

复杂网络结构的稳定性与鲁棒性研究

毛 凯

(重庆大学计算机学院 重庆 400044) (重庆工商大学计算机科学与信息工程学院 重庆 400067)

摘 要 在对复杂网络研究的过程中,根据网络结构中节点连接度的连接倾向而将其划分为 3 种类型,即异配网络、同配网络、中性网络,采用变量梯度分析法分别对其稳定性进行判定与分析。理论分析表明,异配网络在大范围内是稳定的,同配网络状态是不稳定的,中性网络的稳定性不能确定,需要根据节点总体连接度的倾向性才能确定其是否处于稳定状态。同时对复杂网络的鲁棒性研究的仿真结果表明,其稳定性与鲁棒性具有正相关性,即异配网络的鲁棒性最好,中性网络次之,同配网络的鲁棒性脆弱。

关键词 异配网络,同配网络,中性网络,稳定性,鲁棒性

中图法分类号 TP202.1 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2015.4.016

Research on Stability and Robustness of Complex Network Structure

MAO Kai

(College of Computer Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

(College of Computer Science and Information Engineering, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract In the process of research on complex networks, we divided its network structure into three types according to the node connection tendency, including disassortative network, assortative network and the neutral network. We adopt variable gradient analysis to judge and analyze its stability respectively. Theoretical analysis shows that disassortative network is stable within a wide range, the assortative network's state is unstable, and the stability of the neutral network is uncertain. We can determine whether the network is in a steady state based on the tendency of node connection. Meanwhile, in the research on complex network robustness, related simulation results show the stability and robustness have positive correlation, and the robustness of the disassortative network is best and the secondary is neutral network, followed by the fragile robustness of assortative network.

Keywords Disassortative network, Assortative network, Neutral network, Stability, Robustness

1 概述

当前,随着人类社会进入信息化的脚步不断加快,网络技术得到了迅速的发展,各式各样的复杂网络层出不穷,表现形式多种多样,并且功能千差万别。以最著名的三网即计算机互联网、电话网、有线电视网为例,计算机互联网主要用于数据文件的传输与共享,电话网主要用于话音信号的传输。有线电视网则主要用于视频信号的传输。虽然这 3 种网络的功能各异,但都能较好地满足人们在生活和工作中的部分需求,都得到了快速的发展,甚至达到指数级别的增长。除上述的 3 种著名网络之外,其它各行各业的复杂网络也得到了广泛的应用和快速的发展,如电力系统的电力网,交通系统的公路网、铁路网,生物系统的神经网络、蛋白质交换网络以及人类社会的交友网、科研人员科技合作网、影视演员商业演出合作网等各种在线社会网络也都走进了人们的日常生活,甚至成为了生活中不可缺少的一部分^[1]。

为了更好地把握和预测未来复杂网络的发展趋势,现在对于复杂网络的性质和结构的探索已经成为一个研究热点,其中对于稳定性的研究已经达成了共识。这是因为对于复杂

网络系统来说,稳定性是一个非常重要的特性。随着时间的推移,网络结构本身也在发生着变化,包括网络结点和连边增减等。复杂网络的稳定性是网络发展的关键所在,对于网络稳定性的判定是预测复杂网络未来发展的重要基础。然而由于其类型五花八门,种类繁多,因此对于复杂网络的稳定性判定又是一件十分困难的事情,目前并没有一个统一的标准。本文试图从各种复杂网络最基本的结构属性即网络连接度着手,对复杂网络进行归类判定其结构的稳定性与鲁棒性,从而可以更好地预测其未来的发展趋势。

参照一般系统的稳定性^[2],本文首先给出复杂网络结构稳定性的定义:

如果对于任意给定的若干网络结点集合 N ,都存在另一个与 N 取值有关的该结点集连接度 $X_N(t_0)$,使得当不等式 $\|T_N - T\| \leq X_N$ 成立时,就一定有 $\|T_N - T\| \leq \|N\|$ 成立 ($t \geq t_0$),其中 T_N 和 T 分别为 t 时刻该网络中去掉结点集合 N 后连通子图个数和 t_0 时刻原连通子图个数。

