第42卷 第6期
2015年6月
计 算 机 科 学
Computer Science
Vol. 42 No. 6
June 2015

条件概率描述下的多粒度覆盖粗糙集模型研究

刘财辉[1,2] 涂小强[1]

（赣南师范学院数学与计算机科学学院 赣州 341000）[1]

（阿尔伯特大学电子与计算机工程系 埃德蒙顿 AB T6G 2G7）[2]

摘 要 在覆盖空间中，利用元素的最小描述并结合条件概率的概念，将经典多粒度粗糙集进行拓展，提出了3种条件概率描述下的多粒度覆盖粗糙集模型；研究了模型的一些基本性质，指出它们是一些已有多粒度覆盖粗糙集模型的泛化形式；最后探讨了几种模型之间的关系。

关键词 粗糙集，多粒度，条件概率，覆盖，最小描述

中图法分类号 TP301.6 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2015.6.020

Conditional Probability-based Multi-granulation Covering Rough Sets

LIU Cai-hui[1,2] TU Xiao-qiang[1]

(Department of Mathematics & Computer Science, Gannan Normal University, Ganzhou 341000, China)[1]

(Department of Electrical and Computer Engineering, University of Alberta, Edmonton AB T6G 2G7, Canada)[2]

Abstract This paper proposed three kinds of covering-based multi-granulation rough sets by employing the conditional probability between target concept and the minimal descriptions of elements. Some basic properties of the models were investigated and their relationships with some existed covering-based multi-granulation rough sets were disclosed. We found that the proposed models are extensions of existed covering-based multi-granulation rough sets. Finally, the relationships between the three models were explored.

Keywords Rough sets, Multi-granulation, Probability, Covering, Minimal description

1 引言

在决策过程中，决策者之间的决策往往是相互独立、互不干扰的。根据这一事实，Qian 等[1,2]从粒计算的角度出发，提出了多粒度粗糙集模型，为粗糙集研究开拓了一个全新的方向。多粒度粗糙集模型一经提出就引起了大家广泛的关注[3-20]，新的研究成果不断涌现，例如，Qian 等[4]将 Yao[22]提出的三支决策思想引入多粒度粗糙集，提出了多粒度决策粗糙集模型，并指出已有的大部分多粒度粗糙集模型都可以由它推导而出；Yang 等[6]研究了不完备系统中的多粒度粗糙集模型，对经典多粒度粗糙集模型进行了有益拓展，另外，Yang 等[7]还研究了考虑代价敏感问题的多粒度粗糙集模型；Xu 等[8,9]研究了基于序关系和相容关系的两类多粒度粗糙集模型，完善了相关理论体系；She 等[11]研究了多粒度粗糙集模型的代数结构，得到了一系列有意义的理论成果；Yang 等[5]、Xu 等[10]和 Huang 等[12]分别对模糊空间下的多粒度粗糙集模型进行了深入研究；Lin 等[14]研究了两类基于邻域的多粒度粗糙集模型；Liu 等[15,16]则研究了覆盖空间下的多粒度粗糙集模型，等等。

概率粗糙集模型在粗糙集中是一个重要的模型，然而，在已有文献中，开展概率条件下的多粒度粗糙集模型研究并不多。为了丰富多粒度粗糙集的理论研究，本文研究了条件概率下的多粒度覆盖粗糙集模型。

本文第2节回顾了经典多粒度粗糙集模型的基本概念；第3节在提出3类条件概率下的多粒度覆盖粗糙集模型后，研究了其基本性质。在考虑参数变化的基础上，研究了条件概率下的多粒度覆盖粗糙集模型与其它几种多粒度覆盖粗糙集模型的关系，指出条件概率下的多粒度覆盖粗糙集模型是另外几种多粒度覆盖粗糙集模型的泛化形式；第4节讨论和探索了3类条件概率下的多粒度覆盖粗糙集模型之间的内在联系；最后总结全文。

2 基本概念

定义1[21] 给定一个覆盖近似空间 $\langle U, C\rangle$，其中 U 是论域，C 是 U 的一个覆盖。对任意的 $x\in U$，称 $md(x)=\{K\in C \mid x\in K\wedge(\forall S\in C\wedge x\in S\wedge S\subseteq K\Rightarrow K=S)\}$ 为 x 的最小描述。

定义2[17] 设 U 是论域，集函数 $P: 2^U\rightarrow[0,1]$ 称为概率测度，若：(1) $P(U)=1$，(2) 若 $A\cap B=\emptyset$，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

若 P 是 U 上的概率测度，则称 $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ 为事

到稿日期：2014-04-16 返修日期：2014-05-29 本文受国家自然科学基金项目(61305052)，国家留学基金委(201409865003)，江西省普通本科高校中青年教师发展计划访问学者专项资金项目资助。

刘财辉(1979－)，男，博士，副教授，主要研究方向为粗糙集、粒计算、机器学习等，E-mail：liu_caihui@163.com；**涂小强**(1981－)，男，硕士，实验师，主要研究方向为粗糙集、粒计算、机器学习。

