第 42 卷 第 1 期 2015 年 1 月

计 算 机 科 学 Computer Science

Vol. 42 No. 1 Jan 2015

具有属性析取扩展特征的内逆 P-信息智能挖掘

路 英[1,2] 李备友[1,3] 史开泉[1]

(山东大学数学与系统科学学院 济南 250100)[1] (山东英才学院经济管理学院 济南 250104)[2]

(齐鲁工业大学财政与金融学院 济南 250012)[3]

摘 要 逆 P-集合(inverse packet sets)是由内逆 P-集合 $\overline{X}^{F}$(internal inverse packet set $\overline{X}^{F}$)与外逆 P-集合 $\overline{X}^{\overline{F}}$(outer inverse packet set $\overline{X}^{\overline{F}}$)构成的集合对;或者,($\overline{X}^{F}$,$\overline{X}^{\overline{F}}$)是逆 P-集合;逆 P-集合具有动态特性。它是研究另一类动态信息与应用的新模型。逆 P-集合中元素的属性满足属性析取。利用内逆 P-集合的结构,给出了元素的属性析取扩展形式与特征、属性析取扩展条件下的内逆 P-信息智能挖掘,以及挖掘定理与智能挖掘原理;给出了满足内逆 P-推理与非完整信息条件下的完整信息的智能挖掘-发现。利用这些结果,给出了具有属性析取扩展特征的信息智能挖掘的应用。

关键词 逆 P-集合,逆 P-推理,扩展定理,智能挖掘,挖掘定理,应用

中图法分类号 O144 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2015.1.048

Intelligent Mining for P-Information with Expanded Characteristic of Disjunctive Attribute

LU Ying[1,2] LI Bei-you[1,3] SHI Kai-quan[1]

(School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Jinan 250100, China)[1]

(Department of Economics and Management, Shandong Yingcai University, Jinan 250104, China)[2]

(School of Finance, Qilu University of Technology, Jinan 250012, China)[3]

Abstract Inverse P-sets is a set pair composed of internal inverse packet set $\overline{X}^{F}$ and outer inverse packet set $\overline{X}^{\overline{F}}$, or ($\overline{X}^{F}$, $\overline{X}^{\overline{F}}$) is inverse P-sets, which has the dynamic characteristic. Inverse P-sets is a novel model of studying another class of dynamic information. The attribtutes of the elements in the inverse P-sets satisfy disjunctive characteristic. Using the structure of internal inverse packet set, the expanded form and characteristic of disjunctive attribute, the intelligent mining of internal inverse P-information and intelligent mining theorems under the condition of disjunctive attribute expanded were presented, and the intelligent mining-discovery of complete information of satisfying internal inverse P-reasoning and non-complete information condition was also put forward. By the above theory results, the application of the intelligent mining for the information with the expanded characteristic of disjunctive attribute was given.

Keywords Inverse P-sets, Inverse P-resoning, Expansion theorem, Intelligent mining, Mining theorem, Application

1 引言

利用一个基本事实,2012 年文献[1]把动态特性引入到有限普通集合 X 内(Cantor set X),改进有限普通集合 X,提出逆 P-集合(inverse packet sets),逆 P-集合具有动态特性,并给出了逆 P-集合在另一类动态信息研究中的应用。逆 P-集合具有如下特征:

给定有限普通集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}$,$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$是 X 的属性集合;$\forall x_i\in X$,x_i 具有的属性满足属性析取:$\bigvee_{i=1}^{k}\alpha_i$。1)若在 α 内不断地补充一些属性,α 变成α_i^F,$\alpha\subseteq\alpha_1^F\subseteq\alpha_2^F\subseteq\cdots\subseteq\alpha_{n-1}^F\subseteq\alpha_n^F$,则集合 X 变成内逆 P-集合 $\overline{X}_i^F$,$X\subseteq\overline{X}_1^F\subseteq\overline{X}_2^F\subseteq\cdots\subseteq\overline{X}_{n-1}^F\subseteq\overline{X}_n^F$;2)若在 α 内删除一些属性,α 变成 $\alpha_i^{\overline{F}}$,$\alpha_n^{\overline{F}}\subseteq\alpha_{n-1}^{\overline{F}}\subseteq\cdots\subseteq\alpha_2^{\overline{F}}\subseteq\alpha_1^{\overline{F}}\subseteq\alpha$,则集合 X 变成外逆 P-集合 $\overline{X}_i^{\overline{F}}$,$\overline{X}_n^{\overline{F}}\subseteq\overline{X}_{n-1}^{\overline{F}}\subseteq\cdots\subseteq\overline{X}_2^{\overline{F}}\subseteq\overline{X}_1^{\overline{F}}\subseteq X$。在 α 内不断地补充一些属性,同时在 α 内不断地删除另外一些属性,集合 X 变成若干个集合对($\overline{X}^{F}$,$\overline{X}^{\overline{F}}$),($\overline{X}^{F}$,$\overline{X}^{\overline{F}}$)是 X 生成的逆 P-集合(inverse packet sets)。在一定条件下,逆 P-集合($\overline{X}^{F}$,$\overline{X}^{\overline{F}}$)被还原成有限普通集 X。逆 P-集合具有 P-集合(packet sets)[3,4]相反的动态特性,P-集合是利用一个基本事实把动态特性引入到有限普通集合 X 内,改进有限普通集合 X 得到的。从 1)中容易得到:若 X 内被补充了一些元素 x_i,X 变成 $\overline{X}^{F}$,$X\subseteq\overline{X}^{F}$,则一定存在一些属性 α_i 被补充到 X 的属性集合 α 内,α 变成 α^F,$\alpha\subseteq\alpha^F$;换一个说法,元素 $x_i\in X$ 具有的属性析取被扩展;或者,一些未知的元素 x_i 被补充到 X 内,X 变成 $\overline{X}^{F}$,得到元素 $x_i\in X$ 的属性析取的扩展形式。属性析取扩展是另一类动态信息的基本特征。人们提出这样的问题:A. 若把 X 定义成一个非完

