

关于互连网络群论模型的一簇猜想

师海忠¹ 师越²

(西北师范大学数学与统计学院 兰州 730070)¹ (图科技大数据研究中心 兰州 730070)²

摘 要 连通图生成的 Cayley 图是作为互连网络的群论模型提出来的概念。猜想: 设 $G=(V, E)$ 是具有顶点集 $\{1, 2, \dots, n\} (n>2)$ 和 m 条边的连通图。如果 $m=2r$, 则由 G 生成的 Cayley 图是边不交的 $k(0 \leq k \leq r)$ 个 Hamilton 图和 $m-2k$ 个完美对集的并; 如果 $m=2r+1$, 则由 G 生成的 Cayley 图是边不交的 $k(0 \leq k \leq r)$ 个 Hamilton 图和 $m-2k$ 个完美对集的并。特别地, 对于 $k=r$ 和星网络, 这个猜想的特殊情形是 1998 年由师海忠提出来的。

关键词 Cayley 图, 对换图, Hamilton 图, 完美对集, 猜想

中图法分类号 TP393 **文献标识码** A

Variety of Conjectures on Group-theoretic Model for Interconnection Networks

SHI Hai-zhong¹ SHI Yue²

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)¹

(Research Center of Big Data & Graph Tech, Lanzhou 730070, China)²

Abstract Cayley graph generated by a connected graph was proposed to design certain interconnection networks for supercomputers, on-chip interconnection and data center networks. The conjecture is that let $G=(V, E)$ be a connected graph with node set $\{1, 2, \dots, n\} (n>2)$ and m edges. If $m=2r$, then the Cayley graph generated by G is the union of $k(0 \leq k \leq r)$ edge-disjoint Hamiltonian cycles and $m-2k$ perfect matchings. If $m=2r+1$, then the Cayley graph generated by G is the union of $k(0 \leq k \leq r)$ edge-disjoint Hamiltonian cycles and $m-2k$ perfect matchings. In particular, for $k=r$ and star graph, the conjecture was proposed by Hai-zhong Shi in 1998.

Keywords Cayley graph, Transposition graph, Hamiltonian cycle, Perfect matching, Conjecture

1 引言

为设计超级计算机互连网络/片上互连网络/数据中心网络, S. B. Akers 等提出了连通圈生成的 Cayley 图, 也称为连通对换图的 Cayley 图^[1-4]。自从 1998 年以来, 师海忠等提出了关于互连网络(包括星网络、对换树)的 Cayley 图等的多个猜想^[3-8]。这些文献^[3-8]受到了研究者的广泛关注, 但到目前为止, 这些猜想中的任何一个都尚未得到解决。通过对连通图生成的 Cayley 图的 16 年的研究和探索, 在本文中, 我们提出了一个更强的猜想。这个猜想不仅统一了文献^[3-8]中提出的多个猜想(即若本文中提出的猜想成立, 则文献^[3-8]中提出的猜想都成立), 而且有了更具有一般性的意义, 也就是说文献^[3-8]中提出的多个猜想都是本文提出的猜想的特殊情形。通过提出这个猜想, 我们希望该猜想将扮演设计互连网络和从理论上研究连通图生成 Cayley 图的双重重要角色。

设 $n \geq 3$ 且 G 是一个具有结点集 $\{1, 2, \dots, n\}$ 和边集 $E(G)$ ($|E(G)|=m$) 的连通图。设 S_n 是 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上的对称群。 $T(G)=\{(ij) | (ij) \text{ 是 } S_n \text{ 的一个对换且 } (i, j) \in E(G)\}$ 。根据文献^[1, 2], $T(G)$ 是 S_n 的生成集。Cayley 图 $Cay(S_n, T(G))$ 称为 G 生成的 Cayley 图, 记为 $Cay(S_n, G)$ ^[1-3]。特别地, 如果 G 为星, 则 $Cay(S_n, T(G))$ 是星网络; 如果 G 是一条路, 则

