

# 饱和约束下 NNCS 鲁棒容错少保守性判据与设计

曹慧超 李 炜

(兰州理工大学电气工程与信息工程学院 兰州 730050)

**摘 要** 对执行器饱和与约束及故障情形下不确定非线性网络化控制系统(NNCS)的鲁棒  $H_\infty$  容错设计问题进行了研究。为了获得少保守性判据准则,构造了适当的时滞依赖 Lyapunov-Krasovskii(L-K)泛函,采用了一种下界比常用 Jensen 积分不等式更紧的改进型 Wirtinger 积分不等式,推导出了使执行器饱和和闭环故障 NNCS 具有鲁棒  $H_\infty$  容错性能的少保守性判据,并通过求解 LMIs 的方式给出了鲁棒容错控制器的设计方法。最后,通过仿真算例验证了所提方法的有效性,进而又求取了最大允许时延及最小扰动抑制率,并与已有类似结果进行比较,揭示了本方法所得结论的少保守性;另外,所提方法由于亦未引入除 L-K 泛函以外的决策变量,因此具有较低计算复杂度。

**关键词** 非线性网络化控制系统,执行器饱和,鲁棒容错,少保守性

**中图分类号** TP273, TP302.8 **文献标识码** A

## Less-conservative Criterion and Design of Robust Fault-tolerant for NNCS under Saturation Constraint

CAO Hui-chao LI Wei

(College of Electrical and Information Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

**Abstract** The problem of robust  $H_\infty$  fault-tolerant design was investigated for uncertain nonlinear networked control system(NNCS) under actuator saturation constraint and fault. In order to obtain less-conservative criterion, an appropriate delay-dependent Lyapunov-Krasovskii functional was constructed, and the improved Wirtinger integral inequality was used, which possesses tighter lower-bound than Jensen integral inequality. Then, a less-conservative criterion was derived to guarantee robust  $H_\infty$  fault-tolerant performance for the closed-loop fault NNCS with actuator saturation, and the design method of robust fault-tolerant controller was given by solving LMIs. Finally, numerical example was given to verify the effectiveness of the proposed method, and the less conservativeness of the proposed criterion was revealed by solving and comparing the maximum allowable delay and the minimum disturbance attenuation with some of the existing results. In addition, there is no introduction of any new decision variable apart from the matrix variable in the L-K functional, and then low computational complexity of the conclusion can be obtained.

**Keywords** Nonlinear networked control system, Actuator saturation, Robust fault-tolerant, Less conservativeness

## 1 引言

近年来,通过通讯网络实现资源共享、全分布式控制的网络化控制系统(Networked Control System, NCS)在各领域得到了迅速应用,随之学术界对 NCS 中所存在的问题进行了大量研究<sup>[1-3]</sup>。其中网络介入所衍生出的时延、丢包以及 NCS 庞大的结构、众多的不确定因素诱发的故障等问题,都对系统性能、稳定性造成了严重的影响,从而也成了学者们关注的焦点。针对此类问题,目前常常将具有时延和丢包的 NCS 采用输入时延法建模为一个具有状态时延的时延系统,并通过鲁棒容错设计确保故障系统稳定或具有更满意的性能<sup>[4,5]</sup>。尽管分析和设计中时延系统、鲁棒控制等传统控制理论方法得以直接应用,但其中固有的保守性问题却变成了 NCS 鲁棒容错控制研究中亟需解决的关键性问题。

目前,针对 NCS 鲁棒容错控制研究中所得结论的保守性问题,文献[6-8]通过构造适当的时滞依赖 Lyapunov-Kra-

sovskii(L-K)泛函以减少所得判据的保守性,如构造含有三重积分项的时滞依赖 L-K 泛函<sup>[6]</sup>、增广型时滞依赖 L-K 泛函<sup>[7]</sup>、基于时延分段技术的 L-K 泛函<sup>[8]</sup>等。但这些方法却在构造囊括更多信息量的 L-K 泛函以减少结论保守性的同时,带来了复杂的计算问题。文献[9-12]从 L-K 泛函求导时交叉项的界处理问题出发研究了结论保守性的减少问题。其中最常用的方法有自由权矩阵法<sup>[9,10]</sup>、Jensen/改进型 Jensen 积分不等式<sup>[11,12]</sup>。但是自由权矩阵法在减少判据保守性、增大控制器求解自由度的同时带来了过多的松弛变量矩阵,而 Jensen 系列积分不等式虽是处理交叉项的有效工具,但近期研究发现其本身仍带有难以克服的保守性问题<sup>[13]</sup>。因此,如何进一步减少 NCS 鲁棒容错控制结论判据的保守性,增大 NCS 容错控制器求解空间,使得系统具有更满意的容错性能仍是亟待解决的问题。另外,实际工程系统中执行器由于自身限制或人为界定,其饱和问题往往存在<sup>[14]</sup>,且容错控制中冗余执行器在分担故障执行器任务时,大的输出更易使其饱和,所

本文受国家自然科学基金项目(61364011),甘肃省自然科学基金项目(1308RJZA148),兰州理工大学校基金项目(03-0099)资助。

曹慧超(1986-),女,博士生,主要研究方向为故障诊断与容错控制,E-mail:cchcc\_love@126.com;李 炜(1963-),女,教授,博士生导师,主要研究方向为动态系统的故障诊断与容错控制、工业过程先进控制,E-mail:liwei@lut.cn(通信作者)。

以为分析和设计方便而常常被忽视的饱和问题也是需考虑的另一问题。

综上分析,本文以同时考虑执行器饱和和非线性约束和执行器故障的非线性网络化控制系统(Nonlinear Networked Control System, NNCS)为研究对象,从减少系统容错性能判据的保守性角度出发,通过构造适当的时滞依赖 L-K 泛函,采用一种新的保守性少于 Jensen 积分不等式且未引入任何附加变量的改进型 Wirtinger 不等式<sup>[15]</sup>,推证出执行器饱和和闭环故障 NNCS 稳定及具有鲁棒  $H_\infty$  容错性能的少保守性判据准则,并运用 LMI 技术给出鲁棒容错控制器参数的表达式;最后,通过仿真算例验证了本文方法的有效性及其所得结论的少保守性。

## 2 问题描述

### 2.1 执行器饱和和约束下不确定闭环故障 NNCS 描述

#### 2.1.1 非线性被控对象

假设具有执行器饱和和约束的典型非线性系统可描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(x, u) = f(x(t)) + g(x(t))(sat(u(t)), \omega(t)) \cdot \\ z(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$ ,  $z(t) \in R^p$  分别为系统的状态变量、控制输入、系统输出;  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$  为有限能量的外部扰动;  $f(x(t))$  和  $g(x(t))$  分别在区域  $R^n \times R^n$  内充分光滑,且  $f(0) = 0$ ;  $sat(\cdot): R^m \rightarrow R^m$  为标准饱和函数,即  $sat(u) = [sat(u_1) \quad sat(u_2) \quad \cdots \quad sat(u_m)]^T$ ,  $sat(u_i) \triangleq sign(u_i) \min\{1, |u_i|\}$ 。

