

# 基于聚度的 PSO 参数分析

窦全胜<sup>1,2</sup> 史忠植<sup>2</sup> 姜平<sup>1</sup> 李国江<sup>1</sup>

(山东工商学院计算机科学与技术学院 烟台 264005)<sup>1</sup> (中国科学院计算技术研究所 北京 100080)<sup>2</sup>

**摘要** 对 PSO 方法中粒子运行规律给出较为完整的分析,考察随机性对粒子运动过程的影响,提出聚度的概念,并通过粒子的聚度考察粒子在实际运行条件下的分布情况,给出更加具体的参数设置区间,提出一种粒子在运动过程中的速度补偿策略,对于一些参数设置可以通过该策略提高搜索性能,该策略对实际应用中选择和调整 PSO 算法参数有较强的指导意义。

**关键词** 粒子群优化,聚度,速度补偿策略

**中图分类号** TP301.6 **文献标识码** A

## Analysis about Parameters Selection of PSO Based on Cluster-degree

DOU Quan-sheng<sup>1,2</sup> SHI Zhong-zhi<sup>2</sup> JIANG Ping<sup>1</sup> LI Guo-jiang<sup>1</sup>

(School of Computer Science and Technology, Shandong Institute of Business and Technology, Yantai 264005, China)<sup>1</sup>

(Key Laboratory of Intelligent Information Processing, Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)<sup>2</sup>

**Abstract** The particle's trajectory of PSO was fully analyzed in this paper, the influence of random parameters on particle's trajectory was discussed, the concept of cluster-degree was put forward and distribute status of particle with different cluster-degree was studied. The reasonable parameters setting range based on cluster-degree was proposed, at the same time, reinforce strategy of particle's velocity was proposed in order to improve performance of PSO under some condition. So this paper is helpful for the choosing and adjustment of PSO parameters in practical application.

**Keywords** Particle swarm optimization, Cluster-degree, Velocity reinforce strategy

## 1 引言

粒子群优化 (Particle Swarm Optimization, PSO) 方法是由 Kennedy 和 Eberhart 于 1995 年提出的一种演化计算技术<sup>[1,2]</sup>, 广泛应用于各类优化问题<sup>[3-7]</sup>。在解决优化问题上,问题的潜在解被视作搜索空间上的一个“粒子”,用三元组  $(x_i, v_i, p_i)$  表示。粒子下一步位置由以下公式确定:

$$v_{i+1} = wv_i + c_1 r_1 (p_i - x_i) + c_2 r_2 (p_g - x_i)$$

$$x_{i+1} = x_i + v_{i+1}$$

式中,  $x_i$  表示粒子当前的位置,  $v_i$  表示粒子当前速度,  $p_i$  为粒子  $i$  经过的最好位置,  $p_g$  表示的是群体中所有粒子经过的最好位置;  $c_1, c_2$  为正常数,  $r_1, r_2$  为  $[0, 1]$  正态分布的随机数;  $w$  为惯性参数。本文对粒子在真实环境下的运行状态进行了深入分析,提出“聚度”的概念,以揭示粒子运行过程中的分布情况,并根据聚度给出了更加具体的粒子参数设置范围,这对实际应用中 PSO 算法参数的选择和调整有较强的指导意义。

## 2 粒子的分布特征

文献[8-12]已经证明了:当随机数  $r_1, r_2$  取其数学期望

时,粒子最终将收敛到点  $u = (c_1 p_i + c_2 p_g) / (c_1 + c_2)$  上。在这一结果的基础上,我们考察粒子的分布特征。在许多研究和应用中,通常取  $w = 0.729, c_1 = c_2 = 1.49445$ , 这组参数使 PSO 在大部分试验中取得了较佳的搜索效果,考察在此参数设置下粒子的分布情况。令  $x_{t0}, x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tT}$  表示粒子  $x_i$  在时间  $T$  内所经过的所有位置,将区间  $[-10 \times |p_g - p_i|, 10 \times |p_g - p_i|]$  划分成 200 个相等的小区间,每个小区间的距离是  $\frac{|p_g - p_i|}{10}$ 。图 1 中有两条曲线,其中一条反映的是在上述参数设置下每个小区间内粒子的平均个数,另一条则是以  $u = (c_1 p_i + c_2 p_g) / (c_1 + c_2)$  为中心,  $\sigma = 1.4124 \left( \frac{|p_g - p_i|}{2} \right)$  为方差的正态分布曲线。