到稿日期:2013-11-21 返修日期:2014-03-06 本文受山东省高等学校人文社会科学研究计划(J13WG05)资助。

路 英(1973—),女,讲师,主要研究领域为金融系统、系统辨识,E-mail:zihaoo@163.com;**李备友**(1973—),男,副教授,主要研究领域为金融系统、信息辨识,E-mail:libeiyou@nuaa.edu.cn;**史开泉**(1945—),男,教授,博士生导师,主要研究领域为粗集理论与应用、信息系统与信息识别理论与应用,E-mail:shikq@sdu.edu.cn(通讯作者)。

整信息(x)，$(x)=X$，$\overline{X}^F$ 被定义成一个完整信息$(\overline{x})^F$，$(\overline{x})^F=\overline{X}^F$，则 $\forall x_i\in(x)$的属性析取被扩展成什么？B. 利用(x)怎样智能地挖掘到$(\overline{x})^F$，$(x)\subseteq(\overline{x})^F$？C. 利用$(x)$智能地挖掘到$(\overline{x})^F$，$(x)$与$(\overline{x})^F$，$(x)$的属性集合 α 与$(\overline{x})^F$ 的属性集合 α^F 具有什么样的推理关系？换一个说法，利用内逆 P-推理结构与非完整信息(x)，能否智能地挖掘到完整信息$(\overline{x})^F$？人们在另一类动态信息系统应用研究中经常遇到问题 A—C。

利用内逆 P-集合与内逆 P-推理，本文给出问题 A—C 的讨论。为了便于讨论和读者容易接受本文给出的结果，把逆 P-集合、逆 P-推理简单地引入到本文第 2 节，作为本文讨论的概念准备，逆 P-集合、逆 P-推理的更多特征及应用见文献[1,7]。

2 逆 P-集合与逆 P-推理

约定 1 U 是有限元素论域；V 是有限属性论域；X 是 U 上的有限普通集合，α 是 X 的属性集合，$X\subset U$，$\alpha\subset V$；$f\in F$，$\overline{f}\in\overline{F}$是元素迁移；$f\in F$ 的特征是：对于元素 $u\in U$，$u\overline{\in}X$，$f\in F$ 把 u 变成 $f(u)=x'\in X$；对于属性 $\beta\in V$，$\beta\overline{\in}\alpha$，$f\in F$ 把 β 变成 $f(\beta)=\alpha'\in\alpha$。$\overline{f}\in\overline{F}$ 的特征是：对于元素 $x\in X$，$\overline{f}\in\overline{F}$ 把 x 变成 $\overline{f}(x)=u\overline{\in}X$；对属性 $\alpha_i\in\alpha$，$\overline{f}\in\overline{F}$ 把 α_i 变成 $\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha$。$F=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$，$\overline{F}=\{\overline{f}_1,\overline{f}_2,\cdots,\overline{f}_n\}$是元素迁移族。

2012 年文献[1]给出：

给定 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}$，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$是 X 的属性集合，称 $\overline{X}^F$ 是 X 生成的内逆 P-集合(internal inverse packet set)，简称 $\overline{X}^F$ 是内逆 P-集合，而且

$$\overline{X}^F=X\cup X^+ \tag{1}$$

X^+称作 X 的 F-元素补充集合，而且

$$X^+=\{u\mid u\in U,u\overline{\in}X,f(u)=x'\overline{\in}X,f\in F\} \tag{2}$$

如果 $\overline{X}^F$ 具有属性集合 α^F，而且满足

$$\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha'\mid\beta\in V,\beta\overline{\in}\alpha,f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\} \tag{3}$$

式(1)中，$\overline{X}^F=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$，$q<r$，$q,r\in\mathbf{N}^+$。

给定 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}$，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$是 X 属性集合，称 $\overline{X}^{\overline{F}}$是 X 生成的外逆 P-集合(outer inverse packet set)，简称 $\overline{X}^{\overline{F}}$是外逆 P-集合，而且

$$\overline{X}^{\overline{F}}=X-X^- \tag{4}$$

X^-称作 X 的 $\overline{F}$-删除集合，而且

$$X^-=\{x\mid x\in X,\overline{f}(x)=u\overline{\in}X,\overline{f}\in\overline{F}\} \tag{5}$$

如果 $\overline{X}^{\overline{F}}$具有属性集合 $\alpha^{\overline{F}}$，而且满足

$$\alpha^{\overline{F}}=\alpha-\{\beta_i\mid\alpha_i\in\alpha,\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha,\overline{f}\in\overline{F}\} \tag{6}$$

这里：式(4)中，$\overline{X}^{\overline{F}}=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$，$p<q$，$p,q\in\mathbf{N}^+$；$\overline{X}^{\overline{F}}\neq\emptyset$，$\alpha^{\overline{F}}\neq\emptyset$。

由内逆 P-集合 $\overline{X}^F$ 与外逆 P-集合 $\overline{X}^{\overline{F}}$构成的元素集合对，称作 X 生成的逆 P-集合(inverse packet sets)，简称逆 P-集合，而且

$$(\overline{X}^F,\overline{X}^{\overline{F}}) \tag{7}$$

有限普通集合 X 称作逆 P-集合$(\overline{X}^F,\overline{X}^{\overline{F}})$的基集合(基础集合)

利用式(3)得到

$$\alpha_1^F\subseteq\alpha_2^F\subseteq\cdots\subseteq\alpha_{n-1}^F\subseteq\alpha_n^F \tag{8}$$

由式(8)、式(1)得到内逆 P-集合 $\overline{X}^F$ 满足

$$\overline{X}_1^F\subseteq\overline{X}_2^F\subseteq\cdots\subseteq\overline{X}_{n-1}^F\subseteq\overline{X}_n^F \tag{9}$$