由于 T-S 模糊模型能够利用模糊逻辑系统的非线性映射能力,对定义在一个致密集上的复杂非线性系统做到任意精度的一致逼近,因此依据 T-S 模糊模型建模方法,非线性系统(1)可表示为如下一些局部线性动态系统。

系统的模糊规则  $i$ : 如果  $\theta_1(t)$  是  $F_{i1}$ ,  $\cdots$ , 且  $\theta_n(t)$  是  $F_{in}$ , 则

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i sat(u(t)) + B_{i1} \omega(t) \\ z(t) &= C_i x(t) \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $\theta(t) = [\theta_1(t), \cdots, \theta_n(t)]^T$  是模糊前件变量;  $F_{ij}$  是模糊集合,  $i = 1, 2, \cdots, r$ ,  $j = 1, 2, \cdots, n$ ,  $r$  是模糊推理规则数;  $A_i \in R^{n \times n}$ ,  $B_i \in R^{n \times m}$ ,  $B_{i1} \in R^{n \times q}$ ,  $C_i \in R^{p \times n}$  为适当维数的常数矩阵。

使用单点模糊化、乘积推理和平均加权反模糊化,可得 T-S 全局动态模糊模型为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t)) [A_i x(t) + B_i sat(u(t)) + B_{i1} \omega(t)] \\ z(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t)) C_i x(t) \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $\mu_i(\theta(t)) = \frac{a_i(\theta(t))}{\sum_{i=1}^r a_i(\theta(t))}$  代表每一个模糊规则的权重比,

$a_i(\theta(t)) = \prod_{j=1}^n F_{ij}(\theta_j(t))$ ,  $F_{ij}(\theta_j(t))$  是  $\theta_j(t)$  关于  $F_{ij}$  的隶属函数。因  $a_i(\theta(t)) \geq 0$ , 且  $\sum_{i=1}^r a_i(\theta(t)) > 0$ , 则  $\mu_i(\theta(t)) \geq 0$  且  $\sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t)) = 1, \forall t \geq 0$ 。

为了简化描述,记  $\mu_i(\theta(t)) = \mu_i$ 。结合式(1)、式(3),得

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i [A_i x(t) + B_i sat(u(t)) + B_{i1} \omega(t)] + \\ &\quad \Delta f + \Delta g \end{aligned}$$

$$z(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t)) C_i x(t) \quad (4)$$

其中,  $\Delta f + \Delta g$  是非线性系统(1)和 T-S 全局模糊模型(3)之间的近似误差,即建模误差,且

$$\Delta f = f(x(t)) - \sum_{i=1}^r \mu_i A_i x(t) \quad (5)$$

$$\Delta g = g(x(t))(sat(u(t)), \omega(t)) - \sum_{i=1}^r \mu_i (B_i sat(u(t)) + B_{i1} \omega(t)) \quad (6)$$

#### 2.1.2 执行器饱和和不确定闭环故障 NNCS

对于系统(4),假设传感器为时钟驱动,控制器、执行器及零阶保持器为事件驱动,数据采用单包传输。若系统所有状态均可测量,采样周期为常数  $T$ 。依据类似文献[16]对 NNCS 时延和丢包的描述,则本文同时考虑时变时延和丢包的 NNCS 的模糊化静态状态反馈控制律可表示为

$$\begin{aligned} \text{模糊控制规则 } i: \text{ 如果 } \theta_1(t) \text{ 是 } F_{i1}, \cdots, \text{ 且 } \theta_n(t) \text{ 是 } F_{in}, \text{ 则} \\ u(t) &= K_i x(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $K_i$  为控制器增益阵,  $i = 1, 2, \cdots, r$ ,  $\tau(t)$  为包含时延和丢包的区间时变时延,满足

$$0 < \tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2 \quad (8)$$

$$\dot{\tau}(t) \leq \mu \quad (9)$$

$\tau_1, \tau_2$  分别为时变时延的下界和上界,且  $\tau_1 = \underline{\tau}$ ,  $\tau_2 = \bar{\tau} + (\bar{d} + 1)T$ ,  $\bar{\tau}, \underline{\tau}$  分别为时延上、下界,  $\bar{d}$  为最大丢包数,  $\mu$  为常数。

根据 PDC 算法,考虑 ZOH 的动态属性,可得模糊化状态反馈控制律为

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t)) K_i(x(t - \tau(t))) \quad (10)$$

令  $\ell(K) = \{x_0 \in R^n : |k_g x| \leq 1, g \in [1, m]\}$ , 矩阵  $K \in R^{m \times n}$ ,  $k_g$  是  $K$  的第  $g$  行,称  $\ell(K)$  为反馈控制的非饱和域或饱和和反馈控制的线性域,即对任意的  $x \in \ell(K)$ ,  $sat(Kx) = Kx$ 。

本文沿用椭球域求取不变集,估计吸引域的方法,令  $P \in R^{n \times n}$  是一个正定矩阵,对一个正数  $\rho$ ,定义椭球体  $\epsilon(P, \rho) = \{x \in R^n, x^T P x \leq \rho\}$ ,记  $\epsilon(P)$  表示  $\epsilon(P, 1)$ 。

考虑执行器可能发生失效故障的情形,其故障模型描述为

$$u^f(t) = M u(t) \quad (11)$$

其中,  $M = \{\text{diag}\{m_1, m_2, \cdots, m_n\}, m_p \in [0, 1], p = 1, 2, \cdots, n\}$  为执行器故障矩阵,  $m_p = 1$  表示第  $p$  个执行器正常,  $m_p = 0$  表示第  $p$  个执行器完全失效,  $m_p \in (0, 1)$  表示第  $p$  个执行器部分失效,  $M \in \Phi$ ,  $\Phi$  表示所有可能执行器失效故障模式的集合。

结合式(4)、式(10)和式(11),可得执行器饱和和不确定非线性网络化闭环故障系统(Nonlinear Networked Closed-loop Fault System, NNCFSS):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j [A_i x(t) + B_i Msat(K_j(x(t - \tau(t)))) + \\ &\quad B_{i1} \omega(t)] + \Delta f + \Delta g \end{aligned} \quad (12)$$

假设存在适当维数的实常数矩阵  $D_i, E_{ai}$  和  $E_{bi}$ , 满足

$$\Delta f = \sum_{i=1}^r \mu_i D_i F_i(t) E_{ai} x(t) \quad (13)$$

$$\Delta g = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j D_i F_j(t) E_{bi} Msat(K_j(x(t - \tau(t)))) \times x(t) \quad (14)$$

其中,  $F_i(t)$  为未知时变实值连续矩阵函数,其元素 Lebesgue 可测,且满足  $F_i^T(t) F_i(t) \leq I, i = 1, 2, \cdots, r, \forall t \geq 0$  ( $I$  为单位矩阵)。

