扩展 k -标准矛盾体的结构, 新矛盾体均比原矛盾体大, 生成的分离式含文字少, 进而可提高演绎效率. 此外, 相比于归结方法, 基于多线型标准矛盾体演绎可以加快

演绎效率, 如例 2 所示.

例 2 设命题逻辑中的子句集 S 由子句 C_1, \dots, C_{15} 构成: $C_1 = \{P_1, P_4\}$, $C_2 = \{\sim P_2, P_3\}$, $C_3 = \{P_2, P_5\}$, $C_4 = \{\sim P_2, \sim P_7\}$, $C_5 = \{\sim P_3, \sim P_4\}$, $C_6 = \{\sim P_6, P_7\}$, $C_7 = \{P_6, P_7\}$, $C_8 = \{\sim P_1, P_4, P_5\}$, $C_9 = \{\sim P_1, P_4, \sim P_5\}$, $C_{10} = \{P_2, P_4, \sim P_5\}$, $C_{11} = \{\sim P_2, \sim P_3, P_6\}$, $C_{12} = \{P_2, \sim P_4, \sim P_5\}$, $C_{13} = \{P_2, \sim P_7, P_8\}$, $C_{14} = \{P_3, \sim P_4, \sim P_8, \sim P_9\}$, $C_{15} = \{\sim P_2, \sim P_3, \sim P_6, \sim P_8, P_9\}$.

如果使用多线型标准矛盾体结构, 只用 4 步就可以完成演绎. $C_{16} = (C_2, C_3, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{15}) = \{\sim P_3, P_9\}$, $C_{17} = (C_1, C_5, C_8, C_9, C_{14}) = \{\sim P_8, \sim P_9\}$, $C_{18} = (C_4, C_6, C_7, C_{13}) = \{P_8\}$, $C_{19} = (C_{16}, C_{17}, C_{18}) = \mathbf{O}$.

如果使用归结原理, 则需要归结多次, 其中一个演绎过程如下: $C_{16} = R(C_3, C_{10}) = \{P_2, P_4\}$, $C_{17} = R(C_2, C_{11}) = \{\sim P_2, P_6\}$, $C_{18} = R(C_{16}, C_{17}) = \{P_4, P_6\}$, $C_{19} = R(C_{12}, C_{15}) = \{\sim P_3, \sim P_4, \sim P_5, \sim P_6, \sim P_8, P_9\}$, $C_{21} = R(C_3, C_2) = \{P_3, P_5\}$, $C_{22} = R(C_{20}, C_{21}) = \{\sim P_8, P_9\}$, $C_{23} = R(C_1, C_8) = \{P_4, P_5\}$, $C_{24} = R(C_{14}, C_5) = \{\sim P_4, \sim P_8, \sim P_9\}$, $C_{25} = R(C_{23}, C_9) = \{\sim P_1, P_4\}$, $C_{26} = R(C_{25}, C_1) = \{P_4\}$, $C_{27} = R(C_{24}, C_{26}) = \{\sim P_8, \sim P_9\}$, $C_{28} = R(C_7, C_6) = \{P_7\}$, $C_{29} = R(C_{13}, C_4) = \{\sim P_7, P_8\}$, $C_{30} = R(C_{28}, C_{29}) = \{P_8\}$, $C_{31} = R(C_{30}, C_{22}) = \{P_9\}$, $C_{32} = R(C_{31}, C_{27}) = \{\sim P_8\}$, $C_{33} = R(C_{30}, C_{32}) = \mathbf{O}$.

5 一阶逻辑中的标准矛盾体结构

例 3 一阶逻辑中, 设 $S = \{C_1, C_2, C_3\}$ 为子句集, S 中子句 C_1 和 C_2 仅含常项, 且 $C_1 = P(a_1) \vee P(t_1)$, $C_2 = \sim P(a_1) \vee \sim P(t_2)$; 子句 C_3 含变项, 且 $C_3 = P(x_1) \vee \sim P(x_2)$. 通过对子句 C_3 进行不同的代入使得 S' 构成标准矛盾体, 且 S' 是双线型标准矛盾体.

