MSP 问题 NP 完全性研究

吴添君 姜新文

（国防科技大学计算机学院 长沙 410073）

摘 要 针对文献[1,2]提出的 MSP 问题，研究了 MSP 问题与着色问题、子图同构问题的对应关系，揭示了 MSP 问题所反映的 NP 完全问题的共性；分析了 MSP 问题的相变现象，为文献[1,2]提出的多项式时间算法框架的测试提供了难例产生方法。

关键词 MSP 问题，NP 完全，问题归结，相变

中图法分类号 TP301.5 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2015.7.003

On NP-completeness of MSP Problem

WU Tian-jun JIANG Xin-wen

(College of Computer Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract Based on the MSP (multistage graph simple path) problem in [1,2], we studied the correlation between MSP, K-Coloring and sub-graph isomorphism, revealed the expressive property of MSP to better understand NP-completeness, and analyzed the phase-transition phenomenon of the MSP problem in order to generate hard test cases for the relevant polynomial-time algorithm proposed in [1,2].

Keywords MSP problem, NP-complete, Problem reduction, Phase transition

1 引言

NP 完全问题是理论计算机领域多年悬而未决的难题。自从 Cook 证明了第一个 NP 完全问题以来，大量新的 NP 完全问题不断被发现，而且很多问题具有重要的实际应用，比如，SAT 问题是大规模集成电路的自动布线和人工智能领域的关键问题，着色问题在组合优化、规划调度等方面有着广泛应用，而子图同构问题则是模式匹配中的核心问题。

针对各种 NP 完全问题的相应求解算法层出不穷，然而至今没有一个确定性的完全算法能在多项式时间内给出问题的解。量子计算机的提出，似乎为多项式时间求解 NP 完全问题提供了可能，然而目前也只有诸如整数分解等问题存在多项式时间的量子算法，但该问题很可能并不属于 NP 完全问题。因此 NP 完全问题的研究仍然具有深远意义。无论 NP＝P 抑或 NP≠P，对 NP 完全问题进行研究能促进人们加深对问题的求解乃至人类思维过程的理解，纵然未必存在多项式时间算法也可推动高效算法的设计和应用。

文献[1,2]为 NP 完全问题的研究提供了新的突破点。文中提出了一种设计求解 NP 完全问题的多项式时间完全算法的思路。首先，提出了一种称为 MSP 问题的新的 NP 完全问题，该问题具有良好的结构，将掩藏在其他 NP 完全问题下的问题搜索空间的结构暴露了出来，这样能够更有针对性地设计高效算法。其次，文献中还提出了设计多项式时间算法的独特思路：为空间中的每个结点配一个局部解集合，该集合是从该结点的角度观察解空间得到的解；对于两两结点间的解集的公共部分中的结点，其解集合又必须同时与上述两个结点之解集合各有交集。如果满足上述条件，就认为该问题存在全局解，反之则不存在。由于不区分每个解集合中的每个解，该算法不需要枚举，因此不会造成指数爆炸。

对该算法的证明需要克服以下难点。常规的算法为保证完全性，必然要枚举解空间，以分治算法为例，它最终会将原问题分裂成指数个子问题。因此，上文提及的新算法框架势必需要证明能够保证其计算结果和分治算法分裂后的结果等价。为解决此问题，文献[1]提出了一种基于保持问题同态性的撕裂的证明方法。撕裂的具体原理比较复杂，图 1 给出了简单示例，其中点 v 被撕裂成两个点 v_1 和 v_2，显然问题规模会成指数增长，但这只存在于证明中，与算法本身的执行时间复杂度无关。

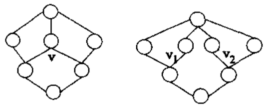

图 1 撕裂示意图

本文首先通过分别将着色问题和子图同构问题归结为 MSP 问题，进一步研究 MSP 问题的良好的结构性质以及强大的表达能力，印证文献[1,2]中关于 MSP 问题 NP 完全性的证明，消除 MSP 问题是否 NP 完全的疑虑，把研究重心落