则系统(12)可进一步描述为如下具有执行器饱和和约束的不确定 NNCS:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j [\bar{A}_i x(t) + \bar{B}_i \text{Msat}(K_j(x(t-\tau(t)))) + B_{1i} \omega(t)]$$

$$z(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i (\theta(t)) C_i x(t) \quad (15)$$

$$x(t) = \phi(t), t \in [-\tau_2, 0] \quad (16)$$

其中,

$$\bar{A}_i = A_i + \Delta A_i, \bar{B}_i = B_i + \Delta B_i \quad (17)$$

$\phi(t)$  为给定的初始向量值连续函数;  $\Delta A_i, \Delta B_i$  为范数有界的时变参数不确定性矩阵, 满足

$$[\Delta A_i, \Delta B_i] = D_i F_i(t) [E_{ai}, E_{bi}] \quad (18)$$

注 1: 在实际控制系统中, 饱和的存在会使系统工作性能退化, 甚至不稳定, 而且当系统发生故障时, 控制量通常远大于正常情形, 使得执行器更易进入饱和区域; 另外, 网络诱导时延和数据丢包作为 NCS 自身的网络属性也是致使系统失稳的因素, 因此本文同时考虑 NCS 中存在的饱和、故障、时延及丢包问题, 通过容错控制研究多个约束下 NCS 的稳定性及具有一定容错性能的控制问题更加符合实际工况需求。

## 2.2 相关引理

为得到本文结果, 以下给出用到的 3 个引理。

**引理 1**<sup>[14]</sup> 给定矩阵  $K, H \in R^{m \times n}$ , 对于  $x \in R^n$ , 如果  $x \in \ell(H)$ , 则有

$$\text{sat}(Kx) \in \text{co}\{\gamma_q Kx + \gamma_q^- Hx; q \in [1, 2^m]\} \quad (19)$$

其中,  $\text{co}\{\cdot\}$  表示  $\gamma_q Kx + \gamma_q^- Hx, \gamma_q \in \gamma, q \in [1, 2^m]$  组成的凸包;  $\gamma$  表示一个  $m \times m$  对角矩阵的集合, 且其对角线上的元素是 1 或者 0。显然  $\gamma$  含有  $2^m$  个元素。假设  $\gamma$  的每个元素被标记为  $\gamma_q, q=1, \dots, 2^m$ , 即  $\gamma = \{\gamma_q; q \in [1, 2^m]\}$ 。定义  $\gamma_q^- = I - \gamma_q$ , 则  $\gamma_q^- \in \gamma$ 。

**引理 2**<sup>[15]</sup> 给定矩阵  $R > 0$ , 对于所有的连续可微函数  $x: [a, b] \rightarrow R^n$ , 下列积分不等式成立

$$-(b-a) \int_a^b \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \leq -(x(b) - x(a))^T \times R(x(b) - x(a)) - 3\tilde{\Omega}^T R \tilde{\Omega} \quad (20)$$

其中,  $\tilde{\Omega} = x(b) + x(a) - (2/(b-a)) \int_a^b x(s) ds$ 。

**引理 3**<sup>[17]</sup> 对于具有适当维数的矩阵  $Y, M$  和  $E$ , 其中  $Y = Y^T$ , 则

$$Y + MF(t)E + E^T F^T(t)M^T < 0 \quad (21)$$

对所有满足  $F^T(t)F(t) \leq I$  的矩阵  $F(t)$  成立, 当且仅当存在一个常数  $\epsilon > 0$ , 使得如下不等式成立

$$Y + \epsilon MM^T + \epsilon^{-1} E^T E < 0 \quad (22)$$

## 3 主要结果

### 3.1 执行器饱和和不确定 NNCS 鲁棒 $H_\infty$ 容错设计目标

执行器饱和和不确定 NNCS 鲁棒  $H_\infty$  容错设计目标为: 针对执行器饱和和非线性约束及所有可能的执行器失效故障  $M \in \Phi$ , 寻求状态反馈增益阵  $K_j (j=1, 2, \dots, r)$ , 使得系统(15)满足如下条件:

1) 对所有允许的参数不确定性, 在  $\omega(t) = 0$  时, 闭环故障系统渐近稳定, 即系统(15)有着不变收缩集  $\epsilon(P)$ 。

2) 在零初始条件下, 对任意不为零的  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$ , 满足  $\|z(t)\|_2 \leq \gamma \|\omega(t)\|_2$ , 其中:  $\gamma$  是预先规定的常数,  $\|\cdot\|_2$  是  $L_2[0, \infty)$  范数。

### 3.2 执行器饱和和不确定 NNCS 鲁棒 $H_\infty$ 容错少保守性判据

**定理 1** 考虑系统(15), 给定常数  $\tau_2 > \tau_1 > 0, \delta > 0, \gamma > 0$ , 如果存在对称正定矩阵  $P, Q_\kappa, R_\kappa (\kappa=1, 2, 3)$  及适当维数的矩阵  $K_j, H_j (j=1, 2, \dots, r)$ , 使得对任意可能的执行器失效故障模式  $M$  和可接受的参数不确定性, 满足下列矩阵不等式

$$\Sigma_2 + \Pi_2^T \Theta \Pi_2 < 0, q \in [1, 2^m] \quad (23)$$

其中,  $*$  是由矩阵对称性得到的矩阵块,

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} \Xi_4 & \Xi_2 & \Xi_5 \\ * & \Xi_3 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

$$\Xi_4 = \begin{bmatrix} \Xi_{11} + C^T C - 2R_1 & \Xi_{13} & 0 \\ * & \Xi_{22} & -2R_2 \\ * & * & \Xi_{33} - 2R_2 - (2/\delta)R_3 \\ * & * & * & -Q_3 - 4R_2 - (2/\delta)R_3 \end{bmatrix}$$

$$\Xi_{11} = 2P\bar{A}_i + Q_1 + Q_2 + Q_3 - 4R_1 - (4/\tau_2)R_3$$

$$\Xi_{13} = P\bar{B}_i M(\gamma_q K_j + \gamma_q^- H_j) - (2/\tau_2)R_3$$

$$\Xi_{22} = -Q_1 - 4R_1 - 4R_2$$

$$\Xi_{33} = -(1-\mu)Q_2 - 8R_2 - (4/\delta)R_3 - (4/\tau_2)R_3$$

$$\Xi_2 = \begin{bmatrix} 6R_1 & (6/\tau_2)R_3 & 0 & 0 \\ 6R_1 & 0 & 6R_2 & 0 \\ 0 & (6/\tau_2)R_3 & 6R_2 & 6R_2 + (6/\delta)R_3 \\ 0 & 0 & 0 & 6R_2 + (6/\delta)R_3 \end{bmatrix}$$

$$\Xi_3 = -\text{diag}\{12R_1, (12/\tau_2)R_3, 12R_2, 12R_2 + (12/\delta)R_3\}$$

$$\Xi_5^T = [B_i^T P \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\Pi_2 = [\bar{A}_i \quad 0 \quad \bar{B}_i M(\gamma_q K_j + \gamma_q^- H_j) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad B_{1i}]$$