利用式(6)得到

$$\alpha_n^{\overline{F}}\subseteq\alpha_{n-1}^{\overline{F}}\subseteq\cdots\subseteq\alpha_2^{\overline{F}}\subseteq\alpha_1^{\overline{F}} \tag{10}$$

由式(10)，式(4)得到外逆 P-集合 $\overline{X}^{\overline{F}}$满足

$$\overline{X}_n^{\overline{F}}\subseteq\overline{X}_{n-1}^{\overline{F}}\subseteq\cdots\subseteq\overline{X}_2^{\overline{F}}\subseteq\overline{X}_1^{\overline{F}} \tag{11}$$

由式(9)，式(11)得到

$$\{(\overline{X}_i^F,\overline{X}_j^{\overline{F}})\mid i\in\mathrm{I},j\in\mathrm{J}\} \tag{12}$$

称式(12)是逆 P-集合的集合对族，式(12)是逆 P-集合的一般形式，I，J 是指标集。

利用式(7)、式(12)得到：

命题 1 逆 P-集合$(\overline{X}^F,\overline{X}^{\overline{F}})$与有限普通集合 X 满足

$$(\overline{X}^F,\overline{X}^{\overline{F}})_{F=\overline{F}=\emptyset}=X \tag{13}$$

命题 2 逆 P-集合$\{(\overline{X}_i^F,\overline{X}_j^{\overline{F}})\mid i\in\mathrm{I},j\in\mathrm{J}\}$与有限普通集合 X 满足

$$\{(\overline{X}_i^F,\overline{X}_j^{\overline{F}})\mid i\in\mathrm{I},j\in\mathrm{J}\}_{F=\overline{F}=\emptyset}=X \tag{14}$$

2012 年，文献[7]给出：

称 $\overline{X}_{k+1}^F$是 $\overline{X}_k^F$ 的内逆 P-推理生成集合，简称 $\overline{X}_{k+1}^F$是内逆 P-推理集合，如果 $\overline{X}_{k+1}^F$的属性集合 α_{k+1}^F与 $\overline{X}_k^F$ 的属性集合 α_k^F，$\overline{X}_{k+1}^F$与 $\overline{X}_k^F$ 满足

$$\text{if } \alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F,\text{then } \overline{X}_k^F\Rightarrow\overline{X}_{k+1}^F \tag{15}$$

式(15)称作内逆 P-集合生成的内逆 P-推理，简称内逆 P-推理；$\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F$称作内逆 P-推理条件，$\overline{X}_k^F\Rightarrow\overline{X}_{k+1}^F$称作内逆 P-推理结论。

式(15)中，“$\Rightarrow$”与“$\subseteq$”等价。

称 $\overline{X}_{k+1}^{\overline{F}}$是 $\overline{X}_k^{\overline{F}}$ 的外逆 P-推理生成集合，简称 $\overline{X}_{k+1}^{\overline{F}}$是外逆 P-推理集合，如果 $\overline{X}_{k+1}^{\overline{F}}$的属性集合 $\alpha_{k+1}^{\overline{F}}$与 $\overline{X}_k^{\overline{F}}$ 的属性集合 $\alpha_k^{\overline{F}}$，$\overline{X}_{k+1}^{\overline{F}}$与 $\overline{X}_k^{\overline{F}}$满足

$$\text{if } \alpha_{k+1}^{\overline{F}}\Rightarrow\alpha_k^{\overline{F}},\text{then } \overline{X}_{k+1}^{\overline{F}}\Rightarrow\overline{X}_k^{\overline{F}} \tag{16}$$

式(16)称作外逆 P-集合生成的外逆 P-推理，简称外逆 P-推理；$\alpha_{k+1}^{\overline{F}}\Rightarrow\alpha_k^{\overline{F}}$ 称作外逆 P-推理条件，$\overline{X}_{k+1}^{\overline{F}}\Rightarrow\overline{X}_k^{\overline{F}}$ 称作外逆 P-推理结论。

称$(\overline{X}_k^F,\overline{X}_{k+1}^{\overline{F}})$是内逆 P-推理与外逆 P-推理生成集合，简称$(\overline{X}_k^F,\overline{X}_{k+1}^{\overline{F}})$是逆 P-推理集合，如果$(\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^{\overline{F}})$与$(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^{\overline{F}})$，$(\overline{X}_k^F,\overline{X}_{k+1}^{\overline{F}})$与$(\overline{X}_{k+1}^F,\overline{X}_k^{\overline{F}})$满足

$$\text{if } (\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^{\overline{F}})\Rightarrow(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^{\overline{F}}),\text{then } (\overline{X}_k^F,\overline{X}_{k+1}^{\overline{F}})\Rightarrow(\overline{X}_{k+1}^F,\overline{X}_k^{\overline{F}}) \tag{17}$$

式(17)称作逆 P-集合生成的逆 P-推理，简称逆 P-推理；$(\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^{\overline{F}})\Rightarrow(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^{\overline{F}})$称作逆 P-推理条件，$(\overline{X}_k^F,\overline{X}_{k+1}^{\overline{F}})\Rightarrow(\overline{X}_{k+1}^F,\overline{X}_k^{\overline{F}})$称作逆 P-推理结论。

式(17)中，$(\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^{\overline{F}})\Rightarrow(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^{\overline{F}})$表示 $\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F$，$\alpha_{k+1}^{\overline{F}}\Rightarrow\alpha_k^{\overline{F}}$；$(\overline{X}_k^F,\overline{X}_{k+1}^{\overline{F}})\Rightarrow(\overline{X}_{k+1}^F,\overline{X}_k^{\overline{F}})$表示 $\overline{X}_k^F\Rightarrow\overline{X}_{k+1}^F$，$\overline{X}_{k+1}^{\overline{F}}\Rightarrow\overline{X}_k^{\overline{F}}$。