另外对于任何一个复杂网络,无论其性质如何,网络结构均是由结点和结点之间的连线组成。如果网络中两个结点之间是否有边相连与这两个结点的连接度无关,即网络中随机

选择的一条边的两个端点是完全随机的,则称该网络不具有度相关性,或者称网络是中性的,即有

$$e_{ij} \neq q_i q_j, \forall i, j$$

其中, e_{ij} 为结点 i 和结点 j 连接的概率, q_i 和 q_j 分别为网络中随机选取的结点 i 和结点 j 的邻居结点的连接度。

如果网络中连接度大的结点总是倾向于与连接度大的结点相连,那么称该网络为同配网络;而如果网络中连接度大的结点总是倾向于与连接度小的结点相连,那么称该网络为异配网络^[3]。

对大量的网络实例的研究显示,互联网以及蛋白质交换网络、神经网络等生物网络是异配网络,而科研人员合作网络以及电影演员合作网络等许多现实社会网络往往显示出明显的同配性特征,包括复杂网络中著名的无标度网络也属于同配网络,因为其网络结点的连接表现出明显的“富者更富”的特征。而不同的在线社会网络可能是同配、异配或者是中性网络。例如包含 7 亿多结点的 Facebook 网络呈现出同配性特征^[4],大型在线社交网络 Cyworld 却是异配网络^[5],而随机网络是属于中性网络,因为其结点的连接度表现为随机性^[3],即不确定是与连接度大的结点还是与连接度小的结点相连。

2 复杂网络的稳定性

考虑到目前对复杂网络的稳定性判定并没有一个统一的标准,本文采用由舒茨(Schultz)和吉布森(Gibson)提出的变量梯度法^[2]对复杂网络的稳定性进行判定,在使用变量梯度法对复杂网络的稳定性进行判定的过程中,本文提出了一个相关概念,即网络中某一类节点的连接总数为 $a_i X_i$,其中 a_i 为网络中该类结点的总数, X_i 为该类结点的连接度。

2.1 异配网络的稳定性

根据异配网络的性质,按照结点的连接度由大到小进行划分,其状态方程设置为 $X_{n+1} = X_n - 1$,其中 X_n 表示为 n 类结点连接度,进一步考虑到异配网络中连接度大的结点总是倾向于与连接度小的结点相连,即 $X_n = X_{n+1} - X_n = -1$ 。则对于每一类结点,其梯度值可以设置为 $\nabla V_i = a_i X_i$,其中 a_i 为结点度为 X_i 的结点数,按照变量梯度法的求解过程,其李雅普诺夫函数的变量梯度可设为

$$\begin{aligned} \nabla V &= \nabla V_1 + \dots + \nabla V_n \\ &= a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \end{aligned} \quad (1)$$

$$\dot{V} = (\nabla V)^T \cdot \dot{X} = -a_1 X_1 - a_2 X_2 - \dots - a_n X_n < 0$$

在变量梯度法中考虑到有 $\frac{\partial(X_n)}{\partial X_{n+1}} = \frac{\partial(X_{n+1})}{\partial X_n} = 0$ 成立,进一步对 \dot{V} 积分可求得异配网络的李雅普诺夫函数为:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{x_1(x_2 \dots x_n = 0)} \nabla V_1 dx_1 + \int_0^{x_2(x_1 = x_1, x_3, \dots, x_n = 0)} \nabla V_2 dx_2 \\ &+ \dots + \int_0^{x_n(x_1 = x_1, \dots, x_{n-1} = x_{n-1})} \nabla V_n dx_n \\ &= \frac{1}{2} a_1 X_1^2 + \frac{1}{2} a_2 X_2^2 + \dots + \frac{1}{2} a_n X_n^2 > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

显然异配网络的平衡状态是渐近稳定的,并且由于随着网络结点数量不断增加,当 $n \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty$ 时,异配网络是大范围内稳定的。

2.2 同配网络的稳定性

对同配网络稳定性的判断也可采用变量梯度法。根据同配网络的性质,按照结点的连接度由大到小进行划分,其状态

方程可设置为 $X_{n+1} = X_n + 1$,考虑到同配网络中连接度大的结点总是倾向于与连接度大的结点相连,即 $X_n = X_{n+1} - X_n = 1$ 。则对于每一类结点,其梯度值可设置为 $\nabla V_i = a_i X_i$,其中 a_i 为结点度为 X_i 的结点数,按照变量梯度法的求解过程,其李雅普诺夫函数变量梯度可设为

$$\begin{aligned} \nabla V &= \nabla V_1 + \dots + \nabla V_n \\ &= a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \end{aligned} \quad (3)$$

$$\dot{V} = (\nabla V)^T \cdot \dot{X} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n > 0$$