$\Theta = \tau_1^2 R_1 + \delta^2 R_2 + \tau_2 R_3, \delta = \tau_2 - \tau_1$  和  $\epsilon(P) \subset \ell(H_j)$ , 则  $\forall x_0 \in \epsilon(P)$ , NNCS(15) 渐近稳定, 系统状态轨迹仍能保持在不变集  $\epsilon(P)$  内, 且具有扰动抑制律  $\gamma$ 。也即状态反馈(10)是一使得系统(15)具有鲁棒  $H_\infty$  完整性的容错控制器。

证明: 构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$V(x(t)) = V_1(x(t)) + V_2(x(t)) \quad (24)$$

$$V_1(x(t)) = x^T(t) P x(t) + \int_{t-\tau_1}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds + \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s) Q_2 x(s) ds + \int_{t-\tau_2}^t x^T(s) Q_3 x(s) ds \quad (25)$$

$$V_2(x(t)) = \tau_1 \int_{-\tau_1}^0 \int_{t+s}^t \dot{x}^T(\theta) R_1 \dot{x}(\theta) d\theta ds + \delta \int_{-\tau_2}^{-\tau_1} \int_{t+s}^t \dot{x}^T(\theta) R_2 \dot{x}(\theta) d\theta ds + \int_{-\tau_2}^{-\tau_1} \int_{t+s}^t \dot{x}^T(\theta) R_3 \dot{x}(\theta) d\theta ds \quad (26)$$

其中,  $P^T = P > 0, Q_\kappa^T = Q_\kappa > 0, R_\kappa^T = R_\kappa > 0 (\kappa=1, 2, 3), \delta = \tau_2 - \tau_1$ 。

1) 当  $\omega(t) = 0$  时, 沿着系统(15)的任意轨迹对  $V(x(t))$  求导, 得

$$\dot{V}_1(x(t)) = 2x^T(t) P \dot{x}(t) + x^T(t) (Q_1 + Q_2 + Q_3) x(t) - x^T(t-\tau_1) Q_1 x(t-\tau_1) - x^T(t-\tau_2) Q_3 x(t-\tau_2) - (1-\mu) x^T(t-\tau(t)) Q_2 x(t-\tau(t)) \quad (27)$$

当  $\omega(t) = 0$  时, 根据引理 1, 得

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j [\bar{A}_i x(t) + \bar{B}_i \text{Msat}(K_j(x(t-\tau(t))))] \leq \max_{q \in [1, 2^m]} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j [\bar{A}_i x(t) + \bar{B}_i M(\gamma_q K_j(x(t-\tau(t)))) + \gamma_q^- H_j(x(t-\tau(t)))] \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x(t)) = & \dot{x}^T(t) \Theta \dot{x}(t) - \tau_1 \int_{t-\tau_1}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds - \\ & \delta \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds - \delta \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) \\ & R_2 \dot{x}(s) ds - \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} \dot{x}^T(s) R_3 \dot{x}(s) ds - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T \\ & (s) R_3 \dot{x}(s) ds \end{aligned} \quad (29)$$

$$\Theta = \tau_1^2 R_1 + \delta^2 R_2 + \tau_2 R_3 \quad (30)$$

结合式(28)、式(30),则有

$$\dot{x}^T(t) \Theta \dot{x}(t) \leq \max_{q \in [1, 2^m]} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \zeta^T(t) \Pi_i^T \Theta \Pi_i \zeta(t) \quad (31)$$

其中,  $\Pi_1 = [\bar{A}, 0 \ \bar{B}, M(\gamma_q K_j + \gamma_q^- H_j) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$

$$\begin{aligned} \zeta^T(t) = & [x^T(t) \ x^T(t-\tau_1) \ x^T(t-\tau(t)) \ x^T(t-\tau_2) \\ & \frac{1}{\tau_1} \int_{t-\tau_1}^t x^T(s) ds \ \frac{1}{\tau(t)} \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s) ds \\ & \frac{1}{\tau(t)-\tau_1} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} x^T(s) ds \ \frac{1}{\tau_2-\tau(t)} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} x^T(s) ds] \end{aligned}$$

根据引理 2,得

$$\begin{aligned} -\tau_1 \int_{t-\tau_1}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds \leq & -(x(t) - x(t-\tau_1))^T \times \\ & R_1 (x(t) - x(t-\tau_1)) - 3\Omega_1^T R_1 \Omega_1 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} -\delta \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds \\ \leq -\left(\frac{\delta}{\tau_2-\tau(t)}\right) [(x(t-\tau(t)) - x(t-\tau_2))^T R_2 \times (x(t-\tau(t)) - x(t-\tau_2)) \\ + 3\Omega_2^T R_2 \Omega_2] \\ \leq -[(x(t-\tau(t)) - x(t-\tau_2))^T R_2 \times (x(t-\tau(t)) - x(t-\tau_2)) \\ + 3\Omega_2^T R_2 \Omega_2] \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} -\delta \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds \\ \leq -[(x(t-\tau_1) - x(t-\tau(t)))^T R_2 \times (x(t-\tau_1) - x(t-\tau(t))) \\ + 3\Omega_3^T R_2 \Omega_3] \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} -\int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} \dot{x}^T(s) R_3 \dot{x}(s) ds \\ \leq -\left(\frac{1}{\delta}\right) [(x(t-\tau(t)) - x(t-\tau_2))^T R_3 \times (x(t-\tau(t)) - x(t-\tau_2)) \\ + 3\Omega_4^T R_3 \Omega_4] \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} -\int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s) R_3 \dot{x}(s) ds \\ \leq -\left(\frac{1}{\tau_2}\right) [(x(t) - x(t-\tau(t)))^T R_3 \times (x(t) - x(t-\tau(t))) \\ + 3\Omega_5^T R_3 \Omega_5] \end{aligned} \quad (36)$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega_1 = & x(t) + x(t-\tau_1) - \left(\frac{2}{\tau_1}\right) \int_{t-\tau_1}^t x(s) ds \\ \Omega_2 = & x(t-\tau(t)) + x(t-\tau_2) - \left(\frac{2}{\tau_2-\tau(t)}\right) \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} x(s) ds \\ \Omega_3 = & x(t-\tau_1) + x(t-\tau(t)) - \left(\frac{2}{\tau(t)-\tau_1}\right) \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} x(s) ds \\ \Omega_4 = & x(t-\tau(t)) + x(t-\tau_2) - \left(\frac{2}{\tau_2-\tau(t)}\right) \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} x(s) ds \\ \Omega_5 = & x(t) + x(t-\tau(t)) - \left(\frac{2}{\tau(t)}\right) \int_{t-\tau(t)}^t x(s) ds \end{aligned}$$