逆 P-集合存在的事实如下：

U 是有限产品论域，$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\subset U$ 是 U 上的有限产品集合，α_i 是 $x_i\in X$ 的供货合同，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$是 X 的供货合同集合。在 α 内补充新的合同 α_{m+1}，α 变成 $\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha_{m+1}\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}\}$，$\alpha\subseteq\alpha^F$；$X$ 变成 $\overline{X}^F=X\cup\{x_{m+1}\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1}\}$，$X\subseteq\overline{X}^F$。在 α 内删除供货合同 α_m，α 变成 $\alpha^{\overline{F}}=\alpha-\{\alpha_m\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}\}$，$\alpha^{\overline{F}}\subseteq\alpha$；$X$ 变成 $\overline{X}^{\overline{F}}=X-\{x_m\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_{m-1}\}$，$\overline{X}^{\overline{F}}\subseteq X$。在 α 内不断地补充新合同，同时又删除合同，产品集合 X 变成$(\overline{X}^F,\overline{X}^{\overline{F}})$，这是人们司空见惯的事实。若抽掉这个事实中“产品”名词，把“合同 α_i”定义成“属性 α_i”，对这个事实给出数学的抽象与数学的表达，则得到逆 P-集合$(\overline{X}^F,\overline{X}^{\overline{F}})$。$\forall x_i\in X$，$x_i$ 的属性

(合同)满足：$\overset{m}{\underset{i=1}{\vee}}\alpha_i$。

约定 2 利用第 2 节中的内逆 P-集合、内逆 P-推理，第 3－5节将给出具有属性析取扩展特征的内逆 P-信息智能挖掘与应用的讨论。在第 3－5 节的讨论中，第 2 节中的 $X,\overline{X}^F$ 分别记作(x)，$(\overline{x})^F$ 或者$(x)=X$，$(\overline{x})^F=\overline{X}^F$；$(x)$，$(\overline{x})^F$ 分别称作信息、内逆 P-信息，$\forall x_i\in(x)$（或者$\forall x_j\in(\overline{x})^F$）称作信息元，不引起误解。

3 具有属性析取扩展的内逆 P-信息与它的内逆 P-推理生成

定义 1 称

$$\alpha_\lambda^F=\overset{k}{\underset{i=1}{\vee}}\alpha_i \tag{18}$$

是内逆 P-信息$(\overline{x})_\lambda^F$ 的属性析取范式，如果$(\overline{x})_\lambda^F$ 具有属性集合 $\alpha_\lambda^F=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$。

定义 2 称

$$\alpha_{\lambda+1}^F=(\overset{k}{\underset{i=1}{\vee}}\alpha_i)\overset{t}{\underset{i=k+1}{\vee}}\alpha_i \tag{19}$$

是内逆 P-信息$(\overline{x})_\lambda^F$ 的属性析取范式扩展，如果 $\alpha_{\lambda+1}^F=\alpha_\lambda^F\cup\{\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},\cdots,\alpha_t\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1}\cdots,\alpha_t\}$是$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$的属性集合；$(\overline{x})_\lambda^F\subseteq(\overline{x})_{\lambda+1}^F$。

定义 3 称$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$是$(\overline{x})_\lambda^F$ 被内逆 P-推理生成的内逆 P-信息，如果$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$的属性集合 $\alpha_{\lambda+1}^F$是$(\overline{x})_\lambda^F$ 的属性集合α_λ^F 的属性析取范式扩展。

由定义 1－3 得到：

定理 1（属性析取扩展与内逆 P-信息推理生成定理） $(\overline{x})_{\lambda+1}^F$的属性集合 $\alpha_{\lambda+1}^F$是$(\overline{x})_\lambda^F$ 的属性析取扩展生成的充分必要条件是$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$与$(\overline{x})_\lambda^F$，$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$的属性集合 $\alpha_{\lambda+1}^F$与$(\overline{x})_\lambda^F$ 的属性集合α_λ^F 满足

$$\text{if } \alpha_\lambda^F\Rightarrow\alpha_{\lambda+1}^F,\text{then } (\overline{x})_\lambda^F\Rightarrow(\overline{x})_{\lambda+1}^F \tag{20}$$

证明：1)利用式(20)得到：$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$与$(\overline{x})_\lambda^F$，$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$的属性集合 $\alpha_{\lambda+1}^F$与$(\overline{x})_\lambda^F$ 的属性集合α_λ^F 满足第 2 节中的内逆 P-推理：if $\alpha_\lambda^F\Rightarrow\alpha_{\lambda+1}^F$，then$(\overline{x})_\lambda^F\Rightarrow(\overline{x})_{\lambda+1}^F$；或者，若 $\alpha_\lambda^F\subseteq\alpha_{\lambda+1}^F$，则$(\overline{x})_\lambda^F\subseteq(\overline{x})_{\lambda+1}^F$。设 $\alpha_\lambda^F=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$，$\alpha_{\lambda+1}^F=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_t\}$；利用第 2 节中式(1)－式(3)与定义 1－定义 3 得到：$\forall x_i\in(\overline{x})_\lambda^F$，$x_i$ 的属性满足$\overset{k}{\underset{i=1}{\vee}}\alpha_i$，$\forall x_j\in(\overline{x})_{\lambda+1}^F$的属性满足$(\overset{k}{\underset{j=1}{\vee}}\alpha_j)\overset{t}{\underset{j=k+1}{\vee}}\alpha_j$；$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$是$(\overline{x})_\lambda^F$ 的属性析取扩展被内逆 P-推理生成的内逆 P-信息。2)若$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$是$(\overline{x})_\lambda^F$ 的属性析取扩展被内逆 P-推理生成的内逆 P-信息，由第 2 节中式(1)－式(3)得到：$(\overline{x})_\lambda^F\subseteq(\overline{x})_{\lambda+1}^F$；由第 2 节中式(1)－式(3)，$(\overline{x})_\lambda^F$ 的属性集合α_λ^F 与$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$的属性集合 $\alpha_{\lambda+1}^F$满足 $\alpha_\lambda^F\subseteq\alpha_{\lambda+1}^F$；由定义 1－定义 3 得到：$\alpha_{\lambda+1}^F$是 α_λ^F 的属性析取扩展；或者，若 $\alpha_\lambda^F\subseteq\alpha_{\lambda+1}^F$，则$(\overline{x})_\lambda^F\subseteq(\overline{x})_{\lambda+1}^F$，得到式(20)；由 1)和 2)得到定理 1。