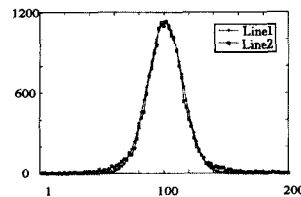


图 1 粒子分布曲线与正态分布曲线

到稿日期:2010-11-07 返修日期:2011-02-24 本文受国家自然科学基金(61035003,60933004,60970088,61072085,60903141),国家 973 项目(2007CB311004),山东省中青年科学家奖励基金(2009BSB01383)资助。

窦全胜(1971-),男,博士,副教授,主要研究方向为智能科学、数据挖掘及相关方法在电力系统中的应用, E-mail: douqs@ics.ict.ac.cn; 史忠植(1941-),男,研究员,博士生导师,主要研究方向为智能科学、人工智能、神经计算、认知科学等; 姜平(1979-),男,讲师,主要研究方向为人工智能、生物信息计算等; 李国江 男,硕士生,主要研究方向为人工智能等。

对于不同参数,粒子也表现出了以上分布规律。所不同的是:不同的参数设置对应于正态分布的方差是不同的。在同一组参数的前提下, $p_g$ 和 $p_i$ 之间的距离越小,方差越小。 $p_i$ 和 $p_g$ 的每一次变化都意味着搜索区域的变化,此时粒子将在新搜索区域内按原分布规律进行搜索。

对于那些方差过大或发散的参数设置,并不是我们所关心的。这里需要把握的是什么样的参数设置能使粒子保持合理的分布。以下通过粒子的聚度来进行讨论。

### 3 粒子的聚度曲线和基于聚度的收敛性分析

**定义 1** 令  $x_{i0}, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iT}$  表示粒子  $x_i$  在  $w, c_1, c_2$  及  $p_g$  和  $p_i$  条件下时间  $T$  内经历的所有位置,定义  $x_{i0}, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iT}$  关于  $w, c_1, c_2$  的聚度:

$$\kappa = N/TP$$

式中,  $N = \text{num}(X_j \in (L, H)), j=0, 1, \dots, T, L = \min(p_i, p_g), H = \max(p_i, p_g)$  为分布在  $p_i, p_g$  之间粒子的个数,  $P =$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^u e^{-\frac{(t-w)^2}{2\sigma^2}} dt, u = (p_i + p_g)/2, \sigma = \frac{|p_g - p_i|}{2}$$

从定义 1 可以看出,聚度  $\kappa$  的分母部分表示的是  $x_{i0}, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iT}$  在以  $u$  为中心、 $\sigma$  为方差时,期望落在  $p_i, p_g$  之间的粒子个数,聚度  $\kappa$  反映的是在  $w, c_1, c_2$  下实际落在  $p_i, p_g$  之间的粒子个数和这个期望值的比。

当  $T$  值充分大时,  $\kappa$  值仅与参数  $w, c_1, c_2$  有关。表 1 说明了一组参数设置下  $p_i, p_g$  的改变与  $\kappa$  值的变化情况。在同一组参数设置下,当  $p_i, p_g$  发生变化时,“聚度”值稳定。

表 1 相同参数、不同  $p_i, p_g$  下粒子的聚度

$p_i, p_g$	$w=0.7, c_1=1.4, c_2=1.4$					Average
	1	2	3	4	5	
$p_i = -10,$ $p_g = 10$	0.95896	0.96461	0.96970	0.95014	0.96890	0.96246
$p_i = -0.1,$ $p_g = 0.1$	0.96334	0.96490	0.96294	0.95899	0.95483	0.96100
$p_i = -0.001,$ $p_g = 0.001$	0.96775	0.95417	0.96214	0.95888	0.95950	0.96049