命题 10 在一阶逻辑中, 设子句集 $S = \{C_1, C_2, C_3\} = \{P(t_{11}, \dots, t_{1n}) \vee P(t_{21}, \dots, t_{2n})\} \wedge \{\sim P(t_{11}, \dots, t_{1n}) \vee \sim P(t_{31}, \dots, t_{3n})\} \wedge \{P(t_1, \dots, t_n) \vee \sim P(t_1', \dots, t_n')\}$, 其中仅子句 C_3 含有变项. 如果存在替换 $\sigma^1 = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{1n})$ 使得 $P^{\sigma^1}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 与 $\sim P(t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1n})$ 组成互补对, 存在替换 $\sigma^2 = (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \dots, \sigma_{2n})$ 使得 $\sim P^{\sigma^2}(t_1', t_2', \dots, t_n')$ 与 $P(t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2n})$ 组成互补对, 存在替换 $\sigma^3 = (\sigma_{31}, \sigma_{32}, \dots, \sigma_{3n})$ 使得 $\sim P^{\sigma^3}(t_1', t_2', \dots, t_n')$ 与 $P(t_{31}, t_{32}, \dots, t_{3n})$ 组成互补对, 则能通过对子句 C_3 进行不同的代入使得 S' 构成标准矛盾体.

证明: 可对子句 C_3 进行两次不同的替换. 第一次, 替换 P^{σ^1} 和 P^{σ^2} , 得到 $C_3' = P^{\sigma^1}(t_1, t_2, \dots, t_n) \vee \sim P^{\sigma^2}(t_1', t_2', \dots, t_n')$; 第二次, 替换 P^{σ^1} 和 P^{σ^3} , 得到 $C_3'' = P^{\sigma^1}(t_1, t_2, \dots, t_n) \vee \sim P^{\sigma^3}(t_1', t_2', \dots, t_n')$. 易证, 得到的子句集满足双线型标准矛盾体的结构.

例 4 一阶逻辑中, 设 $S = \{C_1, C_2, \dots, C_m\} = \{P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_m)\} \wedge \{P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_{m-1}) \vee \sim P(x_m)\} \wedge \{P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee \sim P(x_{m-1}) \vee \sim P(x_m)\} \wedge \dots \wedge \{P(x_1) \vee \sim P(x_2) \vee \dots \vee \sim P(x_{m-1}) \vee \sim P(x_m)\} \wedge \{\sim P(a_1) \vee$

$\sim P(a_2) \vee \dots \vee \sim P(a_m)$ },其中 a_1, \dots, a_m 为常项, x_1, \dots, x_m 为变项。通过对子句 C_2, \dots, C_{m-1} 进行不同的代入,使得 S' 构成标准矛盾体。对于 C_3 而言,每个 $x_i (i \in \{1, 2, \dots, m\})$ 取遍 $a_j (j \in \{1, 2, \dots, m\})$,可以生成 m 个子句;对于 C_4 而言,每个 $x_i (i \in \{1, 2, \dots, m\})$ 取遍 $a_j (j \in \{1, 2, \dots, m\})$,可以生成 $\frac{m(m-1)}{2}$ 个子句;...;对于 C_{m-1} 而言,可以生成 m 个子句。因此,上述生成的所有子句合上 C_1 和 C_n 可以得到标准矛盾体。易证,得到的子句集满足完全标准矛盾体的结构。

命题 11 一阶逻辑中,设子句集 $S = \{C_1, C_2, \dots, C_m\} = \{P(t_{11}, \dots, t_{1n}) \vee P(t_{21}, \dots, t_{2n}) \vee \dots \vee P(t_{m1}, \dots, t_{mn})\} \wedge \{P(t'_{11}, \dots, t'_{1n}) \vee P(t'_{21}, \dots, t'_{2n}) \vee \dots \vee P(t'_{(m-1)n}, \dots, t'_{(m-1)n}) \vee \sim P(t'_{m1}, \dots, t'_{mn})\} \wedge \{P(t'_{11}, \dots, t'_{1n}) \vee P(t'_{21}, \dots, t'_{2n}) \vee \dots \vee \sim P(t'_{21}, \dots, t'_{(m-1)n}) \vee P(t'_{m1}, \dots, t'_{mn})\} \wedge \dots \wedge \{P(t_{11}, \dots, t_{1n}) \vee \sim P(t'_{21}, \dots, t'_{2n}) \vee \dots \vee \sim P(t_{11}, \dots, t_{1n}) \vee \sim P(t_{21}, \dots, t_{2n}) \vee \dots \vee \sim P(t_{m1}, \dots, t_{mn})\} \wedge \{P(t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1n}) \vee \sim P(t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2n}) \vee \dots \vee \sim P(t_{m1}, t_{m2}, \dots, t_{mn})\}$,其中, t_{ij} 为常项, t'_{ij} 为变项, $i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$,则能通过对子句 C_2, \dots, C_{n-1} 进行不同的代入使得 S' 构成标准矛盾体。