定理 2(属性析取扩展与内逆 P-信息的信息元补充定理) 若$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$是$(\overline{x})_\lambda^F$ 被内逆 P-推理生成的内逆 P-信息，则$(\overline{x})_\lambda^F$ 内被补充 $\Delta(\overline{x})_\lambda^F\neq\emptyset$，满足

$$(\overline{x})_{\lambda+1}^F=(\overline{x})_\lambda^F\cup\Delta(\overline{x})_\lambda^F \tag{21}$$

证明：由第 2 节中的式(15)得到$(\overline{x})_\lambda^F$ 与$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$满足内逆 P-推理结论：$(\overline{x})_\lambda^F\Rightarrow(\overline{x})_{\lambda+1}^F$；或者$(\overline{x})_\lambda^F\subseteq(\overline{x})_{\lambda+1}^F$。由第 2 节中的式(2)得到：存在信息元 $u_i\in U$，$u_i\,\overline{\in}\,(\overline{x})_\lambda^F$，$f\in F$ 把 u_i 变成 $f(u_i)=x_i\in(\overline{x})_\lambda^F$，$x_i$ 构成 $\Delta(\overline{x})_\lambda^F$ 满足 $(\overline{x})_\lambda^F\cup\Delta(\overline{x})_\lambda^F=(\overline{x})_{\lambda+1}^F$；或者，$(\overline{x})_\lambda^F$ 内被补充信息元就得到$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$；$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$的属性集合 $\alpha_{\lambda+1}^F$是$(\overline{x})_\lambda^F$ 的属性析取扩展。

推论 1 若$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$是$(\overline{x})_\lambda^F$ 被内逆 P-推理生成的内逆 P-信息，$(\overline{x})_{\lambda+1}^F=(\overline{x})_\lambda^F\cup\Delta(\overline{x})_\lambda^F$，则$(\overline{x})_\lambda^F$ 的属性集合 α_λ^F 与 $\Delta(\overline{x})_\lambda^F$ 的属性集合 $\Delta\alpha_\lambda^F$ 满足

$$\alpha_\lambda^F\cap\Delta\alpha_\lambda^F=\emptyset \tag{22}$$

证明：由第 2 节中的式(1)－式(3)与式(15)得到：设 $\alpha_\lambda^F=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$，$\alpha_{\lambda+1}^F=\alpha_\lambda^F\cup\Delta\alpha_\lambda^F=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\cup\{\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},\cdots,\alpha_t\}$；显然 $\alpha_\lambda^F\cap\Delta\alpha_\lambda^F=\emptyset$；这里：$\alpha_{\lambda+1}^F$是$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$的属性集合。

定理 3(属性析取扩展与内逆 P-信息的属性补充定理) 若$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$是$(\overline{x})_\lambda^F$ 被内逆 P-推理生成的内逆 P-信息，则$(\overline{x})_\lambda^F$ 的属性集合α_λ^F 内被补充 $\Delta\alpha_\lambda^F\neq\emptyset$，满足

$$\alpha_{\lambda+1}^F=\alpha_\lambda^F\cup\Delta\alpha_\lambda^F \tag{23}$$

这里，$\alpha_{\lambda+1}^F$是$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$的属性集合。

证明过程与定理 2 类似，证明略。

推论 2 若$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$是$(\overline{x})_\lambda^F$ 被内逆 P-推理生成的内逆 P-信息，$(\overline{x})_{\lambda+1}^F=(\overline{x})_\lambda^F\cup\Delta(\overline{x})_\lambda^F$，则$(\overline{x})_\lambda^F$ 与 $\Delta(\overline{x})_\lambda^F$ 满足

$$(\overline{x})_\lambda^F\cap\Delta(\overline{x})_\lambda^F=\emptyset \tag{24}$$

证明过程与推论 1 类似，证明略。

定理 4(内逆 P-信息与属性分辨定理) 若$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$是$(\overline{x})_\lambda^F$ 被内逆 P-推理生成的内逆 P-信息；$\alpha_{\lambda+1}^F$，α_λ^F 分别是$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$，$(\overline{x})_\lambda^F$ 的属性集合，则

$$1)\mathrm{IDE}((\overline{x})_{\lambda+1}^F,(\overline{x})_\lambda^F) \tag{25}$$

$$2)\mathrm{IDE}(\alpha_{\lambda+1}^F,\alpha_\lambda^F) \tag{26}$$

式(25)、式(26)中，IDE＝identification。

由定义 1－定义 3、定理 1－定理 4、推论 1－推论 2 得到：

命题 3 具有属性析取扩展的内逆 P-信息$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$一定是$(\overline{x})_\lambda^F$ 被内逆 P-推理的生成，反之亦真。

命题 4 满足内逆 P-推理结论$(\overline{x})_\lambda^F\Rightarrow(\overline{x})_{\lambda+1}^F$的内逆 P-信息$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$，$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$具有属性析取扩展，反之亦真。

由定理 1－定理 4、推论 1－推论 2、命题 3－命题 4 得到属性析取扩展-完整信息生成准则：

$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$是非完整信息$(\overline{x})_\lambda^F$ 的一个完整信息，$(\overline{x})_{\lambda+1}^F$的属性集合 $\alpha_{\lambda+1}^F$一定是$(\overline{x})_\lambda^F$ 的属性析取扩展。