根据式(27)~式(36),则有

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = & \dot{V}_1(x(t)) + \dot{V}_2(x(t)) \\ \leq & \max_{q \in [1, 2^m]} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \zeta^T(t) [\Sigma_1 + \Pi_i^T \Theta \Pi_i] \zeta(t) \end{aligned} \quad (37)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = & \begin{bmatrix} \tilde{E}_1 & \tilde{E}_2 \\ * & \tilde{E}_3 \end{bmatrix} \\ \tilde{E}_1 = & \begin{bmatrix} \tilde{E}_{11} & -2R_1 & \tilde{E}_{13} & 0 \\ * & \tilde{E}_{22} & -2R_2 & 0 \\ * & * & \tilde{E}_{33} & -2R_2 - (2/\delta)R_3 \\ * & * & * & -Q_3 - 4R_2 - (2/\delta)R_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

当  $\omega(t)=0$  时,若

$$\Sigma_1 + \Pi_1^T \Theta \Pi_1 < 0 \quad (38)$$

则  $\dot{V}(x(t)) < 0$ ,从而可知椭球体  $\epsilon(P)$  为不变集,即控制器(10)使得执行器饱和不确定 NNCS(15)在吸引域  $\epsilon(P)$  内稳定。

2)当  $\omega(t) \neq 0$  时,建立如下性能指标函数

$$J = \int_0^t [z^T(s)z(s) - \gamma^2 \omega^T(s)\omega(s)] ds \quad (39)$$

在零初始条件下,有

$$J \leq \int_0^t [z^T(s)z(s) - \gamma^2 \omega^T(s)\omega(s) + \dot{V}(x(s))] ds \quad (40)$$

根据  $\dot{V}(x(t))$  的推导过程,得

$$J \leq \int_0^t \zeta^T(s) (\Sigma_2 + \Pi_2^T \Theta \Pi_2) \zeta(s) ds$$

其中,  $\zeta^T(s) = [\zeta^T(t) \ \omega^T(s)]$ 。

若  $\Sigma_2 + \Pi_2^T \Theta \Pi_2 < 0$ ,则满足性能指标  $J < 0$ ,可得

$$\int_0^t [z^T(s)z(s) - \gamma^2 \omega^T(s)\omega(s) + \dot{V}(x(s))] ds < 0 \quad (41)$$

进一步利用零初始条件,得

$$V(t) + \int_0^t z^T(s)z(s) ds < \gamma^2 \int_0^t \omega^T(s)\omega(s) ds \quad (42)$$

对上式两边令  $t \rightarrow \infty$ ,则有  $\|z\|(t) \|_2 \leq \gamma \|\omega(t)\|_2$ ,即若定理 1 成立,则鲁棒容错控制器(10)能使执行器饱和不确定 NNCS(15)具有鲁棒  $H_\infty$  容错性能。证毕。

注 2:定理 1 中对于 L-K 泛函求导所得的交叉项采用 Wirtinger 积分不等式进行处理,优势有二:其一是保守性更少,原因是与 Jensen 积分不等式相比,基于 Fourier 理论的 Wirtinger 积分不等式具有更紧的下界,它不仅依赖于状态  $x(t)$  和时延状态  $x(t-\tau_1), x(t-\tau(t)), x(t-\tau_2)$ ,而且依赖于

状态在时延区间的积分  $\int_{t-\tau_1}^t x(s) ds, \int_{t-\tau(t)}^t x(s) ds, \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} x(s) ds, \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} x(s) ds$ ,更充分地利用了 NCS 时延信息,使得所得判据结论保守性得以减小,且较文献[13]中的 Wirtinger 积分不等式,本文中所采用的引理 2 中积分项具有更紧的下界,使得结论保守性更小;其二是计算复杂度更低,与引入决策变量来增加控制器求解自由度的自由权矩阵方法相比,Wirtinger 积分不等式未引入任何决策变量,降低了采用自由权矩阵方法时 T-S 模糊模型的系统研究中计算复杂度复杂的问题。

### 3.3 执行器饱和不确定 NNCS 鲁棒 $H_\infty$ 容错控制器设计

定理 2 考虑系统(15),给定常数  $\tau_2 > \tau_1 > 0, \delta > 0, \gamma > 0$ ,如果存在对称正定矩阵  $X, \tilde{Q}_\kappa, \tilde{R}_\kappa (\kappa=1, 2, 3)$  及适当维数的矩阵  $K_j, H_j (j=1, 2, \dots, r)$ ,使得对任意可能的执行器失效故障模式  $M$  和可接受的参数不确定性,满足下列矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_6 & \tilde{E}_2 & \tilde{E}_5 & \tilde{E}_7 \\ * & \tilde{E}_3 & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & \tilde{E}_8 \\ * & * & * & \tilde{E}_9 \end{bmatrix} < 0, q \in [1, 2^m] \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \tilde{h}_\kappa \\ * & X \end{bmatrix} \geq 0, g \in [1, m] \quad (44)$$

其中, \* 是由矩阵对称性得到的矩阵块,

$$\tilde{\Xi}_6 = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_{11}^6 & -2\tilde{R}_1 & \tilde{\Xi}_{13}^6 & 0 \\ * & \tilde{\Xi}_{22}^6 & -2\tilde{R}_1 & 0 \\ * & * & \tilde{\Xi}_{33}^6 & -2\tilde{R}_2 - (2/\delta)\tilde{R}_3 \\ * & * & * & -\tilde{Q}_3 - 4\tilde{R}_2 - (2/\delta)\tilde{R}_3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Xi}_{11}^6 = A_i X + X A_i^T + \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_3 - 4\tilde{R}_1 - (4/\tau_2)\tilde{R}_3$$

$$\tilde{\Xi}_{13}^6 = B_i M(\gamma_q \tilde{K}_j + \gamma_q^- \tilde{H}_j) - (2/\tau_2)\tilde{R}_3$$

$$\tilde{\Xi}_{22}^6 = -\tilde{Q}_1 - 4\tilde{R}_1 - 4\tilde{R}_2$$

$$\tilde{\Xi}_{33}^6 = -(1-\mu)\tilde{Q}_2 - 8\tilde{R}_2 - (4/\delta)\tilde{R}_3 - (4/\tau_2)\tilde{R}_3$$

$$\tilde{\Xi}_3 = -diag\{12\tilde{R}_1, (12/\tau_2)\tilde{R}_3, 12\tilde{R}_2, 12\tilde{R}_2 + (12/\delta)\tilde{R}_3\}$$

$$\tilde{\Xi}_2 = \begin{bmatrix} 6\tilde{R}_1 & (6/\tau_2)\tilde{R}_3 & 0 & 0 \\ 6\tilde{R}_1 & 0 & 6\tilde{R}_2 & 0 \\ 0 & (6/\tau_2)\tilde{R}_3 & 6\tilde{R}_2 & 6\tilde{R}_2 + (6/\delta)\tilde{R}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 6\tilde{R}_2 + (6/\delta)\tilde{R}_3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Xi}_3^T = [B_i^T \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\tilde{\Xi}_7 = \begin{bmatrix} X A_i^T & X A_i^T & X A_i^T & D_i & X E_a^T & X C_i^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\Xi}_{31}^7 & \tilde{\Xi}_{32}^7 & \tilde{\Xi}_{33}^7 & 0 & \tilde{\Xi}_{35}^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Xi}_{31}^7 = \tilde{\Xi}_{32}^7 = \tilde{\Xi}_{33}^7 = (\gamma_q \tilde{K}_j + \gamma_q^- \tilde{H}_j)^T M^T B_i^T$$