同样考虑到 $\frac{\partial(X_n)}{\partial X_{n+1}} = \frac{\partial(X_{n+1})}{\partial X_n} = 0$ 成立,可求得同配网络的李雅普诺夫函数为:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{x_1(x_2 \dots x_n = 0)} \nabla V_1 dx_1 + \int_0^{x_2(x_1 = x_1, x_3, \dots, x_n = 0)} \nabla V_2 dx_2 \\ &+ \dots + \int_0^{x_n(x_1 = x_1, \dots, x_{n-1} = x_{n-1})} \nabla V_n dx_n \\ &= \frac{1}{2} a_1 X_1^2 + \frac{1}{2} a_2 X_2^2 + \dots + \frac{1}{2} a_n X_n^2 > 0 \end{aligned} \quad (4)$$

因为同配网络的李雅普诺夫函数是正定的,但由于其函数微分值 $\dot{V} > 0$,因此同配网络的状态是不稳定的。

2.3 中性网络的稳定性

根据中性网络的性质,按照结点的连接度由大到小进行划分,其状态方程可设置为 $X_{n+1} = X_n \pm 1$,这是因为在中性网络中连接度大的结点并不能够确定是与连接度大的结点相连还是与连接度小的结点相连,即 $X_n = X_{n+1} \pm X_n = \pm 1$ 。在采用变量梯度法对中性网络的分析中,对于中性网络每一类结点,其梯度值同样可以设置为 $\nabla V_i = a_i X_i$,由于其网络连接度倾向的不确定性,故其李雅普诺夫函数的变量梯度值具有不确定性,即

$$\begin{aligned} \nabla V &= \nabla V_1 + \dots + \nabla V_n = a_1 X_1 \pm a_2 X_2 \pm \dots \pm a_n X_n \\ \dot{V} &= (\nabla V)^T \cdot \dot{X} = a_1 X_1 \pm a_2 X_2 \pm \dots \pm a_n X_n \end{aligned} \quad (5)$$

同理可求得中性网络的李雅普诺夫函数为 $V = \frac{1}{2} a_1 X_1^2 + \frac{1}{2} a_2 X_2^2 + \dots + \frac{1}{2} a_n X_n^2 > 0$ 。

显然中性网络的李雅普诺夫函数是正定的,但由于其函数微分值 \dot{V} 的大小具有不确定性,因此并不能简单地从上面的结果中判断出中性网络的状态是否稳定,必须加以区分进行判别。

如果中性网络的 $\dot{V} < 0$,即要求 $a_1 X_1 \pm a_2 X_2 \pm \dots \pm a_n X_n < 0$,则网络中连接度大的结点总体倾向于与连接度小的结点相连,那么网络状态是趋于稳定的,否则网络的状态就是趋于不稳定的,即 $\dot{V} > 0$ 。这一结论可以从理论上解释为什么有些中性网络呈现出稳定状态,而有些中性网络呈现出不稳定状态。

2.4 复杂网络结构的稳定性分析方法在实际中的应用

为了更好地说明复杂网络稳定性的演变过程,本文以近年来兴起并流行的一些在线社交网络为例,如图 1 所示^[5],这是一家在线社交网络于 2005 年 6 月到 2007 年 8 月的拓扑结构变化曲线图(横坐标表示时间刻度,共计 30 个月),其中图 1 的左图部分表示网络中边数($E(T)$ 表示)与结点数($N(T)$ 表示)随时间变化的曲线图,图 1 中右图部分表示网络中同配系数($r(T)$ 随时间变化的曲线图。文献[3]对文献[5]给出的统计数据进行分析,认为是由于在线社交网络继承了现实中人际关系网络的同配结构,逐渐地低度值用户可

能会优先与那些高度值的网络名人建立连接,从而导致网络的异配性^[3]。通过本文的复杂网络稳定性模型可以更加明确地从本质上加以分析,其演化的根本原因在于网络是由一个不稳定状态转变为一个稳定状态,而只有这样才能更有利于网络的演变和发展。即只有稳定的系统才能正常工作,不稳定的系统是不能正常工作的^[2]。