利用第 2、3 节中的概念与结果，给出第 4 节所述。

4 内逆 P-信息智能挖掘与挖掘定理

定义 4 称$(\overline{x})_\lambda^F$ 是依赖(x)被智能挖掘的内逆 P-信息，如果$(\overline{x})_\lambda^F$ 与(x)满足内逆 P-推理结论，或者

$$(x)\Rightarrow(\overline{x})_\lambda^F \tag{27}$$

定义 5 称 ρ_λ^F 是依赖(x)被智能挖掘的内逆 P-信息$(\overline{x})_\lambda^F$ 的智能挖掘系数，而且

$$\rho_\lambda^F=\mathrm{card}((\overline{x})_\lambda^F)/\mathrm{card}(x)) \tag{28}$$

式(28)中，card＝cardinal number

定理 5(内逆 P-信息智能挖掘属性定理) 若$(\overline{x})_\lambda^F$ 是满足$(x)\Rightarrow(\overline{x})_\lambda^F$ 被智能挖掘的内逆 P-信息，则$(\overline{x})_\lambda^F$ 的属性集合 α_λ^F 与(x)的属性集合α满足内逆 P-推理条件，或者

$$\alpha\Rightarrow\alpha_\lambda^F \tag{29}$$

推论 3 若$(\overline{x})_\lambda^F$ 是满足$(x)\Rightarrow(\overline{x})_\lambda^F$ 被智能挖掘的内逆 P-信息，则存在 $\Delta\alpha\neq\emptyset$，$(\overline{x})_\lambda^F$ 的属性集合 α_λ^F，(x)的属性集合 α 与 $\Delta\alpha$ 满足

$$\alpha_\lambda^F-(\alpha\cup\Delta\alpha)=\emptyset \tag{30}$$

推论 4 若$(\overline{x})_\lambda^F$ 是满足$(x)\Rightarrow(\overline{x})_\lambda^F$ 被智能挖掘的内逆

P-信息，则(x)内一定被补充信息元x_i，x_i构成Δx；$(\overline{x})^F_\lambda$，(x)与Δx满足

$$(\overline{x})^F_\lambda-((x)\cup\Delta(x))=\varnothing \tag{31}$$

定理5、推论3、推论4的证明是直接的，这些证明略。

定理6(内逆P-信息智能挖掘系数-单位离散区间外点定理)　若$(\overline{x})^F_\lambda$是满足$(x)\Rightarrow(\overline{x})^F_\lambda$被智能挖掘的内逆P-信息，则$(\overline{x})^F_\lambda$的智能挖掘系数$\rho^F_\lambda$是单位离散区间$(0,1]$的外点，或者

$$\rho^F_\lambda\,\overline{\in}\,(0,1] \tag{32}$$

这里，$(0,1]$是由数值0与$1=\rho=\mathrm{card}((x))/\mathrm{card}((x))$构成的单位离散区间，$\rho=\mathrm{card}((x))/\mathrm{card}((x))$是信息$(x)$的自身挖掘系数。

证明：取数值0与$1=\rho=\mathrm{card}((x))/\mathrm{card}((x))$作单位离散区间$(0,1]$，利用第2节中的式(1)得到：$(x)\subseteq(\overline{x})^F$或者$(x)\subseteq(\overline{x})^F_\lambda$，$\mathrm{card}((x))\leqslant\mathrm{card}((x)^F_\lambda)$，由式(28)得到：$1=\rho^F_\lambda=\mathrm{card}((\overline{x})^F_\lambda)/\mathrm{card}((x))$，则有$\rho^F_\lambda\,\overline{\in}\,(0,1]$。

推论5　若$(\overline{x})^F_\lambda$是满足$(x)\Rightarrow(\overline{x})^F_\lambda$被智能挖掘的内逆P-信息，则$(\overline{x})^F_\lambda$的属性集合$\alpha^F_\lambda$是$(x)$的属性集合$\alpha$的属性析取扩展。

推论6　若$(\overline{x})^F_\lambda$是满足$(x)\Rightarrow(\overline{x})^F_\lambda$被智能挖掘的内逆P-信息，则$(\overline{x})^F_\lambda$是$(x)$内被补充信息元$x$生成的完整信息。

推论7　$(\overline{x})^F=\{(\overline{x})^F_\lambda\,|\,\lambda=1,2,\cdots,n\}$是满足$(x)\Rightarrow(\overline{x})^F_\lambda$被智能挖掘的内逆P-信息族，“$\Rightarrow$”是定义在$(\overline{x})^F$上的关系，任取$(\overline{x})^F_i,(\overline{x})^F_j,(\overline{x})^F_k\in(\overline{x})^F$，若$(\overline{x})^F_i\Rightarrow(\overline{x})^F_j$，$(\overline{x})^F_j\Rightarrow(\overline{x})^F_k$，则

$$(\overline{x})^F_i\Rightarrow(\overline{x})^F_k \tag{33}$$

推论8　$\alpha^F=\{\alpha^F_\lambda\,|\,\lambda=1,2,\cdots,n\}$是满足$(x)\Rightarrow(x)^F_\lambda$被智能挖掘的内逆P-信息的属性集合族，“$\Rightarrow$”是定义在$\alpha^F$上的关系，任取$\alpha^F_i,\alpha^F_j,\alpha^F_k\in\alpha^F$，若$\alpha^F_i\Rightarrow\alpha^F_j$，$\alpha^F_j\Rightarrow\alpha^F_k$，则

$$\alpha^F_i\Rightarrow\alpha^F_k \tag{34}$$

由定义4和定义5、定理5和定理6与推论3－推论8得到具有属性析取扩展的内逆P-信息智能挖掘原理：

非完整信息(x)的属性集合α与信息$(\overline{x})^F_\lambda$的属性集合α^F_λ满足内逆P-推理条件$\alpha\Rightarrow\alpha^F_\lambda$，在内逆P-推理结论中挖掘到完整信息$(\overline{x})^F_\lambda$满足$(x)\Rightarrow(\overline{x})^F_\lambda$，$(\overline{x})^F_\lambda$具有属性析取扩展。