到稿日期：2014-08-03 返修日期：2014-11-14 本文受国家自然科学基金(61272010)资助。

吴添君(1989－)，男，硕士生，主要研究方向为计算复杂性，E-mail：junglesprint139@139.com；姜新文(1962－)，男，硕士，教授，主要研究方向为算法复杂性、计算复杂性、信息安全。

实到算法框架的正确性证明，并为其他 NP 完全问题求解算法的设计提供思路。本文后半部分将从相变的角度对 MSP 问题的 NP 完全性进行探讨，可为今后测试算法正确性时的设计难例提供理论依据。

2 MSP 问题描述

定义 1 加标多级图(Labeled Multistage Graph)[1-3] G 是有向图，由五元组 $G=\langle V,E,s,d,L\rangle$ 表示，其中

1) $L\in \mathrm{N}$ 为图 G 的级数。

2) $V=\bigcup_{0\leqslant i\leqslant L} V_i$ 为 G 的顶点集，其中 V_i 互不相交。若 $v\in V_i$，则称 $v\in V_i$ 为第 i 级的顶点。

3) $V_i=\{s\}$，$V_L=\{d\}$。s,d 分别称为顶点和终点。

4) E 为边集。用 $\langle u,v,l\rangle(1\leqslant l\leqslant L,u\in V_{L-1},v\in V_L)$ 表示 E 中的每条边 e，并称之为 E 中第 l 级的边。

5) 每个顶点 $v\in V\backslash\{s\}$ 分别标记一个集合 $E(v)\subseteq E$，称为 v 的顶点边集。

用 $v_i-v_{i+1}-\cdots-v_{i+n}$ 表示 G 中一条经过顶点 $v_i,v_{i+1},\cdots,v_{i+n}$ 的有向路径。若路径 $v_i-v_{i+1}-\cdots-v_{i+n}$ 上的所有边都包含在 $E'(E'\subseteq E)$ 中，则记作 $v_i-v_{i+1}-\cdots-v_{i+n}\in E'$。

定义 2 给定加标多级图 $G=\langle V,E,s,d,L\rangle$ 中路径 $s-v_1-\cdots-v_L(v_L=d)$，若对任意 $i(1\leqslant i\leqslant L)$ 有 $s-v_1-\cdots-v_i\in E(v_i)$，则称之为简单路径(Simple Path)[1-3]。

例如在图 2 给出的加标多级图中，存在的一条简单路径 $s-v_2-v_5-d$。在本文所有图中均以虚线标示简单路径。

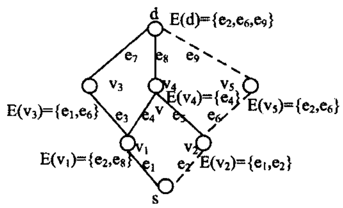

图 2 加标多级图实例

定义 3 MSP(Multistage graph Simple Path)问题[1-3]：判定给定的加标多级图中简单路径的存在性。

3 MSP 问题复杂性证明

本文给出了将着色、子图同构问题归结为 MSP 问题的方法，从而进一步证明了 MSP 问题的 NP 完全性，揭示了 MSP 问题与多种 NP 完全问题之间的直接对应关系。

3.1 K-着色问题归结到 MSP 问题

定义 4 K-着色问题[5]是指：给定无向图 $G'=\langle V',E'\rangle$ 以及正整数 n 和 K，其中 $n=|V'|$，$K\leqslant n$；G' 是否可被 K-着色，即是否存在函数 $f:V'\rightarrow\{1,2,\cdots,K\}$ 使得若 $(v_i,v_j)\in E'$ 则 $f(v_i)\neq f(v_j)$，其中 $v_i,v_j\in V'$，$i\neq j$。

算法 1 构造如下多级图 $G=\langle V,E,s,d,L\rangle$：

$\mathrm{L=n+1}$.

$\mathrm{V_0=\{s\},V_L=\{d\}}$.

$\mathrm{V_i=\{v_{i,k}\,|\,v_i\in V',1\leqslant k\leqslant K\}(1\leqslant i\leqslant n)}$.