件 B 发生的情况下事件 A 发生的条件概率。

本文约定，在论域 U 下，任意子集 $A\subseteq U$ 的概率定义为：$P(A)=\frac{|A|}{|U|}$，其中$|\cdot|$表示集合的测度。

定义 3[1,2] 给定 $K=(U,\boldsymbol{R})$，其中 $\boldsymbol{R}$ 是 U 上等价关系的集合。对任意给定的 $P,Q\in\boldsymbol{R}$ 和 $X\subseteq U$，则 X 关于 P 和 Q 的乐观多粒度下近似和上近似定义如下：

$$\underline{P+Q}_O(X)=\{x\in U|[x]_P\subseteq X \text{ or } [x]_Q\subseteq X\}$$

$$\overline{P+Q}^O(X)=\sim\underline{P+Q}_O(\sim X)$$

其中，$\sim X$ 表示 X 在 U 上的补集。

定义 4[1,2] 给定 $K=(U,\boldsymbol{R})$，其中 $\boldsymbol{R}$ 是 U 上等价关系的集合。对任意给定的 $P,Q\in\boldsymbol{R}$ 和 $X\subseteq U$，则 X 关于 P 和 Q 的悲观多粒度下近似和上近似定义如下：

$$\underline{P+Q}_P(X)=\{x\in U|[x]_P\subseteq X \text{ and } [x]_Q\subseteq X\}$$

$$\overline{P+Q}^P(X)=\sim\underline{P+Q}_P(\sim X)$$

定义 5[15] 设$\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$是一个覆盖近似空间，其中 $\boldsymbol{C}$ 是 U 的覆盖的集合。对给定的 $C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$ 及任意的 $X\subseteq U$，概念 X 关于 C_1 和 C_2 的乐观多粒度覆盖粗糙集的下、上近似定义如下：

$$\underline{FC_1+FC_2}(X)=\{x\in U|\bigcap md_{C_1}(x)\subseteq X \text{ or } \bigcap md_{C_2}(x)\subseteq X\}$$

$$\overline{FC_1+FC_2}(X)=\{x\in U|(\bigcap md_{C_1}(x))\cap X\neq\emptyset \text{ and } (\bigcap md_{C_2}(x))\cap X\neq\emptyset\}$$

定义 6[15] 设$\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$是一个覆盖近似空间，其中 $\boldsymbol{C}$ 是 U 的覆盖的集合。对给定的 $C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$ 及任意的 $X\subseteq U$，概念 X 关于 C_1 和 C_2 的悲观多粒度覆盖粗糙集的下、上近似定义如下：

$$\underline{SC_1+SC_2}(X)=\{x\in U|\bigcap md_{C_1}(x)\subseteq X \text{ and } \bigcap md_{C_2}(x)\subseteq X\}$$

$$\overline{SC_1+SC_2}(X)=\{x\in U|(\bigcap md_{C_1}(x))\cap X\neq\emptyset \text{ or } (\bigcap md_{C_2}(x))\cap X\neq\emptyset\}$$

3 3 类条件概率描述下的多粒度覆盖粗糙集模型

本节利用已知元素的最小描述情况下目标概念发生的条件概率，提出了 3 种类型的多粒度覆盖粗糙集模型；分析和研究了模型的性质，并指出条件概率下的多粒度覆盖粗糙集是经典多粒度粗糙集的可行拓广；此外，研究了 3 种模型在 α,β 变化条件下的演化；最后，研究了 3 种模型之间的内在联系。

定义 7 设$\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$是一个覆盖近似空间，其中 $\boldsymbol{C}$ 是 U 的覆盖的集合。对给定的 $C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$，$0\leqslant\beta<\alpha\leqslant1$ 及任意的 $X\subseteq U$，概念 X 关于 C_1 和 C_2 的条件概率描述下的平均多粒度覆盖粗糙集的下、上近似定义如下：

$$\underline{M_{C_1+C_2}}_\alpha(X)=\{x\in U|(P(X|\bigcap md_{C_1}(x))+P(X|\bigcap md_{C_2}(x)))/2\geqslant\alpha\}$$

$$\overline{M_{C_1+C_2}}^\beta(X)=U-\{x\in U|(P(X|\bigcap md_{C_1}(x))+P(X|\bigcap md_{C_2}(x)))/2\leqslant\beta\}$$

如果$\underline{M_{C_1+C_2}}_\alpha(X)\neq\overline{M_{C_1+C_2}}^\beta(X)$，则称 X 是关于 C_1 和 C_2 的条件概率描述下的平均多粒度覆盖粗糙集；否则称 X 是关于 C_1 和 C_2 上的可定义集。