$$\tilde{\Xi}_{35}^7 = (\gamma_q \tilde{K}_j + \gamma_q^- \tilde{H}_j)^T M^T E_a^T$$

$$\tilde{\Xi}_8 = [B_i^T \ B_i^T \ B_i^T \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\tilde{\Xi}_9 = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_{11}^9 & 0 & 0 & D_i & 0 \\ * & \tilde{\Xi}_{22}^9 & 0 & D_i & 0 \\ * & * & \tilde{\Xi}_{33}^9 & D_i & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_1^{-1} I & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_1 I \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Xi}_{11}^9 = -\frac{1}{\tau_1^2}(2X - \tilde{R}_1), \tilde{\Xi}_{22}^9 = -\frac{1}{\delta^2}(2X - \tilde{R}_2)$$

$$\tilde{\Xi}_{33}^9 = -(1/\tau_2)(2X - \tilde{R}_3)$$

则式(10)是使得系统(15)具有鲁棒  $H_\infty$  完整性的鲁棒容错控制器, 控制器参数由式  $K_j = \tilde{K}_j X^{-1}$  求得。

证明: 将式(17)、式(18)代入式(23), 并应用 Schur 补引理及引理 3 进行变换后, 得

$$\begin{bmatrix} \Xi_6 & \Xi_2 & \Xi_5 & \Xi_7 \\ * & \Xi_3 & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & \Xi_8 \\ * & * & * & \Xi_9 \end{bmatrix} < 0 \quad (45)$$

其中:

$$\Xi_6 = \begin{bmatrix} \Xi_{11}^6 & -2R_1 & \Xi_{13}^6 & 0 \\ * & \Xi_{22}^6 & -2R_2 & 0 \\ * & * & \Xi_{33}^6 & -2R_2 - (2/\delta)R_3 \\ * & * & * & -Q_3 - 4R_2 - (2/\delta)R_3 \end{bmatrix}$$

$$\Xi_{11}^6 = 2PA_i + Q_1 + Q_2 + Q_3 - 4R_1 - (4/\tau_2)R_3$$

$$\Xi_{13}^6 = PB_i M(\gamma_q K_j + \gamma_q^- H_j) - (2/\tau_2)R_3$$

$$\Xi_7 = \begin{bmatrix} A_i^T & A_i^T & A_i^T & PD_i & E_a^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Xi_{31}^7 & \Xi_{32}^7 & \Xi_{33}^7 & 0 & \Xi_{35}^7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Xi_{31}^7 = \Xi_{32}^7 = \Xi_{33}^7 = (\gamma_q K_j + \gamma_q^- H_j)^T M^T B_i^T$$

$$\Xi_{35}^7 = (\gamma_q K_j + \gamma_q^- H_j)^T M^T E_a^T$$

$$\Xi_8 = [B_i^T \ B_i^T \ B_i^T \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\Xi_9 = \begin{bmatrix} \Xi_{11}^9 & 0 & 0 & D_i & 0 \\ * & \Xi_{22}^9 & 0 & D_i & 0 \\ * & * & -(\tau_2 R_3)^{-1} & D_i & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_1^{-1} I & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_1 I \end{bmatrix}$$

$$\Xi_{11}^9 = -(\tau_1^2 R_1)^{-1}, \Xi_{22}^9 = -(\delta^2 R_2)^{-1}$$

当  $R_\kappa^{-1} > 0, \kappa = 1, 2, 3$ , 可得

$$(R_\kappa^{-1} - P^{-1})R_\kappa(R_\kappa^{-1} - P^{-1}) \geq 0$$

则

$$-R_\kappa^{-1} \leq P^{-1}R_\kappa P^{-1} - 2P^{-1} \quad (46)$$

将式(46)代入式(45), 应用 Schur 补引理, 并对变换后的结果进行合同变换, 即两端同时乘以对角矩阵  $diag\{P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, I, I, I, I, I, I\}$ , 并令  $P^{-1} = X$ ,  $XQ_\kappa X = \tilde{Q}_\kappa$ ,  $XR_\kappa X = \tilde{R}_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2, 3$ ),  $K_j X = \tilde{K}_j$ ,  $H_j X = \tilde{H}_j$ ,  $j = 1, \dots, r$ , 得式(43)。

对执行器饱和和反馈控制的线性域条件做如下变换

$$\epsilon \in (P) \subset \ell(H_j) \Leftrightarrow |h_{g\kappa}| \leq 1, \forall x \in \epsilon(P)$$

$$g \in [1, m], h_{g\kappa} \text{ 为 } \tilde{H}_j \text{ 的第 } g \text{ 行}$$

$$\Leftrightarrow h_{g\kappa} P^{-1} h_{g\kappa}^T \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & h_{g\kappa} P^{-1} \\ * & P^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, g \in [1, m] \quad (47)$$

因为  $P^{-1} = X$ ,  $H_j X = \tilde{H}_j$ , 所以式(47)等价于式(44)。即满足式(43)和式(44), 控制律(10)使得系统(15)渐近稳定并具有扰动抑制性能, 控制器参数由式  $K_j = \tilde{K}_j X^{-1}$  求得。证毕。

注 3: 定理 2 对于给定的  $\gamma$  性能指标, 求取的控制律仅为  $\gamma$ -次鲁棒  $H_\infty$  容错控制器。进一步考虑时延的各种已知信息, 通过下式

$$\min_{\tau_1, \tau_2, \delta} \gamma \quad (48)$$

$$\text{s. t. (43, 44), } X > 0, \tilde{Q}_\kappa > 0, \tilde{R}_\kappa > 0 (\kappa = 1, 2, 3)$$

优化, 可求取使 NNCFS(15) 的最小扰动抑制率  $\gamma_{\min}$  及相应的最优鲁棒  $H_\infty$  容错控制器。

## 4 仿真研究

考虑闭环系统(15), 采用文献[16]的非线性系统模型数据。

系统模糊规则如下:

Rule 1: if  $x_1(t)$  is  $\mu_1$ , then

$$\dot{x}(t) = \bar{A}_1 x(t) + \bar{B}_1 Msat(u(t)) + B_{11} \omega(t)$$

Rule 2: if  $x_2(t)$  is  $\mu_2$ , then

$$\dot{x}(t) = \bar{A}_2 x(t) + \bar{B}_2 Msat(u(t)) + B_{12} \omega(t)$$

选用模糊隶属度函数为

$$\mu_1(x_1(t)) = \sin^2(x_1(t)) \text{ 和 } \mu_2(x_1(t)) = \cos^2(x_1(t))$$

其中:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, B_{11} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\omega(t) = \begin{cases} \cos(2\pi t) \exp(-0.2t), & 5 \leq t \leq 10s \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$D_i = \begin{bmatrix} 0.31 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_1(t) = F_2(t) = \begin{bmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \cos t \end{bmatrix}$$

$$Ea_1 = Ea_2 = Eb_1 = Eb_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

通过计算得出,  $A_1$  的特征值为  $-3.4142$  和  $-0.5858$ ,  $A_2$  的特征值为  $-2.4142$  和  $0.4142$ , 即系统在未引入控制器时是不稳定的。