$\mathrm{E}=\bigcup_{0\leqslant i\leqslant L-1,w\in V_i,w'\in V_{i+1}}\{\langle \mathrm{w,w',i+1}\rangle\}$.

$\mathrm{E(d)=E}$.

$\mathrm{E(v_{i,k})=E\backslash\{e\,|\,e\in E}$，e 含顶点 $\mathrm{v_{j,k},(v_i,v_j)\in E',1\leqslant k\leqslant K\}}$.

图 3 给出了一个具体实例。图 3(a)中无向图的 3-着色问题可以归结得到的图 3(b)所示的多级图。

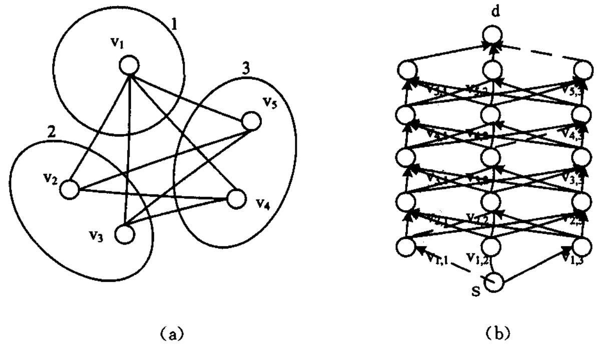

图 3 从着色问题到 MSP 问题的归结

定理 1 G' 可 K-着色当且仅当 G 存在简单路径。

证明：首先证必要性。如果 G' 可 K-着色，即有着色函数 $f:V'\rightarrow\{1,2,\cdots,K\}$，使得若 $(v_i,v_j)\in E'$ 则 $f(v_i)\neq f(v_j)$，其中 $v_i,v_j\in V'$，$i\neq j$。因此 G 包含一条路径 $P=s-v_{1,k_1}-\cdots-v_{n,k_n}-d$，其中 P 经过 $v_{i,k_i}(1\leqslant i\leqslant n)$ 仅当有 $v_i\in V'$ 使得 $f(v_i)=k_i$。如果 $E(v_{i,k_i})$ 排斥 $s-\cdots-v_{i,k_i}$ 上的某条边，则一定存在顶点 $v_j\in V'$ 使得 $(v_i,v_j)\in E'$。进而可得 $k_i=f(v_i)=f(v_j)=k_j$。然而由函数 f 的定义知，$f(v_i)\neq f(v_j)$。两者矛盾。所以 $s-\cdots-v_{i,k_i}\notin E(v_{i,k_i})$。显然 $P\in E(d)$。故 P 是简单路径。

其次证充分性。假设 G 存在一条简单路径 $P=s-v_{1,k_1}-\cdots-v_{n,k_n}-d$。则可构造函数 f 使得若 P 经过 v_{i,k_i} 则 $f(v_i)=k_i$。下证 f 满足着色函数定义。首先，显然它是良定义的。其次，假定存在 $v_i,v_j\in V'(i\neq j)$ 使得 $(v_i,v_j)\in E'$ 且 $f(v_i)=f(v_j)=k(1\leqslant k\leqslant K)$，可得到如下结论：

1) 根据前述 f 的构造方法可知，P 经过 $v_{i,k}$ 和 $v_{j,k}$。

2) 算法 1 中顶点边集的构造：若 $(v_i,v_j)\in E'$，则 $E(v_i)$ 排斥所有以 v_j 为顶点的边，$E(v_j)$ 排斥所有以 v_i 为顶点的边。故 $v_{i,k}$ 和 $v_{j,k}$ 不在同一简单路径上。

1) 与 2) 矛盾，故 f 为着色函数。证毕。

3.2 子图同构问题归结到 MSP 问题

定义 5 子图同构问题[6]描述如下判定问题：给定无向图 $TG=\langle V_{TG},E_{TG}\rangle$ 和 $QG=\langle V_{QG},E_{QG}\rangle$，其中 $m=|V_{QG}|\leqslant|V_{TG}|=n$；$TG$ 是否包含与 QG 同构的子图，即是否存在函数 $f:V_{QG}\rightarrow V_{TG}$，使得对于每对顶点 $u_i,u_j\in V_{QG}$，若 $(u_i,u_j)\in E_{QG}$，则 $(f(u_i),f(u_j))\in E_{TG}$。

算法 2 可构造多级图 $G=\langle V,E,s,d,L\rangle$，满足：

$\mathrm{L=m+1}$.