定义 8 设$\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$是一个覆盖近似空间，其中 $\boldsymbol{C}$ 是 U 的覆盖的集合。对给定的 $C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$，$0\leqslant\beta<\alpha\leqslant1$ 及任意的 $X\subseteq U$，则 X 关于 C_1 和 C_2 的条件概率描述下的乐观多粒度覆盖粗糙集的下、上近似定义如下：

$$\underline{O_{C_1+C_2}}_\alpha(X)=\{x\in U|P(X|\bigcap md_{C_1}(x))\geqslant\alpha \text{ or } P(X|\bigcap md_{C_2}(x))\geqslant\alpha\}$$

$$\overline{O_{C_1+C_2}}^\beta(X)=U-\{x\in U|P(X|\bigcap md_{C_1}(x))\leqslant\beta \text{ and } P(X|\bigcap md_{C_2}(x))\leqslant\beta\}$$

如果$\underline{O_{C_1+C_2}}_\alpha(X)\neq\overline{O_{C_1+C_2}}^\beta(X)$，则称 X 是关于 C_1 和 C_2 的条件概率描述下的乐观多粒度覆盖粗糙集；否则称 X 是关于 C_1 和 C_2 上的可定义集。

定义 9 设$\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$是一个覆盖近似空间，其中 $\boldsymbol{C}$ 是 U 的覆盖的集合。对给定 $C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$，$0\leqslant\beta<\alpha\leqslant1$ 及任意的 $X\subseteq U$，则 X 关于 C_1 和 C_2 的条件概率描述下的悲观多粒度覆盖粗糙集的下、上近似定义如下：

$$\underline{P_{C_1+C_2}}_\alpha(X)=\{x\in U|P(X|\bigcap md_{C_1}(x))\geqslant\alpha \text{ and } P(X|\bigcap md_{C_2}(x))\geqslant\alpha\}$$

$$\overline{P_{C_1+C_2}}^\beta(X)=U-\{x\in U|P(X|\bigcap md_{C_1}(x))\leqslant\beta \text{ or } P(X|\bigcap md_{C_2}(x))\leqslant\beta\}$$

如果$\underline{P_{C_1+C_2}}_\alpha(X)\neq\overline{P_{C_1+C_2}}^\beta(X)$，则称 X 是关于 C_1 和 C_2 的条件概率描述下的悲观多粒度覆盖粗糙集；否则称 X 是关于 C_1 和 C_2 上的可定义集。

例 1 对定义 7—定义 9 进行了解释说明。

例 1 给定$\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$，其中 $U=\{1,2,3,4\}$，$C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$，$C_1=\{\{1,2\},\{2,3,4\},\{3,4\}\}$，$C_2=\{\{1,3\},\{2,4\},\{1,3,4\}\}$。则根据定义，有

$md_{C_1}(1)=\{\{1,2\}\}$

$md_{C_1}(2)=\{\{1,2\},\{2,3,4\}\}$

$md_{C_1}(3)=md_{C_1}(4)=\{\{3,4\}\}$

$md_{C_2}(1)=\{\{1,3\}\{1,2,4\}\}$

$md_{C_2}(2)=md_{C_2}(4)=\{\{2,4\}\}$

$md_{C_2}(3)=\{\{1,3\}\}$

若 $X=\{1,4\}$，则

$$P(X|\bigcap md_{C_1}(1))=\frac{P(X\cap(\bigcap md_{C_1}(1)))}{P(\bigcap md_{C_1}(1))}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}=0.5$$

$P(X|\bigcap md_{C_1}(2))=0$，$P(X|\bigcap md_{C_1}(3))=0.5$，

$P(X|\bigcap md_{C_1}(4))=0.5$，$P(X|\bigcap md_{C_2}(1))=1$，

$P(X|\bigcap md_{C_2}(2))=0.5$，$P(X|\bigcap md_{C_2}(3))=0.5$，

$P(X|\bigcap md_{C_2}(3))=0.5$

若设 $\alpha=0.6$，$\beta=0.3$，则有

$\underline{M_{C_1+C_2}}_{0.6}(X)=\{1\}$，$\overline{M_{C_1+C_2}}^{0.3}(X)=\{1,3,4\}$

$\underline{O_{C_1+C_2}}_{0.6}(X)=\{1\}$，$\overline{O_{C_1+C_2}}^{0.3}(X)=U$

$\underline{P_{C_1+C_2}}_{0.6}(X)=\emptyset$，$\overline{P_{C_1+C_2}}^{0.3}(X)=\{1,3,4\}$

下面讨论 3 种模型的一些基本性质。

定理 1 设$\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$是一个覆盖近似空间，其中 $\boldsymbol{C}$ 是 U 的覆盖的集合。对给定 $C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$，$0\leqslant\beta<\alpha\leqslant1$ 及任意的 $X\subseteq U$，则有

(1) $\underline{M_{C_1+C_2}}_{\alpha}(\emptyset)=\emptyset,\overline{M_{C_1+C_2}}^{\beta}(\emptyset)=\emptyset$

$\underline{M_{C_1+C_2}}_{\alpha}(U)=U,\overline{M_{C_1+C_2}}^{\beta}(U)=U$

$\underline{M_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X)\subseteq\overline{M_{C_1+C_2}}^{\beta}(X)$