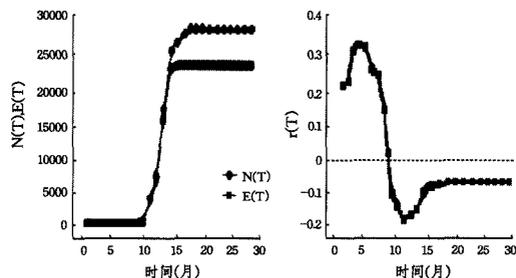


图1 一个在线社会网络拓扑结构随时间变化曲线图(取自文献[5])

3 复杂网络的鲁棒性

在现实的生活,我们希望复杂网络具有一定的鲁棒性,即对外界的各种干扰等扰动具备一定的抗干扰能力,特别是对外界一些小的结点故障扰动仍能保持网络本身的特性和稳定状态。为此我们需要对复杂网络的鲁棒性加以研究。以全球最大的计算机网络因特网为例,现在人们的生活、工作、学习和交往都离不开因特网,设想一下如果因特网由于某些结点受到黑客攻击而发生故障导致网络不能工作,整个社会将会是一片混乱^[1]。所以对复杂网络的鲁棒性研究有很强的现实意义。

目前基于渗流理论和随机图理论对网络鲁棒性的理论分析有很多研究^[6,7],而本文基于网络结构对其鲁棒性进行研究。复杂网络的鲁棒性研究是当网络遭遇到故意攻击或随机故障时,网络中结点之间的连接程度所受到的破坏以及网络中传输行为(如包传输、负载分配等)所受到的影响^[9]。对于一个给定的网络,每次从该网络中移走一个结点,也就同时移走了与该网络结点相连的所有边。如果在移走少量结点后网络中的绝大部分结点仍然是连通的,那么就可称该网络的连通性对结点故障具有鲁棒性^[3]。

图2至图4形象地描绘出了同配网络、中性网络和异配网络在遭遇到攻击前和攻击后的网络的连通状态的仿真结果,其中攻击分为随机故障和故意攻击。所谓随机故障是指随机假定网络任意结点发生故障后的连通状态,而故意攻击是指网络特定结点(即关键结点)发生故障后的连通状态。

通过比较可以发现,随机故障对于不同类别网络连通性的影响差异不是很大,特别是发生随机故障的网络结点数较少的情况下,对网络整体的连通性都不会产生很大的影响。但是故意攻击对网络连通性的影响则不同,不同类别的网络差异很大,且无论受到故意攻击的网络结点的数量是多少都会对网络整体连通性产生很大的影响,特别是同配网络对故意攻击表现出了异常的脆弱性,即使是在受到攻击的结点数很少的情况下。而异配网络则对故意攻击表现出了很强的健壮性。中性网络表现次之,对抗故意攻击具有很大的不稳定性。

究其原因是因为在网络中连接度大的结点往往也是网络

传输过程中重要的传输结点^[8]。一旦这些结点出现故障,对于异配网络,由于连通度大的结点总是与连通度小的结点相连,这样就必然造成连通度大的结点位置分散,而且这些结点由于其连通度大,则往往能够找出其它的结点替代该结点而组成新的传输路径,而不至于发生整个传输路径中断而造成整个网络传输的瘫痪,因此其网络的结点故障鲁棒性好。而对于同配网络,由于连通度大的结点总是与连通度大的结点相连,这样必然就造成连通度大的结点位置集中,一旦这些结点发生故障,由于相互连接的位置集中而无法找出其可以替代的结点从而造成整个网络传输系统的瘫痪,进而引发灾难性的后果,因此同配网络对故意攻击表现出了异常的脆弱性。