$\mathrm{V_0=\{s\},V_L=\{d\}}$.

$\mathrm{V_i=\{v_{i,k}\,|\,u_i\in V_{QG}}$ 且 $\mathrm{v_k\in V_{TG},1\leqslant k\leqslant n\}(1\leqslant i\leqslant m)}$.

$\mathrm{E}=\bigcup_{0\leqslant i\leqslant L-1,w\in V_i,w'\in V_{i+1}}\{\langle \mathrm{w,w',i+1}\rangle\}$.

$\mathrm{E(d)=E}$.

$\mathrm{E(v_{i,k})=E\backslash\{e\,|\,e\in E}$，e 含顶点 $\mathrm{v_{j,k'}}$ 使得 $\mathrm{(u_i,u_j)\in E_{QG}}$ 且 $\mathrm{(v_k,v_{k'})\notin E_{TG},i\neq j\}}$.

图 4 是一个简单的归结的例子。显然图 4(a)中 TG 存在子图同构于 QG。图 4(b)给出了对应多级图 G 中的一条简单路径。

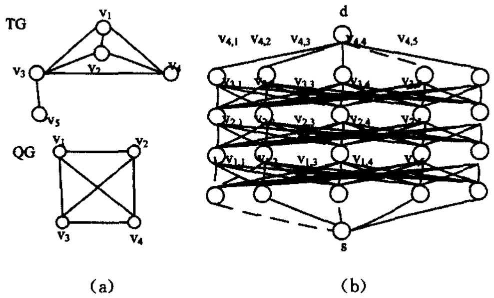

图 4　从子图同构问题到 MSP 问题的归结

定理 2　TG 包含与 QG 同构的子图当且仅当 G 存在简单路径。

证明：首先证明必要性。假定 TG 包含与 QG 同构的子图，即存在函数 $f:V_{QG}\to V_{TG}$，使得对于每对顶点 $u_i,u_j\in V_{QG}$，若 $(u_i,u_j)\in E_{QG}$，则 $(f(u_i),f(u_j))\in E_{TG}$。假设 $f(u_i)=v_{k_i}$（$u_i\in V_{QG},v_{k_i}\in V_{TG}$），则可构造 G 中一条路径 $P=s-v_{i,k_i}-\cdots-v_{m,k_m}-d$。假设 P 不是简单路径，即 P 上存在顶点 v_{i,k_i}（$1\leqslant i\leqslant m$），其顶点边集 $E(v_{i,k_i})$ 不包含路径 $P'=s-\cdots-v_{i,k_i}$ 上的某条边 e。由算法 2 对顶点边集的构造知，e 含顶点 v_{j,k_j}（$i\neq j$）使得 $(u_i,u_j)\in E_{QG}$ 且有 $(v_{k_i},v_{k_j})\notin E_{QG}$。根据 f 的定义，可由 $(u_i,u_j)\in E_{QG}$ 推出 $(v_{k_i},v_{k_j})\in E_{QG}$，从而导出矛盾。必要性得证。

再证充分性。若 G 存在一条简单路径 $P=s-v_{i,k_i}-\cdots-v_{m,k_m}-d$，则可构造函数 f，使得对于 P 上每个顶点 v_{i,k_i}（$1\leqslant i\leqslant m$），有 $f(u_i)=v_{k_i}$（$u_i\in V_{QG},v_{k_i}\in V_{TG}$）。假定 $(u_i,u_j)\in E_{QG}(i\neq j)$。若 $(v_{k_i},v_{k_j})\notin E_{QG}$，根据算法 2 对 $E(v_{i,k_i})$ 的构造，一定有 $E(v_{i,k_i})$ 不含涉及到顶点 v_{j,k_j} 的边，这与 P 为简单路径矛盾。证毕。