$Cay(S_n, T(G))$ 是冒泡排序网络 B_n ; 如果 G 是一个圈, 则 $Cay(S_n, T(G))$ 是修正冒泡排序网络 MB_n ; 如果 G 为扇, 则 $Cay(S_n, T(G))$ 是 bubble-sort star 网络 BS_n ; 如果 G 是轮, 则 $Cay(S_n, T(G))$ 是轮网络 WG_n ; 如果 G 是完全图, 则 $Cay(S_n, T(G))$ 是完全对换网络 CT_n 。文献^[14]中称其为对换网络 (Transposition Network) 等等。

2 猜想

在本文中提出:

猜想: 设 $n \geq 3$ 且 G 是一个具有结点集 $\{1, 2, \dots, n\} (n>2)$ 和 m 条边的连通图。如果 $m=2r$, 则由 G 生成的 Cayley 图 $Cay(S_n, G)$ 是边不交的 $k(0 \leq k \leq r)$ 个 Hamilton 图和 $m-2k$ 个完美匹配的并; 如果 $m=2r+1$, 则由 G 生成的 Cayley 图 $Cay(S_n, G)$ 是边不交的 $k(0 \leq k \leq r)$ 个 Hamilton 图和 $m-2k$ 个完美匹配的并。

如果 $n=3$, 则 G 有下列两种情形:

情形(1): 2-1-3, 也就是说, $V(G)=\{1, 2, 3\}$, $E(G)=\{(1, 2), (1, 3)\}$, $m=2$, $r=1$, $m=2r$, $Cay(S_n, G)$ 是星网络, 由文献^[2]知, 该猜想成立。

情形(2): 1-2-3-1, 也就是说, $V(G)=\{1, 2, 3\}$, $E(G)=\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, $m=3$, $r=1$, $m=2r+1$, $Cay(S_n, G)$ 是

完全对换网络,由文献[7]知,该猜想成立。

总之,当 $n=3$ 时,该猜想成立。

如果 $n=4$,则 G 有下列 6 种情形:

情形(1): $V(G)=\{1,2,3,4\}$, $E(G)=\{(1,2), (1,3), (1,4)\}$, $m=3, r=1, m=2r+1, k=0$ 或 1, $Cay(S_n, G)$ 是 4-星网络,由文献[3]知,该猜想成立。

情形(2): $V(G)=\{1,2,3,4\}$, $E(G)=\{(1,2), (2,3), (3,4)\}$, $m=3, r=1, m=2r+1, k=0$ 或 1, $Cay(S_n, G)$ 是 4-冒泡排序网络,由文献[4,5]知,该猜想成立。

情形(3): $V(G)=\{1,2,3,4\}$, $E(G)=\{(1,2), (2,3), (3,4)\}$, $m=4, r=2, m=2r, k=0, 1$ 或 2; $Cay(S_n, G)$ 是 4-修正冒泡排序网络,由文献[4,6]知,该猜想成立。

情形(4): $V(G)=\{1,2,3,4\}$, $E(G)=\{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3)\}$, $m=4, r=2, m=2r, k=0, 1$ 或 2; 当 $k=2$ 时, $Cay(S_n, G)$ 是下述两个 Hamilton 圈的并:

Hamilton 圈 1:

1234-3214-3124-1324-2314-2134-4132-4312-3412-3142-2143-2413-4213-4123-1423-1243-3241-3421-4321-2341-1342-1432-2431-4231-1234

Hamilton 圈 2:

1234-1324-4321-4231-3241-2341-2431-3421-1423-2413-3412-1432-4132-3142-1342-4312-2314-3214-4213-1243-2143-4123-3124-2134-1234

因此,当 $m=4, r=2, m=2r, k=0$ 或 1 时,该猜想成立。

总之,当 $m=4, r=2, m=2r, k=0, 1$ 或 2 时,该猜想成立。

情形(5): $V(G)=\{1,2,3,4\}$, $E(G)=\{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (3,4)\}$, $m=5, r=2, m=2r+1, k=0, 1$ 或 2, $Cay(S_n, G)$ 是 4-bubble-sort star 网络,由上述情形(4)知,该猜想成立。