(2) $\underline{O_{C_1+C_2}}_{\alpha}(\emptyset)=\emptyset,\overline{O_{C_1+C_2}}^{\beta}(\emptyset)=\emptyset$

$\underline{O_{C_1+C_2}}_{\alpha}(U)=U,\overline{O_{C_1+C_2}}^{\beta}(U)=U$

$\underline{O_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X)\subseteq\overline{O_{C_1+C_2}}^{\beta}(X)$

(3) $\underline{P_{C_1+C_2}}_{\alpha}(\emptyset)=\emptyset,\overline{P_{C_1+C_2}}^{\beta}(\emptyset)=\emptyset$

$\underline{P_{C_1+C_2}}_{\alpha}(U)=U,\overline{P_{C_1+C_2}}^{\beta}(U)=U$

$\underline{P_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X)\subseteq\overline{P_{C_1+C_2}}^{\beta}(X)$

定理 2 设$\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$是一个覆盖近似空间，其中$\boldsymbol{C}$是$U$的覆盖的集合。对给定$C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$，$0\leqslant\beta<\alpha\leqslant1$及任意的$X\subseteq U$，则

(1)当$\alpha=1$时，有

$\underline{O_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X)=\underline{FC_1+FC_2}(X)$

$\underline{P_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X)=\underline{SC_1+SC_2}(X)$

(2)当$\beta=0$时，有

$\overline{O_{C_1+C_2}}^{\beta}(X)=\overline{SC_1+SC_2}(X)$

$\overline{P_{C_1+C_2}}^{\beta}(X)=\overline{FC_1+FC_2}(X)$

证明：(1)当$\alpha=1$时，有

$$P(X|\cap md_{C_1}(x))=\frac{P(X\cap(\cap md_{C_1}(x)))}{P(\cap md_{C_1}(x))}=1$$

$$P(X|\cap md_{C_2}(x))=\frac{P(X\cap(\cap md_{C_2}(x)))}{P(\cap md_{C_2}(x))}=1$$

则有$\cap md_{C_1}(x)\subseteq X,\cap md_{C_2}(x)\subseteq X$成立。

根据定义 8 和定义 9，有

$$\begin{aligned}\underline{O_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X)&=\{x\in U|P(X|\cap md_{C_1}(x))\geqslant\alpha \text{ or } P(X|\cap md_{C_2}(x))\geqslant\alpha\}\\&=\{x\in U|P(X|\cap md_{C_1}(x))\geqslant1 \text{ or } P(X|\cap md_{C_2}(x))\geqslant1\}\\&=\{x\in U|P(X|\cap md_{C_1}(x))=1 \text{ or } P(X|\cap md_{C_2}(x))=1\}\\&=\{x\in U|\cap md_{C_1}(x)\subseteq X \text{ or } \cap md_{C_2}(x)\subseteq X\}\\&=\underline{FC_1+FC_2}(X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{P_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X)&=\{x\in U|P(X|\cap md_{C_1}(x))\geqslant\alpha \text{ and } P(X|\cap md_{C_2}(x))\geqslant\alpha\}\\&=\{x\in U|P(X|\cap md_{C_1}(x))\geqslant1 \text{ and } P(X|\cap md_{C_2}(x))\geqslant1\}\\&=\{x\in U|P(X|\cap md_{C_1}(x))=1 \text{ and } P(X|\cap md_{C_2}(x))=1\}\\&=\{x\in U|\cap md_{C_1}(x)\subseteq X \text{ and } \cap md_{C_2}(x)\subseteq X\}\\&=\underline{SC_1+SC_2}(X)\end{aligned}$$

(2)当$\beta=0$时，有

$$P(X|\cap md_{C_1}(x))=\frac{P(X\cap(\cap md_{C_1}(x)))}{P(\cap md_{C_1}(x))}=0$$

$$P(X|\cap md_{C_2}(x))=\frac{P(X\cap(\cap md_{C_2}(x)))}{P(\cap md_{C_2}(x))}=0$$

则有$\cap md_{C_1}(x)\cap X=\emptyset,\cap md_{C_2}(x)\cap X=\emptyset$成立。

根据定义 8 和定义 9，有

$$\begin{aligned}\overline{O_{C_1+C_2}}^{\beta}(X)&=U-\{x\in U|P(X|\cap md_{C_1}(x))\leqslant\beta \text{ and } P(X|\cap md_{C_2}(x))\leqslant\beta\}\\&=U-\{x\in U|P(X|\cap md_{C_1}(x))=0 \text{ and } P(X|\cap md_{C_2}(x))=0\}\\&=U-\{x\in U|\cap md_{C_1}(x)\cap X=\emptyset \text{ and } \cap md_{C_2}(x)\cap X=\emptyset\}\\&=\{x\in U|\cap md_{C_1}(x)\cap X\neq\emptyset \text{ or } \cap md_{C_2}(x)\cap X\neq\emptyset\}\\&=\overline{SC_1+SC_2}(X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{P_{C_1+C_2}}^{\beta}(X)&=U-\{x\in U|P(X|\cap md_{C_1}(x))\leqslant\beta \text{ or } P(X|\cap md_{C_2}(x))\leqslant\beta\}\\&=U-\{x\in U|P(X|\cap md_{C_1}(x))=0 \text{ or } P(X|\cap md_{C_2}(x))=0\}\\&=U-\{x\in U|\cap md_{C_1}(x)\cap X=\emptyset \text{ or } \cap md_{C_2}(x)\cap X=\emptyset\}\\&=\{x\in U|\cap md_{C_1}(x)\cap X\neq\emptyset \text{ and } \cap md_{C_2}(x)\cap X\neq\emptyset\}\\&=\overline{FC_1+FC_2}(X)\end{aligned}$$