4　MSP 问题相变现象研究

引理 1（Lovász 局部引理[7]）　令 $A_i,\cdots,A_n$ 为一组"坏事件"集合，$D_j\subseteq\{A_i,\cdots,A_n\}$ 代表与 A_i 相关的事件集合（即 A_i 与所有不在 D_j 中的事件相互独立）。如果存在一组实数 $x_1,\cdots,x_n\in[0,1)$ 使得对每个 i 有 $\Pr[A_i]\leqslant x_i\prod_{j\in D_i}(1-x_j)$，则 $\Pr[\bigwedge_{i=1}^{n}\overline{A}_i]\geqslant\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)>0$。

令 $x_i=1/(d+1)$，有：

推论 1　假定 $\Pr[A_i]\leqslant p<1$ 且每个事件 A_i 与除了最多 d 个事件 A_j 之外的其他所有事件相互独立。若 $e\cdot p(d+1)\leqslant 1$，则 $\Pr[\bigwedge_{i=1}^{n}\overline{A}_i]>0$。

给定多级图 $G=\langle V,E,s,d,L\rangle$，边集 $E'\subseteq E$，以及顶点 $u\in V_i,v\in V_j(i<j)$，引入如下 3 种算子。

算子 1　$E'[i:j]:=\{e|e$ 为 E' 中第 $k(i\leqslant k\leqslant j)$ 级边$\}$。

算子 2　$[E']_u^v:=\{e|e$ 在 E' 中某条路径 $u-\cdots-v$ 上$\}$。

算子 3　给定 G 的子图 G'，其边集为 E'，并且 $v\in V$。$\pi_{E'}(v):=G'$ 为从 s 到 v 的路径数目。

定义 6　对于多级图 $G=\langle V,E,s,d,L\rangle$。若 $v\in V$，则其顶点边集 $E(v)$ 的密度定义为

$$\rho(v)=\frac{\pi_{E(v)}(v)}{\pi_E(v)}$$

对顶点之间的相关性作简化：

定义 7　顶点 $u\in V_i,v\in V_j(i<j)$ 是相关的，当且仅当

$[E(u)]_s^u\subseteq[E(v)]_s^v$

或

$[E(u)]_s^u\subseteq[E\backslash E(v)]_s^v$

定理 3　对任意多级图 $G=\langle V,E,s,d,L\rangle$，令 $k=\max\{|V_i||1\leqslant i\leqslant L\}$。假定 $v\in V$，若与 v 相关的顶点个数不大于

$$\left\lfloor\frac{1}{k}\left(\frac{1}{e\cdot\max\{\prod_{v\in V_i}(1-\rho(v))|1\leqslant i\leqslant L-1\}}-1\right)\right\rfloor$$

则 G 中存在简单路径。

证明：依均匀分布从 G 中随机选择一条路径 P。令 A_i 代表"对任意 $v\in V_i$，有 $e\in P[1:i]\backslash E(v)$"。注意到 $P[1:i]\in E(v)$ 的概率为 $\rho(v)$，于是有

$$\forall i\in\{1,2,\cdots,L\}:\Pr[A_i]=\prod_{v\in V_i}(1-\rho(v))$$

进一步，任意事件 A_i 与除事件 A_j 外的其他所有事件相互独立，其中 j 使得有 $u\in V_i,v\in V_j$ 并且 u 与 v 相关。由条件知与 G 中第 i 级顶点相关的顶点数不大于

$$\left\lfloor\frac{1}{k}\left(\frac{1}{e\cdot\max\{\prod_{v\in V_i}(1-\rho(v))|1\leqslant i\leqslant L-1\}}-1\right)\right\rfloor$$

故与 A_j 相关的事件最多为

$$k\cdot\frac{1}{k}\left(\frac{1}{e\cdot\max\{\prod_{v\in V_i}(1-\rho(v))|1\leqslant i\leqslant L-1\}}-1\right)$$

$$=\frac{1}{e\cdot\max\{\prod_{v\in V_i}(1-\rho(v))|1\leqslant i\leqslant L-1\}}-1$$