#### 4.1 结论有效性验证

假设采样周期为  $T=0.1s$ , 从传感器到控制器和从控制器到执行器的最大丢包数目为 2, 若取时延  $\tau_k = 0.05 + 0.35|\sin t|$ , 则相应区间时变时延  $\tau(t) = T \cdot \text{Random}(0 \sim 2) + 0.05 + 0.35|\sin t|$ ,  $\tau_2 = 0.6, \tau_1 = 0.05, \delta = 0.55, \mu = 0.35$ . 针对执行器正常和各种失效故障情形, 取  $M_0 = \text{diag}\{1, 1\}$  表示执行器正常,  $M_1 = \text{diag}\{0, 1\}$ ,  $M_2 = \text{diag}\{1, 0\}$  分别表示执行器 1 和执行器 2 发生完全失效故障,  $M_3 = \text{diag}\{0.89, 0.12\}$  表示执行器 1 和执行器 2 发生部分失效故障。取扰动抑制率  $\gamma = 0.9$ , 由定理 2, 通过求解 LMIs(43, 44), 可得鲁棒  $H_\infty$  容错控制器增益矩阵为  $K_1 = \begin{bmatrix} -0.3472 & -0.9461 \\ -0.1876 & -0.3668 \end{bmatrix}$ ,  $K_2 = \begin{bmatrix} -0.3437 & -0.9364 \\ -0.1759 & -0.3361 \end{bmatrix}$ 。

取系统初始状态为  $x(0) = [2 \quad -2]^T$ , 此时执行器在正常  $M_0$  和发生  $M_1, M_2, M_3$  故障情形下, 其状态分量  $x_1, x_2$  的响应曲线图如图 1、图 2 所示, 相应执行器输出信号曲线如图 3、图 4 所示。

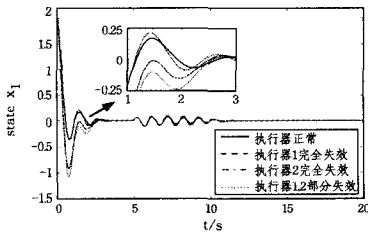


图 1 闭环系统状态  $x_1$  的响应曲线

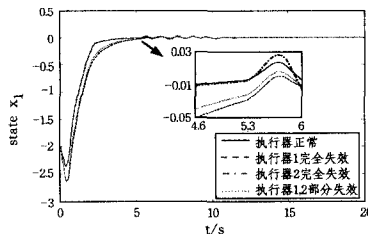


图 2 闭环系统状态  $x_2$  的响应曲线

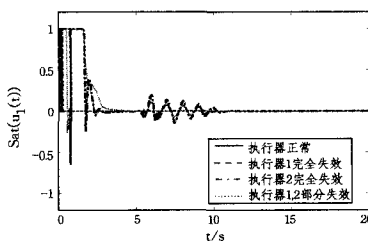


图 3 执行器 1 输出信号曲线  $sat(u_1)$

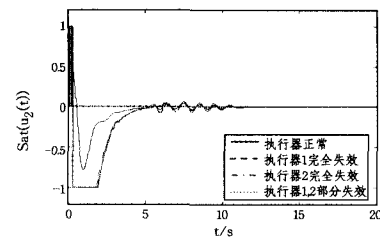


图 4 执行器 2 输出信号曲线  $sat(u_2)$

从图 3 可看出, 当执行器 1 发生完全失效情形时, 其输出变为零, 此时冗余执行器 2 为了分担执行器 1 的任务以确保系统稳定性及一定性能, 输出逐渐增大, 在  $0.01 \sim 1.72s$  进入饱和区, 从图 4 中也可得出类似结果; 然而, 从图 1 和图 2 可看出, 即使图 3、图 4 中执行器的输出出现了饱和, 本文所述方法也确保了具有执行器饱和约束的 NNCS 在发生执行器失效故障时的渐近稳定性, 而且还使其具有一定的抗扰性能。

#### 4.2 判据少保守性验证

下面将分析说明本文所得判据的少保守性问题。为了使表 1、表 2 中相关指标在相同模型、相同研究问题等前提条件下进行比较, 将定理 2 退化为未考虑饱和问题的情形, 即令  $H_j = 0 (j=1, \dots, r)$ ,  $\gamma_q = 1, q \in [1, 2^m]$ , 将文献[12]退化不考虑  $H_2$  条件的情形, 即令  $\alpha = 0$ 。表 1 给出了综合时变时延下界  $\tau_1 = 0.01s$ 、扰动抑制率  $\gamma = 0.9$  时, 4 种方法下的最大允许时延及决策变量个数; 表 2 给出了区间时变时延下界、上界分别为  $\tau_1 = 0.01s, \tau_2 = 0.25s$  时, 4 种方法下的最小扰动抑制率。

表 1  $\tau_1 = 0.01s, \gamma = 0.9$ , 不同方法下相关量比较

采用方法	$\tau_2 - \max$	决策变量
文献[9]	1.8523s	11+r
文献[16]	1.9135s	16+r
文献[12]( $\alpha=0$ , 不考虑 $H_2$ 条件)	2.0687s	7+r
定理 2( $H_j=0, \gamma_q=1$ )	2.1362s	7+r

注: r 为模糊推理规则数。

表 2  $\tau_1 = 0.01s, \tau_2 = 0.25s$ , 不同方法下最小扰动抑制率比较

采用方法	$\gamma_{\min}$
文献[9]	0.5230
文献[16]	0.5075
文献[12]( $\alpha=0$ , 不考虑 $H_2$ 条件)	0.2123
定理 2( $H_j=0, \gamma_q=1$ )	0.2087

从表 1 中可看出, 与文献[9]和文献[16]相比, 定理 2 采用了更少的决策变量, 具有更大的最大允许时延; 而对于采用了相同决策变量的文献[12]和定理 2, 定理 2 中方法更是获得了比较大的最大允许时延。从表 2 中看到, 相同条件下, 本文定理 2 中方法使得不确定闭环故障 NNCS 具有更好的扰动抑制能力。以上均表明, 相比传统 Jensen 积分不等式、自由权矩阵方法, 本文采用新的少保守性 Wirtinger 积分不等式方法所得判据在减少结论保守性、降低计算复杂度方面是极具优势的。它的更大意义是为工程使用的便利性及求解空间的宽泛性提供了前提保障。