定理 3 给定覆盖近似空间$\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$，如果$C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$，且$C_1=\{C_{11},C_{12},\cdots,C_{1p}\}$和$C_2=\{C_{21},C_{22},\cdots,C_{2q}\}$，其中$p$和$q$均为自然数，则对任意$C_{i,j}\in\{C_{11},C_{12},\cdots,C_{1p},C_{21},C_{22},\cdots,C_{2q}\}$，$i,j$为自然数，对给定$0\leqslant\beta<\alpha\leqslant1$，有：

$\underline{M_{C_1+C_2}}_{\alpha}(C_{i,j})=C_{i,j},\overline{M_{C_1+C_2}}^{\beta}(C_{i,j})=C_{i,j}$

证明：根据定义 7，易证。

注：给定覆盖近似空间$\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$，如果$C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$，且$C_1=\{C_{11},C_{12},\cdots,C_{1p}\}$和$C_2=\{C_{21},C_{22},\cdots,C_{2q}\}$，其中$p$和$q$均为自然数，则对任意$C_{i,j}\in\{C_{11},C_{12},\cdots,C_{1p},C_{21},C_{22},\cdots,C_{2q}\}$，$i,j$为自然数，对给定$0\leqslant\beta<\alpha\leqslant1$，下列等式不一定成立。

(1) $\underline{O_{C_1+C_2}}_{\alpha}(C_{i,j})=C_{i,j},\overline{O_{C_1+C_2}}^{\beta}(C_{i,j})=C_{i,j}$

(2) $\underline{P_{C_1+C_2}}_{\alpha}(C_{i,j})=C_{i,j},\overline{P_{C_1+C_2}}^{\beta}(C_{i,j})=C_{i,j}$

例 2(续例 1) 设$X=\{1,2\}$，$\alpha=0.6$，$\beta=0.3$，则有

$\underline{M_{C_1+C_2}}_{0.6}(X)=\{1,2\},\overline{M_{C_1+C_2}}^{0.3}(X)=\{1,2\}$

$\underline{O_{C_1+C_2}}_{0.6}(X)=\{1,2\},\overline{O_{C_1+C_2}}^{0.3}(X)=U$

$\underline{P_{C_1+C_2}}_{0.6}(X)=\{1\},\overline{P_{C_1+C_2}}^{0.3}(X)=U$

显然有

$\overline{O_{C_1+C_2}}^{0.3}(X)=U\neq\{1,2\}$

$\underline{P_{C_1+C_2}}_{0.6}(X)=\{1\}\neq\{1,2\}$

$\overline{P_{C_1+C_2}}^{0.3}(X)=U\neq\{1,2\}$

定理 4 设$\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$是一个覆盖近似空间，其中$\boldsymbol{C}$是$U$的覆盖的集合。对给定$C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$，$0\leqslant\beta<\alpha\leqslant1$及任意的$X\subseteq U$，有

(1) $\underline{M_{C_1+C_2}}_{\alpha}(\underline{M_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X))\subseteq\overline{M_{C_1+C_2}}^{\beta}(\underline{M_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X))$

(2) $\overline{M_{C_1+C_2}}^{\beta}(\overline{M_{C_1+C_2}}^{\beta}(X))\supseteq\underline{M_{C_1+C_2}}_{\alpha}(\overline{M_{C_1+C_2}}^{\beta}(X))$

(3)$\underline{O_{C_1+C_2}}_{\alpha}(\underline{O_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X))\subseteq\overline{O_{C_1+C_2}}^{\beta}(\underline{O_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X))$

(4)$\overline{O_{C_1+C_2}}^{\beta}(\overline{O_{C_1+C_2}}^{\beta}(X))\supseteq\underline{O_{C_1+C_2}}_{\alpha}(\overline{O_{C_1+C_2}}^{\beta}(X))$

(5)$\underline{P_{C_1+C_2}}_{\alpha}(\underline{P_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X))\subseteq\overline{P_{C_1+C_2}}^{\beta}(\underline{P_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X))$

(6)$\overline{P_{C_1+C_2}}^{\beta}(\overline{P_{C_1+C_2}}^{\beta}(X))\supseteq\underline{P_{C_1+C_2}}_{\alpha}(\overline{P_{C_1+C_2}}^{\beta}(X))$