利用第2节中的概念、模型以及第3、4节中给出的结果，给出第5节所述。

5　内逆P-信息智能挖掘在金融系统中的应用

为了便于接受第3、4节中结果的应用，减少因过多的专业概念对接收本节例子造成的困难，这一节给出一个通俗的例子。例子取自山东省某市金融税收系统，例子中的数据取自该市的税收年报。因为一些原因，例子中的数据是由原始数据通过技术方法后得到的，技术方法后的数据不影响本节例子的分析与讨论；本节的例子已做了适当的简化。

A是某市生产军工产品的大型集团公司，2010年A生产产品$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7$；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7$分别是$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7$的属性(供货合同)；产品$x_1-x_7$用信息$(x)$表示；属性$\alpha_1-\alpha_7$用属性集合$\alpha$表示，$x_1-x_7$的名称，略；则有

$$(x)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\} \tag{35}$$

$$(\alpha)=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7\} \tag{36}$$

集团公司A在2010年1月－6月的税收列入表1。

表1　2010年1月－6月集团公司A的税收分布

1	2	3	4	5	6
1.23	1.40	1.63	1.70	1.33	1.57

表1中每一列的数值是x_1-x_7分别在1月－6月被征收税款的总值。

集团A在生产x_1-x_7的同时，对产品x_8,x_9,x_{10}进行研发；2011年底，x_8,x_9,x_{10}已完成样机生产、应用测试与应用考核；x_8,x_9,x_{10}被用户试用并认证；x_8-x_{10}已形成批量生产。x_8-x_{10}具有属性(供货合同)$\alpha_8-\alpha_{10}$；A的产品信息(x)，(x)的属性集合α分别变成$(\overline{x})^F$，α^F：

$$(\overline{x})^F=(x)\cup\{x_8,x_9,x_{10}\}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\} \tag{37}$$

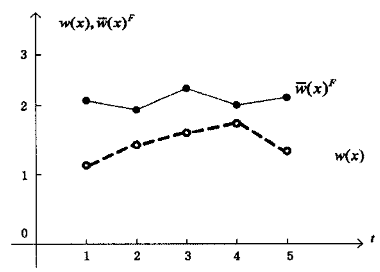
$$\alpha^F=(\alpha)\cup\{\alpha_8,\alpha_9,\alpha_{10}\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9,\alpha_{10}\} \tag{38}$$

集团公司A在2012年1月－6月的税收列入表2。

表2　2012年1月－6月集团公司A的税收分布

1	2	3	4	5	6
2.10	1.97	2.21	2.00	2.17	1.90

图1给出集团公司A 2010年1月－6月、2012年1月－6月的实收折线分布。



虚线是A在2010年1月－6月的税收折线分布$w(x)$

实线是A在2012年1月－6月的税收折线分布$\overline{w}(x)^F$

图1

例子的分析：

从式(35)、式(36)直观地得到：A的产品集合$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$用信息$(x)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$表示，产品的属性(供货合同)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7$用属性集合$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7\}$表示；显然，$\forall x_j\in(x)$，$x_j$的属性$\alpha_j=\bigvee_{i=1}^{7}\alpha_i$；或者，$x_j$的属性$\alpha_j$是$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7\}$的析取。因为$x_8,x_9,x_{10}$对$(x)$的补充，$(x)$变成$(\overline{x})^F=(x)\cup\{x_8,x_9,x_{10}\}$；由第2节中的式(1)与第3节中的概念得到：$(\overline{x})^F$是$(x)$的内逆P-信息，$(x)\subseteq(\overline{x})^F$。从式(37)、式(38)直观地得到：$(\overline{x})^F$是$(x)$的属性集合$\alpha$内被补充属性得到的；或者$\alpha$变成$\alpha^F$，$\alpha\subseteq\alpha^F$；$(x)$变成$(\overline{x})^F$，$(x)\subseteq(\overline{x})^F$；显然，$\forall x_k\in(\overline{x})^F$，$x_k$的属性$\alpha_k=(\bigvee_{i=1}^{7}\alpha_i)\bigvee_{i=8}^{10}\alpha_i=\bigvee_{i=1}^{10}\alpha_i$。由第3节中的定义1、定义2得到：$(\overline{x})^F$的属性集合$\alpha^F$是$(x)$的属性集合$\alpha$的属性析取扩展。由表1、表2与式(35)－式(38)得到：税收随着产品销售的增加而增长的基本事实，图1给出这个事实的直观表示：$w(x)<\overline{w}(x)^F$。

从式(36)、式(38)中得到：α内被补充属性x_8,x_9,x_{10}，α变成α^F，$\alpha\subseteq\alpha^F$；或者$\alpha\Rightarrow\alpha^F$；或者，$\alpha$的变化满足式(15)中的内逆P-推理：if $\alpha\Rightarrow\alpha^F$，then $(x)\Rightarrow(\overline{x})^F$；由第3节中定理1与第4节中定理5得到：内逆P-信息$(\overline{x})^F$被智能(推理)挖掘-发现，而且$(x)\subseteq(\overline{x})^F$；或者，利用内逆P-推理条件$\alpha\Rightarrow\alpha^F$，智能

(推理)发现 $\overline{w}(x)^F$，$\overline{w}(x)^F > w(x)$。利用式(35)、式(37)得到$(\overline{x})^F$的智能挖掘系数$\rho^F = 1.42 \overline{\in} (0,1]$；$\rho^F > 1$ 表明：在属性集合 α 内被补充属性，具有 α 的(x)内被补充信息元；或者，card(α)增大，card((x))也被增大，表明了内逆 P-集合的基本特征。事实上，在另一类动态信息系统中，人们经常遇到属性增多、信息增大的现象。利用式(36)、式(38)与式(35)得到$(\overline{x})^F$，它满足内逆 P-信息智能挖掘原理；利用(x)挖掘出$(\overline{x})^F$。