情形(6): $V(G)=\{1,2,3,4\}$, $E(G)=\{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$, $m=6, r=3, m=2r, k=0, 1, 2$ 或 3, $Cay(S_n, G)$ 是 4-完全对换网络,由文献[4,7]知,该猜想成立。

综上所述,当 $n=3$ 或 4 时,该猜想成立。另外,文献[9-12,14]中的结果是支持该猜想的正确性的。

引理 1^[13] 如果 G 是 k -正则二分图且 $k>0$,则 G 有一个完美匹配。

我们很容易知道:

推论 1 如果 G 是 k -正则二分图且 $k\geq 0$,则 G 是 k 个边不交完美匹配的并。

定理 2 对正整数 $s, t(0<s<t\leq r(r$ 即为猜想中的 $r))$, 如果该猜想对 t 成立,则该猜想对 s 成立。

证明:因为 $Cay(S_n, G)$ 是有 $n!$ 个结点($n!$ 为偶数)的 m -正则二分图($m>0$),每个有 $n!$ 个结点的 Hamilton 圈能够被分解成两个边不交完美匹配的并,所以该定理成立。

特别地,我们有:

猜想 1 设 $n\geq 3$ 且 S_n 是星网络。如果 $n=2r+1$,则 S_n 是边不交 $k(0\leq k\leq r)$ 个 Hamilton 圈和 $n-1-2k$ 个完美匹配的并;如果 $n=2r+2$,则 S_n 是边不交 $k(0\leq k\leq r)$ 个 Hamilton 圈和 $n-1-2k$ 个完美匹配的并。

当 $k=r$ 时,猜想 1 就是文献[3-6,11,12]中关于 S_n 的猜想。

猜想 2 设 $n\geq 3$ 且 B_n 是冒泡排序网络。如果 $n=2r+1$,则 B_n 是边不交 $k(0\leq k\leq r)$ 个 Hamilton 圈和 $n-1-2k$ 个完美匹配的并;如果 $n=2r+2$,则 B_n 是边不交 $k(0\leq k\leq r)$ 个 Hamilton 圈和 $n-1-2k$ 个完美匹配的并。

当 $k=r$ 时,猜想 2 就是文献[3,7]中关于 B_n 的猜想。

猜想 3 设 $n\geq 3$, T_n 是具有节点集 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的树, CTT_n 是 Cayley 图 $Cay(S_n, T_n)$ 。如果 $n=2r+1$,则 CTT_n 是边不交 $k(0\leq k\leq r)$ 个 Hamilton 圈和 $n-1-2k$ 个完美匹配的并;如果 $n=2r+2$,则 CTT_n 是边不交 $k(0\leq k\leq r)$ 个 Hamilton 圈和 $n-1-2k$ 个完美匹配的并。

猜想 4^[8] 设 $n\geq 3$, MB_n 是修正冒泡排序网络。如果 $n=2r$,则 MB_n 是边不交 $k(0\leq k\leq r)$ 个 Hamilton 圈和 $n-2k$ 个完美匹配的并;如果 $n=2r+1$,则 MB_n 是边不交 $k(0\leq k\leq r)$ 个 Hamilton 圈和 $n-2k$ 个完美匹配的并。

猜想 5 设 $n\geq 3$, BS_n 是 bubble-sort 网络。 BS_n 是边不交 $k(0\leq k\leq n-2)$ 个 Hamilton 圈和 $2n-3-2k$ 个完美匹配的并。

猜想 6^[9] 设 $n\geq 3$, WG_n 是轮网络。 WG_n 是边不交 $k(0\leq k\leq n-1)$ 个 Hamilton 圈和 $2n-2-2k$ 个完美匹配的并。