证明:根据定理 1 易证。

定理 4 说明,对于给定的 α,β 和目标概念 X,如果应用不同的近似算子作用于目标概念 X,会得到不同的结果,而且这些结果是相互关联的。比如(1),用下近似算子$\underline{M_{C_1+C_2}}_{\alpha}$两次对目标概念 X 进行近似所得结果是分别用下近似算子$\underline{M_{C_1+C_2}}_{\alpha}$和上近似算子$\overline{M_{C_1+C_2}}^{\beta}$对目标概念 X 进行近似结果的子集。

定理 5 设$\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$是一个覆盖近似空间,其中 $\boldsymbol{C}$ 是 U 的覆盖的集合。给定 $C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$,$0\leqslant\beta_2\leqslant\beta_1<\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant1$ 及任意的 $X\subseteq U$,则有

(1)$\underline{M_{C_1+C_2}}_{\alpha_2}(X)\subseteq\underline{M_{C_1+C_2}}_{\alpha_1}(X)$
$\subseteq\overline{M_{C_1+C_2}}^{\beta_1}(X)\subseteq\overline{M_{C_1+C_2}}^{\beta_2}(X)$

(2)$\underline{O_{C_1+C_2}}_{\alpha_2}(X)\subseteq\underline{O_{C_1+C_2}}_{\alpha_1}(X)$
$\subseteq\overline{O_{C_1+C_2}}^{\beta_1}(X)\subseteq\overline{O_{C_1+C_2}}^{\beta_2}(X)$

(3)$\underline{P_{C_1+C_2}}_{\alpha_2}(X)\subseteq\underline{P_{C_1+C_2}}_{\alpha_1}(X)$
$\subseteq\overline{P_{C_1+C_2}}^{\beta_1}(X)\subseteq\overline{P_{C_1+C_2}}^{\beta_2}(X)$

证明:这里仅证明(1),其余可类似证明。

当 $\alpha_1\leqslant\alpha_2$ 时,根据定义 7,有

$$\begin{aligned}&\underline{M_{C_1+C_2}}_{\alpha_2}(X)\\&=\{x\in U\mid(P(X\mid\bigcap md_{C_1}(x))+P(X\mid\bigcap md_{C_2}(x)))/2\geqslant\alpha_2\}\\&<\{x\in U\mid(P(X\mid\bigcap md_{C_1}(x))+P(X\mid\bigcap md_{C_2}(x)))/2\geqslant\alpha_1\}\\&=\underline{M_{C_1+C_2}}_{\alpha_1}(X)\end{aligned}$$

当 $\beta_2\leqslant\beta_1$ 时,有

$\{x\in U\mid(P(X\mid\bigcap md_{C_1}(x))+P(X\mid\bigcap md_{C_2}(x)))/2\leqslant\beta_1\}>\{x\in U\mid(P(X\mid\bigcap md_{C_1}(x))+P(X\mid\bigcap md_{C_2}(x)))/2\leqslant\beta_2\}$

根据定义 7,有

$$\overline{M_{C_1+C_2}}^{\beta_1}(X)=U-\{x\in U\mid(P(X\mid\bigcap md_{C_1}(x))+P(X\mid\bigcap md_{C_2}(x)))/2\leqslant\beta_1\}$$

$$\overline{M_{C_1+C_2}}^{\beta_2}(X)=U-\{x\in U\mid(P(X\mid\bigcap md_{C_1}(x))+P(X\mid\bigcap md_{C_2}(x)))/2\leqslant\beta_2\}$$

所以,有

$$\overline{M_{C_1+C_2}}^{\beta_1}(X)\subseteq\overline{M_{C_1+C_2}}^{\beta_2}(X)$$

在根据定理 1,有

$$\underline{M_{C_1+C_2}}_{\alpha_2}(X)\subseteq\underline{M_{C_1+C_2}}_{\alpha_1}(X)\subseteq\overline{M_{C_1+C_2}}^{\beta_1}(X)\subseteq\overline{M_{C_1+C_2}}^{\beta_2}(X)$$

定理 5 说明,针对同一目标概念,在不同的 α,β 进行近似时,所得结果也不同。α 取值越大,其下近似集反而越小;而 β 取值越大,其上近似集越大。

例 3(续例 1) 设 $\alpha=0.7,\beta=0.2$,则有

$$\underline{M_{C_1+C_2}}_{0.7}(X)=\{1\},\overline{M_{C_1+C_2}}^{0.2}(X)=U$$

$$\underline{O_{C_1+C_2}}_{0.7}(X)=\{1\},\overline{O_{C_1+C_2}}^{0.2}(X)=U$$

$$\underline{P_{C_1+C_2}}_{0.7}(X)=\emptyset,\overline{P_{C_1+C_2}}^{0.2}(X)=\{1,3,4\}$$