由上可知满足推论 1 的前提，因此有

$$\Pr[\bigwedge_{i=1}^{n}\overline{A}_i]>0$$

即选择一条路径 P 使得"对 P 上任意顶点 $v(v\in V_i)$ 必有 $P[1:i]\subseteq E(v)$"的概率不为 0。故存在简单路径。证毕。

进一步，由

$$\max\{\prod_{v\in V_i}(1-\rho(v))|1\leqslant i\leqslant L-1\}\leqslant\left(1-\frac{1}{k^{L-1}}\right)^k$$

可得如下推论。

推论 2　若与 v 相关的顶点个数不大于 $\left\lfloor\frac{1}{k}\left(\frac{1}{e}\cdot\left(1-\frac{1}{k^{L-1}}\right)^{-k}-1\right)\right\rfloor$，则 G 存在简单路径。

给定 k-CNF 公式，利用文献[4]中方法得到的对应多级图 G 中，对任意点 v，有 $\rho(v)\geqslant\frac{1}{2}$。因此

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{e\cdot\max\{\prod_{v\in V_i}(1-\rho(v))|1\leqslant i\leqslant L-1\}}-1\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{k}\left(\frac{1}{e\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^k}-1\right)$$

$$=\frac{1}{k}\left(\frac{2^k}{e}-1\right)$$

于是有：

推论 3　给定任意的 k-CNF 公式 F。若 F 中任意变量最多出现在 $\left\lfloor\frac{1}{k}\left(\frac{2^k}{e}-1\right)\right\rfloor$ 个短句中，则 F 可满足。

这与文献[7]中的结果吻合。

结束语　研究 MSP 问题的完全性有助于研究 NP 完全问题的一般结构，从而设计更有针对性的高效算法。

（下转第 27 页）

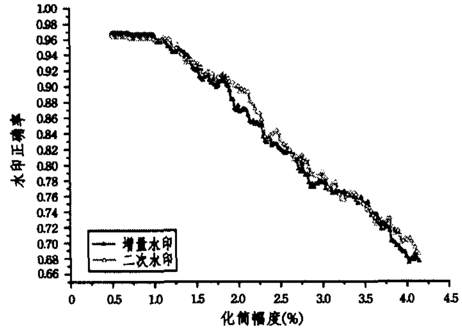

图 9　顶点化简

结束语　本文首次提出了地理数据增量水印和多版权水印的问题。针对该问题，以量化调制技术为基础，设计了一种支持多版权的地理数据增量水印方法。实验表明，该方法能够实现增量水印和二次水印的嵌入及检测，同时具有较强的鲁棒性。

参 考 文 献

[1] Samoa M, Matsuura Y, Takashima Y. A Scheme of digital watermarking for geographical mapdata[C]//Proc. of the Symposium on Cryptography and Information Security. Okinama, Japan, 2000:26-28

[2] Schulz G, Voigt M. A high capacity watermarking system for digital maps[C]//Proc. ACM Int. Workshop on Multimedia and Security. Magdeburg, Germany, Sep. 2004:180-186

[3] Kang H. A vector watermarking using the generalized square mask[C]//Proc. of the InternationalConference on Information Technology: Coding and Computing. Las Vegas, NV, USA, 2001:234-236

[4] Ohbuchi. Robust watermarking of vector digital maps [C]//Proc. of the IEEE International Conferenceon Multimedia and Expo., Lausanne, Switzerland, vol. 1, 2002:577-580

[5] Voigt M, Busch C. Feature-based watermarking of 2D-vector data [C]//Proc. of the SPIE, Securityand Watermarking of Multimedia Content. Santa Clara, USA, vol. 5020, 2003:359-366

[6] Zhang L, et al. New robust watermarking algorithm for vector data[J]. Wuhan University Journal of Natural Sciences, 2010, 15 (5):403-407

[7] Bazin C, Le Bars J M, Madelaine J. A blind, fast and robust method for geographical data watermarking[C]//ACM Symposium on Information, Computer and Communications Security. 2007:265-272

[8] Lee S H, Kwon K R. Vector watermarking scheme for GIS vector map management[J]. Multimedia tools and applications, 2013, 63(3):757-790