猜想 7^[10] 设 $n\geq 3$, CT_n 是完全对换网络。如果 $n=4r$,则 CT_n 是边不交 $k(0\leq k\leq r(4r-1))$ 个 Hamilton 圈和 $2r(4r-1)-2k$ 个完美匹配的并;如果 $n=4r+1$,则 CT_n 是边不交 $k(0\leq k\leq r(4r+1))$ 个 Hamilton 圈和 $2r(4r+1)-2k$ 个完美匹配的并;如果 $n=4r+2$,则 CT_n 是边不交 $k(0\leq k\leq r(4r+3))$ 个 Hamilton 圈和 $2r(4r+3)+1-2k$ 个完美匹配的并;如果 $n=4r+3$,则 CT_n 是边不交 $k(0\leq k\leq 4r^2+5r+1)$ 个 Hamilton 圈和 $2(4r^2+5r+1)+1-2k$ 个完美匹配的并。

结束语 Cayley 图 $Cay(S_n, T_n)$ 是作为设计超级计算机互连网络的群论模型而提出来的^[1]。在第 2 节提出的这些猜想对弄清多种互连网络(包括星网络、冒泡排序网络等等)的结构具有决定性的意义。如果这些猜想是正确的,则星网络、冒泡排序网络等都是多重环网络,这将为这些网络走向工业界打下坚实的基础。

参考文献

- [1] Aker S B, Krishnamurthy B. A group-theoretic model for interconnection networks [J]. IEEE Transactions on Computers, 1989, 38(4): 555-565
- [2] Lakshimivarahan S, Jwo J S, Dhall S. Symmetric interconnection networks based on Cayley graph of permutation groups: A survey [J]. Parallel Computing, 1993, 19(4): 361-407
- [3] 师海忠. 互连网络的代数环模型 [D]. 北京: 中国科学院应用数学研究所, 1998
- [4] 师海忠, 路建波. 关于互连网络的几个猜想 [J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(31): 112-115
- [5] Shi H Z, Niu P F, Lu J B. One conjecture of bubble sort graphs [J]. Information Processing Letters, 2011, 111(18): 926-929
- [6] 师海忠, 马继勇, 牛攀峰, 等. 关于修正冒泡排序网络的一簇猜想 [J]. 计算机科学, 2011, 38(10A): 265-267, 275

(下转第 279 页)

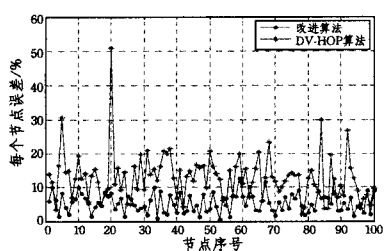


图3 定位误差比较

3.2 误差影响因素分析

通常情况下,网络连通度对 DV-hop 算法有比较大的影响,本文主要考虑节点密度和通信半径这两个直接关系到网络连通度的因素,在节点分布区域和网络环境不变的场景下,分别就不同的节点密度及通信半径进行分析。

图4给出了仅仅改变未知节点数量的定位误差。由图可以发现,节点密度对改进算法的影响远远小于对传统 DV-hop 算法的影响,且随着节点密度的增加,误差变化很小,显然改进算法具有更高的稳定性。

图5给出了在节点密度保持不变的情况下,两种算法在锚节点通信半径发生变化时定位误差的变化情况。由图可知,随着通信半径的增加,传统算法和本文改进算法的定位误差逐步减小,但当通信半径达到50以后,本文改进算法的定位精度不再提高。

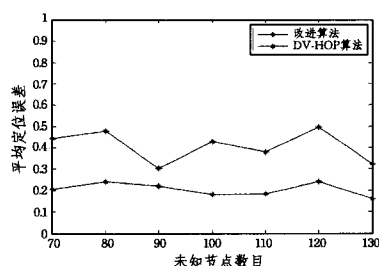


图4 不同节点密度下的定位误差

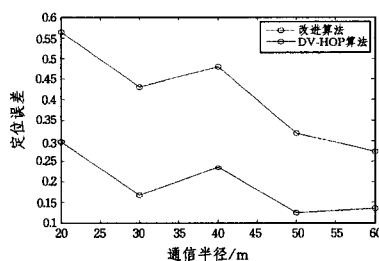


图5 不同通信半径下的定位误差

结束语 为改善 DV-Hop 算法的定位性能,提出了利用锚节点移动的方法实现对无线传感器网络节点的定位。该算

法具有以下特点:

(1)锚节点数量少。利用移动锚节点的移动实现多个静态锚节点的作用。

(2)定位算法简单。在传统 DV-Hop 算法的基础上进行改进,算法复杂度低。

(3)定位精度高。通过对平均跳距的修正,提高了精度。

算法仅仅考虑了锚节点指定移动轨迹的情况,如何优化锚节点移动轨迹以进一步提高定位精度还有待于进一步研究。

参考文献

- [1] Wang Li-xia, Zhang Pai, Wei Li. A New Dv-hop Algorithm in Wireless Sensor Network [C]//International Symposium on Instrumentation and Measurement, Sensor Network and Automation. 2013;194-197
- [2] Fu Cai-xin, Qian Zhi-hong, Ji Guang, et al. An Improved DV-Hop Localization Algorithm in Wireless Sensor Network[C]//International Conference on Information Technology and Applications. 2013;13-16
- [3] 谭志,张卉. 基于节点间覆盖关系的改进 DV-hop 算法[J]. 北京邮电大学学报,2014,37(1):35-38
- [4] 李娟,刘禹,钱志鸿,等. 基于双通信半径的传感器网络 DV-Hop 定位算法[J]. 吉林大学学报(工学版),2014,44(2):502-506
- [5] Wang Xue-guang, Lin Jie-ke. Research and Improvement of DV-Hop Localization Algorithm For Wireless Sensor Network[J]. Applied Mechanics and Materials, 2011(44-47):4028-4032
- [6] Cheng Bo-yu, Yu Lei, Tan Jun, et al. DV-Hop Localization Algorithm in WSN Based on Weighted of Correction in Hop Distance [J]. Applied Mechanics and Materials, 2013(303-306):143-148
- [7] Li Sheng-pu, Wang Xiao-hui. The Research on Wireless Sensor Network Node Positioning based on DV-Hop Algorithm and Cuckoo Searching Algorithm [C]//International Conference on Mechatronic Sciences, Electric Engineering and Computer. 2013; 620-623
- [8] Shrawan K D K, Lobiyal. An Advanced DV-Hop Localization Algorithm for Wireless Sensor Networks [J]. Wireless Pers Commun, 2013(71):1365-1385
- [9] Tomic S, Mezei I. Improved DV-Hop Localization Algorithm for Wireless Sensor Networks [C]//2012 IEEE 10th Jubilee International Symposium on Intelligent Systems and Informatics. 2012;389-394
- [10] Hu Yu, Li Xue-mei. An improvement of DV-Hop localization algorithm for wireless sensor networks [J]. Telecommun Syst, 2013(53):13-18

(上接第246页)

- [7] 师海忠,王国亮,马继勇,等. 完全对换网络的一簇猜想[J]. 计算机科学, 2012, 39(6A):404-407
- [8] 师海忠,侯菲菲,马继勇,等. 关于轮网络的一簇猜想[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(10):139-144
- [9] 路建波,师海忠. Star 网络 S_5 的 Hamilton 圈分解[J]. 数学的实践与认识, 2010, 40(31):193-197
- [10] 路建波,师海忠,牛攀峰. Star 网络 S_6 的 Hamilton 圈分解[J]. 工程数学学报, 2011, 28(4):565-568
- [11] Hussak W, Schroder H. A Hamiltonian decomposition of 5-star

[J]. International Journal of Computer and Information Engineering, 2010, 4(1):39-43

- [12] Cada R, Kaiser T, Rosenfeld M, et al. Disjoint Hamilton cycles in the star graph[J]. Information Processing Letters, 2009, 110(1):30-35
- [13] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory[M]. Springer, 2008
- [14] Huang R-W. The property of edge-disjoint Hamiltonian cycles in transposition networks and hypercube-like networks [J]. Discrete Applied Mathematics, 2015, 118(1):109-122