显然有

$$\underline{M_{C_1+C_2}}_{0.7}(X)\subseteq\underline{M_{C_1+C_2}}_{0.6}(X)\subseteq\overline{M_{C_1+C_2}}^{0.3}(X)\subseteq\overline{M_{C_1+C_2}}^{0.2}(X)$$

$$\underline{O_{C_1+C_2}}_{0.7}(X)\subseteq\underline{O_{C_1+C_2}}_{0.6}(X)\subseteq\overline{O_{C_1+C_2}}^{0.3}(X)\subseteq\overline{O_{C_1+C_2}}^{0.2}(X)$$

$$\underline{P_{C_1+C_2}}_{0.7}(X)\subseteq\underline{P_{C_1+C_2}}_{0.6}(X)\subseteq\overline{P_{C_1+C_2}}^{0.3}(X)\subseteq\overline{P_{C_1+C_2}}^{0.2}(X)$$

4 3 类条件概率下的多粒度覆盖粗糙集的关系

本节讨论 3 种条件概率下的多粒度覆盖粗糙集的关系。

定理 6 设$\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$是一个覆盖近似空间,其中 $\boldsymbol{C}$ 是 U 的覆盖的集合。对给定 $C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$,$0\leqslant\beta<\alpha\leqslant1$ 及任意的 $X\subseteq U$,则有

(1)当 $\alpha=1$ 时,有$\underline{M_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X)=\underline{P_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X)$;

(2)当 $\beta=0$ 时,有$\overline{M_{C_1+C_2}}^{\beta}(X)=\overline{O_{C_1+C_2}}^{\beta}(X)$。

证明:(1)当 $\alpha=1$ 时,有$(P(X\mid\bigcap md_{C_1}(x))+P(X\mid\bigcap md_{C_2}(x)))/2\geqslant1$,也即$(P(X\mid\bigcap md_{C_1}(x))+P(X\mid\bigcap md_{C_2}(x)))=2$。根据条件概率的性质,则有$(P(X\mid\bigcap md_{C_1}(x))=1$ 且 $P(X\mid\bigcap md_{C_2}(x)))=1$。再根据定义 7 和定义 9,有

$$\begin{aligned}\underline{P_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X)&=\{x\in U\mid P(X\mid\bigcap md_{C_1}(x))\geqslant\alpha\text{ and }P(X\mid\bigcap md_{C_2}(x))\geqslant\alpha\}\\&=\{x\in U\mid P(X\mid\bigcap md_{C_1}(x))=1\text{ and }P(X\mid\bigcap md_{C_2}(x))=1\}\\&=\underline{M_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X)\end{aligned}$$

(2)当 $\beta=0$ 时,有$(P(X\mid\bigcap md_{C_1}(x))+P(X\mid\bigcap md_{C_2}(x)))/2\leqslant0$,也即$(P(X\mid\bigcap md_{C_1}(x))+P(X\mid\bigcap md_{C_2}(x)))=0$。根据条件概率的性质,有$(P(X\mid\bigcap md_{C_1}(x))=0$ 且 $P(X\mid\bigcap md_{C_2}(x)))=0$。再根据定义 7 和定义 8,有

$$\begin{aligned}\overline{O_{C_1+C_2}}^{\beta}(X)&=U-\{x\in U\mid P(X\mid\bigcap md_{C_1}(x))\leqslant\beta\text{ and }P(X\mid\bigcap md_{C_2}(x))\leqslant\beta\}\\&=U-\{x\in U\mid P(X\mid\bigcap md_{C_1}(x))=0\text{ and }P(X\mid\bigcap md_{C_2}(x))=0\}\\&=\overline{M_{C_1+C_2}}^{\beta}(X)\end{aligned}$$

推论 设$\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$是一个覆盖近似空间,其中 $\boldsymbol{C}$ 是 U 的覆盖的集合。对给定 $C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$,$0\leqslant\beta<\alpha\leqslant1$ 及任意的 $X\subseteq U$,则有

(1)当 $\alpha=1$ 且 $C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$ 是划分时,则有$\underline{M_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X)=\underline{P_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X)=\underline{P+Q}_{P}(X)$;

(2)当 $\beta=0$ 且 $C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$ 是划分时,则有$\overline{M_{C_1+C_2}}^{\beta}(X)=\overline{O_{C_1+C_2}}^{\beta}(X)=\overline{P+Q}^{O}(X)$。

定理 7 设$\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$是一个覆盖近似空间,$C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$。则对任意的 $X\subseteq U$,有

$$\underline{P_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X)\subseteq\underline{O_{C_1+C_2}}_{\alpha}(X)$$

$$\overline{P_{C_1+C_2}}^{\beta}(X)\subseteq\overline{O_{C_1+C_2}}^{\beta}(X)$$

证明:根据定义 8 和定义 9 易证。

结束语 目前,多粒度粗糙集的理论和应用研究已得到广泛关注。本文在覆盖近似空间下,在条件概率描述下提出了 3 种多粒度覆盖粗糙集模型,研究讨论了相关性质,并证明了这些模型是经典多粒度粗糙集在覆盖近似空间上的有效扩展。本文的工作对完善多粒度粗糙集理论有一定的推动作用。