[9] Yan Hao-wen, Li J, Wen Hong. A key points-based blind watermarking approach for vector geo-spatial data[J]. Computers, Environment and Urban Systems, 2011, 35(6):485-492

[10] 邵承永，汪海龙，牛夏牧，等. 基于统计特征的二维矢量地图鲁棒水印算法[J]. 电子学报，2005，33:2312-2316
Shao Cheng-yong, Wang Hai-long, Niu Xia-mu, et al. A Robust Watermarking Algorithm for 2 D Vector Maps Based on Statistic Detection[J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33:2312-2316

[11] Lafaye J B, Gross-Amblard D. Invisible graffiti on your buildings: blind and squaring-proof watermarking of geographical databases[C]//Lecture notes in computer science, advances in spatial and temporal databases. LNCS 4605, 2007:312-329

[12] Jungyeop K. Vector map digital watermarking using angles [C]//2010 Sixth International Conference on Networked Computing and Advanced Information Management (NCM). 2010

[13] 汪传建，葛贺飞，丁卯，等. 一种基于可变步长量化调制的地理数据库水印方法[J]. 计算机研究与发展，2011，48(10):1960-1971
Wang Chuan-jian, Ge He-fei, Ding Mao, et al. A Geographic Databases Watermarking Method Based on Quantization Modulation with Variable Steps[J]. Journal of Computer Research and Development, 2011, 48(10):1960-1971

[14] Wang Chuan-jian, et al. Watermarking geographical data on spatial topological relations [J]. Multimedia Tools and Applications, 2012, 57(1):67-89

[15] Wu Bai-yan, Wang Wei-a, Miao Dan-dan. 2D vector map watermarking based on spatial relations[C]//International Conference on Earth Observation Data Processing and Analysis (ICEODPA). 2008

[16] 刘晓红，李树军，黄文骞. 制图综合中偏角限制道格拉斯算法研究[J]. 测绘与空间地理信息，2006，29(1):59-60
Liu Xiao-hong, Li Shu-jun, Huang Wen-qian. Study of Douglas-Peucker Algorithm Controlling by the Goniometry in Generalization[J]. Geomatics & Spatial Information Technology, 2006, 29(1):59-60

（上接第 14 页）

本文通过多个 NP 完全问题到 MSP 问题的归结，揭示了 MSP 问题所反映的 NP 完全问题的共性。MSP 问题暴露了隐含的解空间的搜索过程，具有良好的表达能力。归结的技巧在于：通过顶点边集的合理取值，排除以不符合解局部特征的顶点为端点的边。此外，本文对 MSP 问题的相变进行了理论分析，为相关算法的测试提供了难例产生方法。

参 考 文 献

[1] Jiang Xin-wen. A Polynomial Time Algorithm for the Hamilton Circuit Problem[J]. ArXiv preprint cs/1305. 5976, 2013

[2] Jiang Xin-wen, Peng Li-hong, Wang Qi. MSP Problem: Its NP-completeness and Its Algorithm[C]//Proceedings of CUTE. 2010:1-5

[3] Jiang Xin-wen, Liu Wan-wei, Wu Tian-jun, et al. Reductions from MSP to SAT and from SUBSET SUM to MSP[J]. Journal of Computational Information Systems, 2014, 10(3):1287-1295

[4] Fan Shuo, Jiang Xin-wen. Proving NP-completeness of Polynomial Reduction from the SAT Problem to the MSP Problem (English Abstract)[J]. Computer Science, 2012, 39(11):179-182

[5] Wang Shao-wen. The Study of the Number of Colors on the Graph (English Abstract)[J]. Journal of Beijing Institute of Machinery, 1997, 12(1):15-20

[6] Dong An-guo, Gao Lin, Zhao Jian-bang. Algorithms for Subgraph Isomorphism in Graph Pattern Mining (English Abstract)[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2011, 41(13):105-112

[7] Gebauer H, Szabo T, Tardos G. The Local Lemma Is Tight for SAT[C]//Proceedings of SODA. 2011:664-674