证明:根据例 3 的推导过程,类似可证。

命题 12 一阶逻辑中,设有子句集 $S = \{C_1, C_2, \dots, C_{n+1}\} = \{P(t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1n}) \vee P(t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2n}) \vee \dots \vee P(t_{n1}, t_{n2}, \dots, t_{nm})\} \wedge \{\sim P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t_i, x_i, \dots, x_n)\} \wedge \{\sim P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t_i, x_i, \dots, x_n)\} \wedge \dots \wedge \{\sim P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t_i, x_i, \dots, x_n)\}$,其中, t_{ij} 为常项, x_k 为变项, $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$,则能通过对子句 C_2, C_3, \dots, C_{n+1} 进行不同的代入使得 S' 构成标准矛盾体。

证明:此种情况下,如果 t_{ji} 在 C_1 中出现了 m 次,只需要对子句 $C_{j+1} (1 \leq j \leq n)$ 进行 m 次重复替换,构成标准矛盾体。

命题 13 一阶逻辑中,假设有子句集 $S = \{C_1, C_2, \dots, C_{n+1}\} = \{P(t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1n}) \vee P(t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2n}) \vee \dots \vee P(t_{n1}, t_{n2}, \dots, t_{nm})\} \wedge \{\sim P(t_{11}, t_{12}, x_3, \dots, x_n)\} \wedge \dots \wedge \{\sim P(t_{n1}, t_{n2}, x_3, \dots, x_n)\}$,其中, t_{ij} 为常项, x_k 为变项, $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$,则能通过对子句 C_2, C_3, \dots, C_{n+1} 进行不同的代入使得 S' 构成标准矛盾体。

证明:此种情况下,如果 (t_{i1}, t_{i2}) 在 C_1 中出现了 m 次,只需要对子句 $C_{i+1} = \{\sim P(t_{n1}, t_{n2}, x_3, \dots, x_n)\} (1 \leq i \leq n)$ 进行 m 次重复替换,将构成标准矛盾体。

注 7 一阶逻辑中,设 $S = \{C_1, C_2\}$ 为子句集,若 S 中子句 C_1 含变项 $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 且含有 $P(t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1n})$ 形式的常项,子句 C_2 含变项 $\sim P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 且含有 $\sim P(t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2n})$ 形式的常项,子句 C_1 和 C_2 的常项不能组成互补对,则 S 不构成标准矛盾体。

结束语 本文提出了多线型标准矛盾体的概念,并给出了矛盾体复合和文字添加性质。首先,给出正规多线型标准矛盾体、扩展多线型标准矛盾体的形式化定义。其次,对多线型标准矛盾体的复合性质上的共性结论和特性结论进行区分,得到复合过程中产生的新子句集为标准矛盾体的条件;并指出通过添加文字, k -线型标准矛盾体可以转换为更多条线

的标准矛盾体,得到双线型标准矛盾体的添加策略。然后,给出了在命题逻辑中生成多线型标准矛盾体的算法。最后,在一阶逻辑下将标准矛盾体扩展为双线型标准矛盾体、完全标准矛盾体结构,但是结构仍然比较特殊,一阶逻辑下的标准矛盾体需要更深入的研究。