参考文献

[1] Qian Y H, Liang J Y. Rough set method based on multi-granulations[C] // Proceeding of the fifth IEEE International Conference on Cognitive Informatics. Beijing, China, July 2006: 297-304

[2] Qian Y H, Liang J Y, Yao Y Y, et al. MGRS: A multi-granulation rough set [J]. Information Sciences, 2010, 180: 949-970

[3] Qian Y H, Zhang H, Sang Y L, et al. Multigranulation decision-theoretic rough sets [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2014, 55(1): 225-237

[4] Qian Y H, Li S Y, Liang J Y, et al. Pessimistic rough set based decisions: a multigranulation fusion strategy [J]. Information Sciences, 2014, 264: 196-210

[5] Yang X B, Song X N, Dou H L, et al. Multi-granulation rough set: from crisp to fuzzy case [J]. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 2011, 1(1): 55-70

[6] Yang X B, Song X N, Chen Z H, et al. On multigranulation rough sets in incomplete information system [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2012, 3(3): 223-232

[7] Yang X B, Qi Y S, Song X N, et al. Test cost sensitive multigranulation rough set: Model and minimal cost selection[J]. Information Sciences, 2013, 250: 184-199

[8] Xu W H, Sun W X, Zhang X Y, et al. Multiple granulation rough set approach to ordered information systems [J]. International Journal of General Systems, 2012, 41(5): 475-501

[9] Xu W H, Wang Q R, Zhang X T. Multi-granulation rough sets based on tolerance relations [J]. Soft Computing, 2013, 17(7): 1241-1252

[10] Xu W H, Wang Q R. Multi-granulation fuzzy rough sets, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems [J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2014, 26(3): 1320-1340

[11] She Y H, He X L. On the structure of the multigranulation rough set model [J]. Knowledge Based Systems, 2012, 36: 81-92

[12] Huang B, Guo C X, Zhuang Y L, et al. Intuitionistic fuzzy multigranulation rough sets [J]. Information Sciences, 2014, 277: 299-320

[13] Lin G P, Liang J Y, Qian Y H. Multigranulation rough sets: from partition to covering[J]. Information Sciences, 2013, 241: 101-118

[14] Lin G P, Qian Y H, Li J J. NMGRS: Neighborhood-based multigranulation rough sets [J]. International Journal of Approximation Reasoning, 2012, 53(7): 1080-1093

[15] Liu C H, Miao D Q, Qian J. On multi-granulation covering rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2014, 55: 1404-1418

[16] Liu C H. Covering Multi-granulation Rough Sets Based on Maximal Descriptors[J]. Information Technology Journal, 2014, 13(7): 1396-1400

[17] 别林斯里. 概率与测度(第 3 版)[M]. 北京:世界图书出版公司, 2007
Billingsley P. Probability and Measure(Third Edition)[M]. Beijing: World Publishing Corporation, 2007

[18] 张明,谭振民,徐维艳,等. 可变粒度粗糙集[J]. 计算机科学, 2011, 38(10): 220-222
Zhang M, Tang Z M, Xu W Y, et al. Variable Granulation Rough Set [J]. Computer Science, 2011, 38(10): 220-222

[19] 翟永健,张宏. 不完备系统中的变精度多粒度粗糙集[J]. 南京航空航天大学学报, 2011, 43(6): 781-785
Zhai Y J, Zhang H. Variable Precision Multigranulation Rough Sets in Incomplete Information System [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2011, 43(6): 781-785

[20] 刘财辉. 一种元素最大描述下的多粒度覆盖粗糙集模型[J]. 计算机科学, 2013, 40(12): 64-67
Liu C H. Covering-based Multigranulation Rough Set Model Based on Maximal Description of Elements [J]. Computer Science, 2013, 40(12): 64-67

[21] Zhu W, Wang F Y. Reduction and axiomatization of covering generalized rough sets [J]. Information Sciences, 2003, 152: 217-230

[22] Yao Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets [J]. Information Sciences, 2010, 180: 341-353

(上接第 70 页)

[10] Ganter B, Wille R. Formal concept analysis, mathematical foundations[M]. New York: Springer, 1999

[11] Grätzer G. General lattice theory [M]. Springer, 2003

[12] Li Jin-hai, Mei Chang-lin, Lv Yue-jin. Incomplete decision contexts: Approximate concept construction, rule acquisition and knowledge reduction [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(1): 149-165

[13] 陈锦坤,李进金. 概念格的公理化[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(5): 41-43
Chen Jin-kun, Li Jin-jin. The axiomatization of the concept lattice[J]. Computer Engineering and Appolications, 2012, 48(5): 41-43

[14] Song Xiao-xue, Wang Xia, Zhang Wen-xiu. Independence of axiom sets characterizing formal concepts [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2013, 4(5): 459-468

[15] Ma Jian-min, Zhang Wen-xiu. Axiomatic characterizations of dual concept lattices [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(5): 690-697