由于聚度与  $p_i, p_g$  无关,因此可以通过聚度与算法搜索性能的关系来确定  $w, c_1, c_2$  的合理范围。通常情况下,什么样的聚度能够获得最好的结果,对于不同的问题会有所不同,但一点可以肯定:如果粒子的聚度过小,会使粒子漫布到整个搜索空间,不能形成有效的搜索;反之,如果粒子的聚度过大,就会使粒子集中分布在群体最优和个体最优间之间,形成早熟。图 2 给出了聚度  $\kappa=0.5$  和  $\kappa=1$  的两条曲线,一般情况下,参数设置应使聚度保持在这一范围内。

图 2 中,黑色三角形区域是文献[8-10]给出的使粒子收敛的参数设置范围。可以看出,当  $w < -0.5$  时,  $k=1$  和  $k=0.5$  的两条曲线与  $k=2w+2$  基本重合,说明在这一区间内寻找合适的参数是相对困难的。

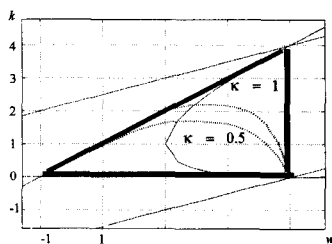


图 2 合理的聚度范围

聚度从一定意义上反映了粒子在搜索过程中的分布情况。只有合理的参数设置使粒子的聚度值不是特别大和特别小时,PSO 方法才有可能搜索到最好的结果。这里还要说明的是,聚度不会随群体最优和全局最优动态改变而变化,不合理的聚度在  $p_i, p_g$  固定不变的前提下造成粒子分布的分散或过度集中。当  $p_i, p_g$  动态变化时,更不可能得到理想的搜索效果。因此,设置合理的参数,使粒子的聚度值合理,是 PSO 方法达到较好效果的必要条件。

PSO 在实际运行条件下,由于  $p_i, p_g$  动态变化,此时不仅要考察聚度值是否合理,还要考虑粒子收敛的速度是否合理。在 PSO 方法中,粒子之间是通过修正全局最优  $p_i$  来相互影响的。若粒子运行速度收敛得过快,直接造成粒子的修正量  $v$  迅速减小,从而使得群体的全局最优  $p_g$  和每个粒子个体最优  $p_i$  之间的距离较小。根据上面的分析,我们知道粒子是以  $u = (c_1 p_i + c_2 p_g)/(c_1 + c_2)$  为中心、 $\sigma = \alpha \left( \frac{|p_g - p_i|}{2} \right)$  为方差呈正态分布,而  $p_g$  和  $p_i$  之间距离较小,又会进一步造成修正量  $v$  的减小。即使  $p_g$  和  $p_i$  之间能够有合理聚度,粒子速度  $v$  的过快衰减也会造成  $p_g$  和  $p_i$  的迅速接近而形成早熟现象。因此,要使 PSO 方法得到理想的搜索效果,需要两个条件保证:1)粒子要保持合适的聚度;2)保持合理聚度的同时,粒子的速度  $v$  不能衰减得过快。粒子速度的衰减由  $\sqrt{w}$  决定<sup>[8]</sup>,其中  $0 < w < 1$ ,当  $w$  值相对较大时,粒子速度衰减比较慢,可以在搜索空间内进行相对充分的搜索。反之,若  $w$  的值相对较小,粒子速度衰减比较快,容易发生早熟。