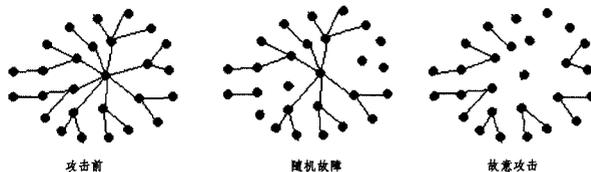


图2 同配网络受到攻击前后的连通状态

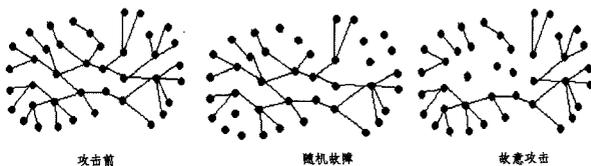


图3 中性网络受到攻击前后的连通状态

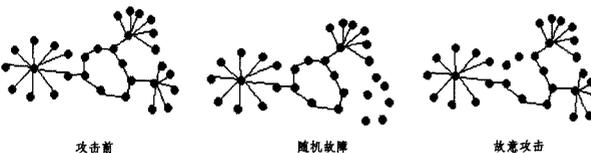


图4 异配网络受到攻击前后的连通状态

为了准确地分析与比较不同类型的网络对结点故障的鲁棒性,本文分别对具有1000个结点的同配网络、中性网络和异配网络进行结点故障的鲁棒性仿真攻击测试,算法如下:

1. 遍历网络中结点和边,构建相应的结点集 N ,同时构建一个二维的关系矩阵 A_{ij} ,其中关系矩阵的元素

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{结点 } i \text{ 和结点 } j \text{ 有边相连} \\ 0, & \text{结点 } i \text{ 和结点 } j \text{ 无边相连} \end{cases}$$
2. 分别按照故意攻击和随机故障两种方式确定受到攻击的结点 a_{ij} ,构建受攻击结点集 $N' = N - \{a_{ij}\}$,同时将关系矩阵中 a_{ij} 和 a_{ji} 的值设为0;
3. 判定当前网络的连通状态,如果产生了新的子图,则需在最大的连通子图结点集中减去新产生的连通子图结点集,即 $N_{\text{最大连通子图}} = N_{\text{最大连通子图}} - N_{\text{新连通子图}}$;
4. 计算 D 和 H 值, $D = \frac{N'}{N}$, $H = \frac{N_{\text{最大连通子图}}}{N}$;
5. 判断关系矩阵 A_{ij} 中的元素是否全部为0或者 N' 是否等于 N ,如果条件为真,则转到下一步,否则返回步骤2;
6. 算法结束。

仿真结果如表1所列,其中 D 为受到攻击的结点数与原来网络结点数的比值, H 为受到攻击后网络中最大连通子图的结点数与原来网络结点数的比值。同时为了更加清楚地比较不同类型网络受到攻击前后的连通状态,绘制了相应的连通状态比较示意图,如图5所示。

表 1 不同类型网络受到攻击前后的连通状态值(D值)

攻击类型	H 值				
	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2
同配网络随机故障	0	0.05	0.11	0.13	0.18
同配网络故意攻击	0	0.12	0.22	0.25	0.28
中性网络随机故障	0	0.15	0.18	0.22	0.25
中性网络故意攻击	0	0.21	0.23	0.25	0.28
异配网络随机故障	0	0.25	0.27	0.36	0.42
异配网络故意攻击	0	0.27	0.28	0.38	0.42

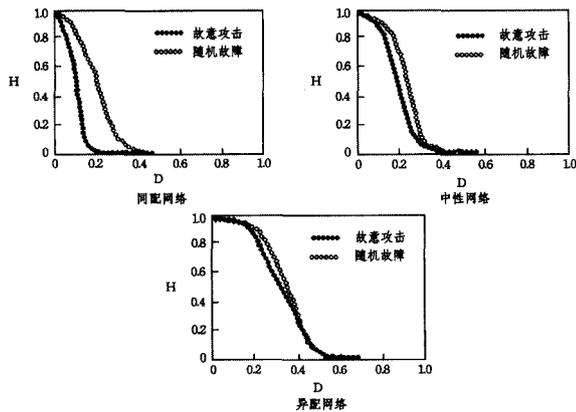


图 5 不同类型网络受到攻击前后的连通状态比较

从实验可以看出,对于同配网络,故意攻击和随机故障两种方式攻击对网络连通性的影响差别很大,中性网络次之,而在异配网络中对这两种攻击方式的影响差别较小,在受到攻击后其网络健壮性也要较同配网络和中性网络好很多,这也再次验证了理论分析中关于异配网络结构的稳定性和健壮性,即异配网络较同配网络具有更强的抗攻击能力。

理论分析和仿真实验表明,复杂网络的鲁棒性与其网络的稳定性有着正相关性,对于异配网络来说,其鲁棒性好,尤其是完全异配网络(即严格按照连通度大的结点总是与连通度小的结点相连),其鲁棒性最好;中性网络次之;同配网络的鲁棒性差,尤其是完全同配网络(即严格按照连通度大的结点总是与连通度更大的结点相连),鲁棒性最差。在网络中如果某个结点或某些特定的结点发生故障,则必然会造成整个网