参考文献

- [1] WITHERELL P, KRISHNAMURTY S, GROSSE I R, et al. Improved knowledge management through first-order logic in engineering design ontologies[J]. AI EDAM, 2010, 24(2): 245-257.
- [2] ROBINSON J A. A machine-Oriented logic based on the resolution principle[J]. Journal of the ACM, 1965, 12(1): 23-41.
- [3] PLAISTED D A. History and prospects for first-order automated deduction[C]// International Conference on Automated Deduction. Springer, 2015: 3-28.
- [4] VORONKOV A. The anatomy of vampire[J]. Journal of Automated Reasoning, 1995, 15(2): 237-265.
- [5] SCHULZ S. E-a brainiac theorem prover [J]. AI Communications, 2002, 15(2/3): 111-126.
- [6] KOROVIN K, STICKSEL C. iProver-Eq: An instantiation-based theorem prover with equality[C]// Automated Reasoning, 5th International Joint Conference. Berlin: Springer, 2010: 196-202.
- [7] OTTEN J, BIBEL W. leanCoP: lean connection-based theorem proving[J]. Journal of Symbolic Computation, 2003, 36(1/2): 139-161.
- [8] OTTEN J. Restricting backtracking in connection calculi[J]. AI Communications, 2010, 23: 159-182.
- [9] WERNHARD C, BIBEL W. Investigations into proof structures [J]. Journal of Automated Reasoning, 2024, 68(4): 1-70.
- [10] WERNHARD C. Craig interpolation with clausal first-order tableaux[J]. Journal of Automated Reasoning, 2021, 65(5): 647-690.
- [11] FÄRBER M, KALISZYK C, URBAN J. Machine learning guidance for connection tableaux[J]. Journal of Automated Reasoning, 2021, 65: 287-320.
- [12] XU Y, LIU J, CHEN S, et al. Contradiction separation based dynamic multi-clause synergized automated deduction[J]. Information Sciences, 2018, 462: 93-113.
- [13] CAO F, XU Y, CHEN S, et al. A contradiction separation dynamic deduction algorithm based on optimized proof search[J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2019, 12(2): 1245-1254.
- [14] LIU P, CHEN S, LIU J, et al. An efficient contradiction separation based automated deduction algorithm for enhancing reasoning capability [J]. Knowledge-Based Systems, 2023, 261: 110217.
- [15] LIU P, XU Y, LIU J, et al. Fully reusing clause deduction algorithm based on standard contradiction separation rule[J]. Information Sciences, 2023, 622: 337-356.
- [16] SUTCLIFFE G, DESHARNAIS M. The 11th IJCAR automated

theorem proving system competition-CASC-J11[J]. AI Communications, 2023, 36(2): 73-91.

- [17] BENZMÜLLER C, HEULE M J H, SCHMIDT R A. Automated Reasoning: 12th International Joint Conference, IJCAR 2024, Nancy, France, July 3-6, 2024, Proceedings, Part I[M]. Springer Nature, 2024.
- [18] SUTCLIFFE G, SUTTNER C, KOTTHOFF L, et al. An empirical assessment of progress in automated theorem proving [C]// International Joint Conference on Automated Reasoning. Cham: Springer, 2024: 53-74.
- [19] TANG L M, BAI M C, HE X X, et al. Complete contradiction and smallest contradiction based on propositional logic[J]. Computer Science, 2020, 47(S2): 83-85, 105.
- [20] HE X, LI Y, FENG Y. On structures of regular standard contradictions in propositional logic[J]. Information Sciences, 2022, 586: 261-278.
- [21] LI X Y, HE X X, MA X, et al. A new method of generating contradictions in propositional logic[J]. Computer-Engineering & Science, 2023, 45(6): 1134-1140.
- [22] ZANG H, HE X, WANG C, et al. Construction and compounding of a class of regular standard contradictions in propositional logic[J]. Computer Science, 2024, 51(1): 295-300.

- [23] WANG C, HE X, ZANG H. Literal chunk contradiction and clause regular contradiction in propositional logic[J]. Computer Science, 2024, 51(7): 272-277.
- [24] LIU X H. Automatic reasoning based on the reduced method [M]. Beijing: Science Press, 1994.
- [25] XU M. Lectures on symbolic logic [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2008: 252-253.



ZENG Dan, born in 1999, master. Her main research interests include standard contradiction and graph auto-encoder.



LI Yingfang, born in 1985, Ph.D, associate professor. Her main research interests include processing, intelligent decision making and control, measurement and analysis of uncertain information, reasoning and problem solving.

(责任编辑:柯颖)