以下实验证明了上述分析。采用文献[11]中所述的 23 个 benchmark 问题进行实验,表 2 列出了其中 4 个函数在不同聚度参数条件下 10 次实验的平均结果。在实验中,为了验证相同聚度下速度衰减造成的影响,在同一组参数下,还采用了速度补偿策略。即当迭代次数和粒子速度分别小于一个阈值时,重新为粒子赋予一个新速度,来弥补速度衰减过快的问题。

第一组参数  $w=0.729, c_1=1.49445, c_2=1.49445$ ,大量实验已经验证了这组参数的搜索效果比较理想,其聚度值  $k=0.8280$ 。第二组参数到第六组参数聚度值与第一组参数聚度值接近(聚度是一个统计量,同一组参数每一次计算的聚度值接近但并不相同,实验中的聚度值是 10 次聚度计算的平均值),第二组参数和第三组参数的  $w$  值分别为 0.8 和 0.9,由于粒子收敛的速度是由  $\sqrt{w}$  决定<sup>[8]</sup>,在这两组参数设置的条件下,粒子速度不会快速衰减,而聚度与第一组参数相近。从实验数据上可以看出,这两组参数同样取得了理想的搜索效果。这表明在粒子速度  $v$  的衰减速率合理的前提下,相同聚度值的参数搜索效果相近。在这个分析结果指导下,我们在  $w > 0.729$  区间内找到了许多同样使 PSO 方法保持较好搜索效果的参数,这里不一一列举。

第四组参数和第五组参数的聚度值与第一组参数的相近,但  $w$  的值相对较小,粒子速度衰减较快。所得到的搜索结果并不理想。采用如下速度补偿策略:当迭代次数  $t < \frac{2}{3}$

$T$ ,且  $\sum_{i=1}^{dim} |v_i| < 1e-4$  时,重新设置  $v_i$ ,令  $v_i = \text{rand}(0,1)$ ,其中  $T$  为最大迭代次数,  $v_i$  是速度向量  $v$  的第  $i$  维的分量。在这两组参数设置下使用了速度补偿策略后,同样得到了较好的搜索效果。但搜索效率较第一组参数稍低。

表2 不同聚度正常运行和速度补偿策略下10次实验的平均结果

No.	参数	$\kappa$	速度补偿	$f_1$	$f_5$	$f_9$	$f_{11}$
				Dims=30, Iters=2000	Dims=30, Iters=2000	Dims=30, Iters=2000	Dims=30, Iters=2000
1	$w=0.729$ $c_1=1.49445$ $c_2=1.49445$	0.8021	No	<1e-8	32.23	<1e-8	<1e-8
	Yes		<1e-8	21.44	<1e-8	<1e-8	
2	$w=0.8$ $c_1=1.2784$ $c_2=1.2784$	0.801	No	<1e-8	30.24	<1e-8	<1e-8
	Yes		<1e-8	20.98	<1e-8	<1e-8	
* 3]4	$w=0.9$ $c_1=0.8948$ $c_2=0.8948$	0.801	No	293.37	2049863	44.1035	123.652
	Yes		<1e-8	321.872	3.5e-8	<1e-8	
5	$w=0.2$ $c_1=1.8711$ $c_2=1.8711$	0.801	No	141.69	1980.23	33.84	119.37
	Yes		<1e-8	31.56	2.7e-4	<1e-5	
6	$w=0.729$ $c_1=1.9891$ $c_2=1.9891$	0.5	No	1524.25	20123.14	345.23	895.21
	Yes		926.35	18535.35	254.36	763.21	
7	$w=0.2$ $c_1=2.1851$ $c_2=2.1851$	0.5	No	2564.35	24536.29	452.35	856.21
	Yes		2487.33	20336.76	266.87	795.54	
8	$w=0.729$ $c_1=1.2995$ $c_2=1.2995$	1.2	No	254.13	984.65	86.35	231.42
	Yes		23.14	206.89	46.25	10.21	
9	$w=0.2$ $c_1=1.6965$ $c_2=1.6965$	1.2	No	354.22	1095.35	77.56	289.14
	Yes		87.36	334.66	41.02	14.65	