**结束语** 本文对执行器饱和和闭环故障 NNCS 具有鲁棒  $H_\infty$  容错性能的少保守性判据准则进行了研究。文中基于 Lyapunov 稳定性理论, 通过引入辅助矩阵并与反馈矩阵组成凸组合形式处理饱和函数项, 同时采用具有更紧下界的改进型 Wirtinger 积分不等式, 推证出系统稳定且具有一定扰动能

(下转第 262 页)

## 参考文献

- [1] Mitola J, Maguire G Q J. Cognitive radio: making software radios more personal[J]. *Personal Communications, IEEE*, 1999, 6(4):13-18
- [2] Tragos E Z, Zeadally S, Fragkiadakis A G, et al. Spectrum Assignment in Cognitive Radio Networks: A Comprehensive Survey[J]. *Communications Surveys & Tutorials, IEEE*, 2013, 15(3):1108-1135
- [3] Wang W, Liu X. List-coloring based channel allocation for open-spectrum wireless networks[C]// *IEEE Vehicular Technology Conference, IEEE*, 1999, 2005, 1: 690-694
- [4] Zheng H, Peng C. Collaboration and fairness in opportunistic spectrum access[C]// *2005 IEEE International Conference on Communications, 2005 (ICC 2005)*. IEEE, 2005, 5: 3132-3136
- [5] 徐勇军, 赵晓晖. 认知无线电系统的顽健资源分配算法[J]. *通信学报*, 2014(4): 124-129
- [6] 贾杰, 李燕燕, 陈剑, 等. 认知无线网中基于差分演化的功率控制与信道分配[J]. *电子学报*, 2013, 41(1): 62-67
- [7] Ni Q, Zarakovitis C C. Nash bargaining game theoretic scheduling for joint channel and power allocation in cognitive radio systems[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*,

2012, 30(1): 70-81

- [8] 欧阳海滨, 高立群, 邹德旋, 等. 和声搜索算法探索能力研究及其修正[J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(1): 57-65
- [9] Geem Z W, Kim J V, Loganathan G. A New Heuristic Optimization Algorithm: Harmony Search[J]. *SIMULATION*, 2001, 76(2): 60-68
- [10] Goldsmith A J, Chua S G. Variable-rate variable-power MQAM for fading channels[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 1997, 45(10): 1218-1230
- [11] Chen Y, Lei Q, Yuan X. Resource allocation based on dynamic hybrid overlay/underlay for heterogeneous services of cognitive radio networks[J]. *Wireless Personal Communications*, 2014, 79(3): 1647-1664
- [12] Zhao Z, Peng Z, Zheng S, et al. Cognitive radio spectrum allocation using evolutionary algorithms[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2009, 8(9): 4421-4425
- [13] 张翅, 曾碧卿, 杨劲松, 等. OFDMA 认知无线网络中面向功率控制的频谱定价与分配[J]. *计算机科学*, 2015, 42(3): 85-90
- [14] Del Ser J, Matinmikko M, Gil-Lopez S, et al. A novel harmony search based spectrum allocation technique for cognitive radio networks[C]// *2010 7th International Symposium on Wireless Communication Systems (ISWCS)*. IEEE, 2010: 233-237

(上接第 252 页)

力的少保守性充分条件, 并通过求解 LMIs 的方式给出了鲁棒  $H_\infty$  容错控制器的求解方法。文中为获得少保守性结论, 构造了新的时滞依赖 L-K 泛函; 对 L-K 泛函求导时: 1) 未忽略任何有用项; 2) 未采用会引入松弛变量的自由权矩阵技术; 3) 未采用本身带有难以克服的保守性的 Jensen 积分不等式, 而是采用了状态、时延状态、状态在时延区间的积分共同依赖, 且具有更紧下界的改进型 Wirtinger 积分不等式。最后, 仿真算例验证了本文方法的有效性及其少保守性。

## 参考文献

- [1] Hespanha J P, Naghshtabrizi P, Xu Yong-gang. A survey of recent results in networked control systems[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 138-172
- [2] 赵维俭, 袁华强, 李迪, 等. 一类物联网控制系统中的时延问题研究[J]. *计算机科学*, 2014, 41(6A): 303-305
- [3] Yan Huai-cheng, Yan Sheng, Zhang Hao, et al. An overview of networked control of complex dynamic systems[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 2014: 1-10
- [4] Huo Zhi-hong, Zheng Yuan, Xu Chang. A robust fault-tolerant control strategy for networked control systems[J]. *Journal of Networked and Computer Applications*, 2011, 34(2): 708-714
- [5] 黄鹤, 谢德晓, 张登峰, 等. 基于 T-S 模糊模型的网络控制系统鲁棒  $H_\infty$  容错控制[J]. *系统工程与电子技术*, 2010, 32(6): 1292-1298
- [6] Li Wei, Cao Hui-chao, Wan Jun. Robust fault-tolerant control for uncertain NCS based on dynamic output feedback[C]// *Proceedings of the 3rd International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation*. Shanghai, China, 2011, 3: 179-186

- [7] Zhang Yu-quan, Zhong Qiu-hai, Wang Yan, et al. Fault-tolerant design for MIMO networked control systems with communication constraints[C]// *Proceedings of the Chinese Control and Decision Conference*. Yantai, China, 2008, 1380-1384
- [8] Feng Jian, Wang Shen-quan. Reliable fuzzy control for a class of nonlinear networked control systems with time delay[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(7): 1091-1099
- [9] 李炜, 蒋栋年. 基于 T-S 模糊模型的非线性网络化控制系统的  $H_\infty$  鲁棒容错控制[J]. *控制与决策*, 2010, 25(4): 598-605
- [10] Wang Hui-jiao, Zhou Bo, Lim Cheng-chew, et al.  $H_\infty$  fault-tolerant control of networked control systems with actuator failures[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2014, 12(8): 1127-1136
- [11] Peng Chen, Fei Min-Rui, Tian En-gang. Networked control for a class of T-S fuzzy systems with stochastic sensor faults[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2013, 212: 62-77
- [12] 李炜, 赵莉, 康莉莎, 等. 执行器故障不确定非线性 NCS 鲁棒满意容错设计[J]. *系统仿真学报*, 2014, 26(11): 2668-2674
- [13] Seuret A, Gouaisbaut F. On use of the Wirtinger inequalities for time-delay systems[C]// *Proceedings of the 10th IFAC*, Boston, United States, 2012, 10: 260-265
- [14] 李元龙, 林宗利. 奇异线性系统在执行器饱和和受限下不变集条件的改进[J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(7): 955-961
- [15] Seuret A, Gouaisbaut F. Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems[J]. *Automatica*, 2013, 49(9): 2860-2866
- [16] 王君. 非线性 NCS 的鲁棒容错控制研究[D]. 兰州: 兰州理工大学电气工程与信息工程学院, 2013: 44-46
- [17] Wang You-yi, Xie Li-hua, De Souza C E. Robust control of uncertain nonlinear systems[J]. *Systems and Control Letters*, 1992, 19(2): 139-149