络传输的瘫痪,因为这些重要的结点位置分布集中,在传输路径上又是关键结点,一旦出现故障无法找到替换的结点将造成网络传输路径的中断。由此可以得出结论:网络中不同类型结构对结点故障的鲁棒性起到决定性作用。

结束语 通过对复杂网络结构稳定性和鲁棒性的理论推导和分析可知,在异配网络中,其网络的结构是大范围内稳定的;在同配网络中,其网络结构是不稳定的;而在中性网络中,其网络结构不能简单判定为是否处于稳定状态,需根据网络节点连接的倾向性加以判断,网络中连接度大的结点总体倾向于与连接度小的结点相连,则可以判定网络状态是稳定的,否则是处于不稳定状态。对于相关网络的鲁棒性,通过仿真测试实验的结果表明,异配网络的鲁棒性最好,中性网络次之,同配网络的鲁棒性最差。除结点故障的鲁棒性外,复杂网络在其它相关方面的性能在将来需要做进一步的研究和验证工作。

参考文献

- [1] 谢希仁. 计算机网络(第五版)[M]. 北京:电子工业出版社,2009
- [2] 钟秋海. 现代控制理论[M]. 北京:高等教育出版社,2004
- [3] 汪小帆,李翔,陈关荣. 网络科学导论[M]. 北京:高等教育出版社,2012
- [4] Ugander J, Karrer B, Backstrom L, et al. The anatomy of the Facebook social graph [J]. 2011, arXiv:1111.4503v1
- [5] Hu H, WAang X. Evolution of a large online social network [J]. Phys. Lett. A, 2009, 373(12/13):1105-1110
- [6] Callway D S, Newman M E J, Strogate S H, et al. Network robustness and fragility, Percolation on random graphs [J]. Phys. Rev. Lett., 2000, 85(25):5468-5471
- [7] Cohen R, Erez K, Ben-Avraham D, et al. Breakdown of the internet under intentional attack [J]. Phys. Rev. Lett., 2001, 86(16):3682-3685
- [8] Newman M. Networks [M]. Cambridge, Cambridge University Press, 2010
- [9] 王林,戴冠中. 复杂网络的 Scale-free 性、Scale-free 现象及其控制[M]. 北京:科学出版社,2009

(上接第 59 页)

参考文献

- [1] Liang Y C, Chen K C, Li G Y, et al. Cognitive radio networking and communications: an overview [J]. IEEE Trans. Veh. Technol., 2011, 60:3386-3407
- [2] Mao J, Gao J, Liu Y, et al. Power allocation over fading cognitive MIMO channels: an ergodic capacity perspective [J]. IEEE Trans. Veh. Technol., 2012, 61:1162-1173
- [3] Bansal G, Hossain M J, Bhargava V K. Optimal and NUBoptimal power allocation schemes for OFDM-based cognitive radio systems [J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2008, 7(11):4710-4718
- [4] Wang S. Efficient resource allocation algorithm for cognitive OFDM systems [J]. Communications Letters, IEEE, 2010, 14(8):725-727
- [5] Kang X, Garg H, Liang Y C, et al. Optimal power allocation for OFDM-based cognitive radio with new primary transmission

- protection criteria [J]. IEEE Trans. Wireless Commun., 2010, 9:2066-2075
- [6] Svensson T, Franky T, Falconer D, et al. B-IFDMA: a power efficient multiple access scheme for non-frequency adaptive transmission [C] // Proc. 2007 IST Mobile and Wireless Communications NUmmit, 2007
- [7] Cioff J M, Dudevoir G P, Eyuboglu M V, et al. MMSE decision-feedback equalizers and coding: part I and II [J]. IEEE Trans. Commun., 1995, 43:2582-2604
- [8] Dang U, Ruder M, Schober R, et al. MMSE beamforming for SC-FDMA transmission over MIMO ISI channels [J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2011
- [9] Boyd S, Vandenberghe L. Convex Optimization [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004
- [10] Mokari N, Javan M R, Navaie K. Cross-layer resource allocation in OFDMA systems for heterogeneous traffic with imperfect CSI [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2010, 59(2):1011-1017