第六组参数和第七组参数的聚度值为0.5,在正常情况下,结果较差,采用速度补偿之后没有本质提高。这说明当粒子聚度较小时,粒子在搜索空间内分布分散,不能形成有效搜索,速度补偿并不能解决粒子发散的问题,因此搜索效果不能得到改善。

第八组参数和第九组参数的聚度值为1.2,聚度较高。当聚度较大时,粒子分布相对集中,搜索效果不理想。采用速度补偿策略之后,得到的结果虽有一定程度的提高,但依然与最好的搜索结果存在较大差距。是否能找到更合适的补偿策略使聚度偏大参数搜索到理想的结果,还需进一步研究。

上述实验说明,补偿策略在聚度偏大或速度衰减过快的情况下不同程度地提高了PSO的性能,而在聚度过小时无效。粒子参数设置保持合适的聚度,是得到理想搜索效果的必要条件。当聚度合理的前提下,粒子速度 $v$ 衰减的速度也应该在一个合理的范围内。当 $v$ 衰减的速度接近时,相近聚度的参数搜索效果接近。

**结束语** 本文在从前研究的基础上,考察了实际运行条件下随机性对粒子运动过程的影响,提出了聚度的概念,并通过粒子的聚度考察粒子在实际运行条件下的分布情况,指出了合理的聚度范围,给出了更加具体的参数设置区间。同时,提出了一种粒子在运动过程中的速度补偿策略,这种策略在粒子聚度稍大或聚度合理但 $v$ 衰减过快的情况下不同程度地改善了PSO的搜索性能,对实际应用中选择和调整PSO算法参数有较强指导意义。

## 参考文献

[1] Eberhart R C, Kennedy J. A new optimizer using particle swarm theory[C]//Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science. Nagoya, Japan, 1995:39-

43  
[2] Kennedy J, Eberhart R C. Particle Swarm Optimization. IEEE International Conference on Neural Networks[C]// IEEE Service Center. Piscataway, NJ, 1995:1942-1948  
[3] Clerc M. TRIBES-Aparameter Free Particle Swarm Optimizer [EB/OL]. <http://clerc.maurice.free.fr/PSO>, 2002-08-10/2003-10-08  
[4] Salman A. Discrete Particle Swarm Optimization for Heterogeneous Task Assignment Problem[C]//Proceedings of World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics (SCI 2001). Orlando, Florida (USA), July 2001:335-341  
[5] Clerc M. Discrete Particle Swarm Optimization; A Fuzzy CombinatorialBlackBox[EB/OL]. [http://clerc.maurice.free.fr/PSO/Fuzzy\\_Discrete\\_PSO/Fuzzy\\_DPSO.htm](http://clerc.maurice.free.fr/PSO/Fuzzy_Discrete_PSO/Fuzzy_DPSO.htm), 2000-04-01/2003-10-08  
[6] Hirotaka, Yoshida, Kenichi. A particle Swarm Optimization for Reactive Power and Voltage Control Considering Voltage Stability[C]// IEEE International Conference on Intelligent System Applications to Power Systems. Rio de Janeiro, 1999  
[7] Voss M S, Feng X. Arma model selection using particle swarm optimization and AIC criterion[C]//Proceedings of the 15th IFAC Triennial World Congress on Automation Control. Barcelona, Spain, 2002:255-261  
[8] Clerc M. Some math about particle swarm optimization [EB/OL]. <http://clerc.maurice.free.fr/ps0>, 2002-08-10/2003-10-08  
[9] Van den Bergh F. An analysis of Particle Swarm Optimizers [D]. Pretoria: University of Pretoria, 2001  
[10] 李宁, 孙德宝, 邹彤, 等. 基于差分方程的 PSO 算法粒子运动轨迹分析[J]. 计算机学报, 2006, 29(11): 2052-2061  
[11] 窦全胜. 求解优化问题的演化计算方法研究[D]. 长春: 吉林大学, 2005