结束语 利用一个基本事实，2012 年文献[1]提出逆 P-集合(inverse packet sets)，逆 P-集合是另一类动态信息的数学模型表示；文献[2]提出函数逆 P-集合(function inverse packet sets)，函数逆 P-集合是逆 P-集合的函数形式。在逆 P-集合(函数逆 P-集合)中，元素 x_i 与它的属性 α_i 满足属性析取特征，属性析取是另一类动态信息的基本特征，文献[1]给出了逆 P-集合的应用。与逆 P-集合相对应的是：利用一个基本事实，2008 年文献[3,4]提出 P-集合(packet sets)，P-集合是一类动态信息的数学模型表示；文献[5,6]提出函数 P-集合(function packet sets)，函数 P-集合是 P-集合的函数形式。在 P-集合(函数 P-集合)中，元素 x_j 与它的属性 α_j 满足属性合取特征，属性合取是一类动态信息的基本特征。文献[7-20]给出 P-集合、函数 P-集合在一类动态信息，函数 P 集合在一类动态信息，一类动态信息规律多个应用研究。无论逆 P-集合还是 P-集合，在一定条件下都被还原成有限普通集合(cantor set)。

利用逆 P-集合和逆 P-推理，本文给出在属性析取扩展条件下的内逆 P-信息智能(推理)挖掘，并给出几个基本理论结果与这些结果在金融系统中的一个通俗应用。本文中的例子稍加专业改进，能被应用到其他信息系统中。

参考文献

[1] 史开泉. 逆 P-集合[J]. 山东大学学报：理学版，2012(1)：98-103

[2] 史开泉. 函数逆 P-集合与信息规律融合[J]. 山东大学学报：理学版，2012，47(8)：73-80

[3] 史开泉. P-集合[J]. 山东大学学报：理学版，2008，43(11)：77-84

[4] Shi Kai-quan. P-sets and its applications[J]. An International Journal Advances in Sytem Science and Applications，2009，9(2)：209-219

[5] 史开泉. 函数 P-集合[J]. 山东大学学报：理学版，2011，46(2)：62-69

[6] Shi Kai-quan. Function P-sets[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics，2011，2(4)：281-288

[7] 史开泉. P-集合，逆 P-集合与信息智能融合-过滤辨识[J]. 计算机科学，2012，39(4)：1-13

[8] 赵树理，吴松丽，史开泉. 内 P-推理信息恢复与属性潜藏推理发现[J]. 计算机科学，2013，40(4)：209-213

[9] 史开泉. P-集合与它的应用特征[J]. 计算机科学，2010，37(8)：1-8

[10] 史开泉. P-推理与信息的 P-推理发现-辨识[J]. 计算机科学，2011，38(7)：1-9

[11] 林宏康，范成贤，史开泉. 倒向 P-推理与属性剩余发现-应用[J]. 计算机科学，2011，38(10)：189-193

[12] 李豫颖，范成贤，史开泉. 混合记忆信息与记忆信息筛选[J]. 系统工程与电子技术，2011，38(8)：1824-1828

[13] 汪洋，耿红琴，史开泉. P-集合与动态信息的依赖-发现[J]. 系统工程与电子技术，2011(9)：2035-2038

[14] 林宏康，李豫颖，阮群生. 数据依赖与异常数据分离-应用[J]. 计算机科学，2011，38(5)：203-207

[15] Zhang Guan-yu，Li En-zhong. Information gene and identification of its information Knock-out/Knock-in[J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications，2010(2)：308-315

[16] 阎红灿，王坚，刘保相. 基于 P-集合的本体形式背景抽取[J]. 计算机应用研究，2012(6)：2196-2204

[17] Fan Cheng-xian，Lin Hong-kang. P-sets and the Reasoning-Identification of Disaster Information[J]. Journal of Convergence Information Technology，2012，7(1)：337-345

[18] Lin Hong-kang，Fan Cheng-xian. The dual form of P-reasoning and identification of unknown attribute[J]. International Journal of Digital Content Technology and its Applications，2012，6(1)：121-131

[19] Lin Rong，Fan Cheng-xian. P-sets and identification of inward-Convergence information [J]. An International Journal of Convergence Information Technology，2012，7(7)：157-164

[20] Lin Hong-kang，Li Yu-ying. P-sets and its P-separation theorems [J]. An Intemational Joumal Advances in Systems Science and Applications，2010，10(2)：209-215

(上接第 209 页)

因此，SPindex 主要是适用于查询区间分散的情况或者是查询区域集中于右方的情况。这些都是需要改进之处，另外还将另文讨论 SPindex 的插入、删除算法以及结合时态信息的整合机制。

参考文献

[1] 郭薇，郭菁，胡志勇. 空间数据库索引技术[M]. 上海：上海交通大学出版社，2006

[2] Bentley J L. Multidimensional Binary Search Trees used for Associative searching[J]. Communication of the ACM，1975，18(9)：509-517

[3] Bentley J L. Multidimensional Binary Search Trees in Database Application[J]. IEEE Transactions on Software Engineering，1979，5(4)：333-340

[4] Robinson J T. The K-D-B-tree：a search structure for large multidimensional dynamic indexes[C]// Proceedings of the 1981 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. New York：ACM，1981：10-18

[5] Lomet D D B，Salzberg B. The HB-Tree：A Multiattribute Indexing Method with Good Guaranteed Performance[J]. ACM Trans Database Syst，1990，15(4)：625-658

[6] Samet H. The Quadtree and Related Hierarchical Data Structures[J]. ACM Comput Surv，1984，16(2)：187-260

[7] Guttman A I. R - Trees：A Dynamic Index Structure for Spatial Searching[C]// SIGMOD Conference. 1984：47-57

[8] 叶小平，郭欢，汤庸，等. 基于相点分析的移动数据索引技术[J]. 计算机学报，2011，34(2)：256-274

[9] 叶小平，陈瑞鑫，周旋珍，等. 移动对象索引 ST-tree[J]. 华南师范大学学报：自然科学版，2014，46(3)：44-48

[10] 叶小平，汤庸，林衍崇，等. 时态拟序数据结构研究及应用[J]. 软件学报，2014，25(11)：2587-2601