

关于修正冒泡排序网络的一簇猜想

师海忠 马继勇 牛攀峰 侯菲菲

(西北师范大学数学与信息科学学院 兰州 730070)

摘要 修正冒泡排序网络是互连网络设计中的一个重要的 Cayley 图模型,关于修正冒泡排序网络的一簇猜想如下:对于任意的自然数 $n \geq 3$,修正冒泡排序网络 Y_n 是 i 个边不交的哈密尔顿圈以及 $n-2i$ 个完美对集的并,其中 $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 。证明了当 $i=1,2$ 时,这个猜想是正确的。

关键词 Cayley 图,修正冒泡排序网络,哈密尔顿圈

One Variety Conjectures of Modified Bubble Sort Network

SHI Hai-zhong MA Ji-yong NIU Pan-feng HOU Fei-fei

(College of Mathematics and Information Science Northwest Normal University, Lanzhou 730030, China)

Abstract Modified bubble sort networks are important cayley graphs model in networks design. One variety conjectures of modified bubble sort networks were proposed as follows: for any integer $n \geq 3$, modified bubble sort networks Y_n are a union of i edge-disjoint hamiltonian cycles and $n-2i$ perfect matchings of Y_n , and $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. We proved the conjectures are true for $i=1,2$.

Keywords Cayley graph, Modified bubble sort network, Hamiltonian cycle

1 引言

在并行处理系统中处理机是基于互连网络而相互连接的。对于互连网络拓扑结构及其性质的研究是并行处理系统的一个重要课题。互连网络设计是一个多目标最优化问题,这个目标包括小的网络直径、高连通度、可诊断性、可迁入性、可拓展性、哈密尔顿性等^[1,2]。

互连网络常模型为一个无向图,图的顶点对应处理机,图的边对应网络的通讯连线^[3,4]。星网络,冒泡排序网络和修正冒泡排序网络都是著名的 Cayley 图模型^[5,6],它们都有很强的对称性和递归结构等很好的拓扑结构和性质。关于星网络已有了很广泛的研究^[7,8],关于冒泡排序网络也有了一定的研究^[9-11],但关于修正冒泡排序网络的研究却很少^[12]。

哈密尔顿性是互连网络的一个重要性质。一个图 G 的哈密尔顿圈是指包含图 G 的所有顶点的圈。本文的核心是提出了关于修正冒泡排序网络的一簇猜想:对于任意的自然数 $n \geq 3$,修正冒泡排序网络 Y_n 是 i 个边不交的哈密尔顿圈以及 $n-2i$ 个完美对集的并,其中 $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$;证明了当 $i=1,2$ 时,这簇猜想是正确的。

2 预备知识

定义 1 设 G 是一个有限群,1 是它的单位元, $\Omega = \{g_1,$

$g_2, \dots, g_n\}$ 是 G 的一个生成子集且满足:1) $g_i \in \Omega \Rightarrow g_i^{-1} \in \Omega$, 2) $1 \notin \Omega$ 。Cayley 图是一个简单图,它的顶点集和边集分别如下: $V(\Gamma) = G, E(\Gamma) = \{(g_i, g_j) | g_i^{-1}g_j \in \Omega\}$ 。

定义 2 冒泡排序网络(bubble-sort network)是特殊的 Cayley 图,在 Cayley 图的定义中,令 G 是 n 个符号 $1, 2, \dots, n$ 上的对称群, $\Omega = \{g_i = 12 \dots (i-1)(i+1)i(i+2) \dots n | 1 \leq i \leq n-1\}$,则生成的 Cayley 图称为冒泡排序网络,记为 B_n 。

定义 3 一个对换就是指交换两个数的位置所得的置换。对换图(transposition graph)是一个无环图,它有 n 个顶点,用符号 $1, 2, \dots, n$ 来表示,它的边 (i, j) 对应于一个对换,即在 $1, 2, \dots, n$ 中把 i 和 j 交换得到的置换,我们称这个图为对换图。

定义 4 当对换图为长 $n(n \geq 3)$ 的圈时,该对换图的 Cayley 图称为 n 阶修正冒泡排序网络(modified bubble-sort network),也称为 n 圈网络,记为 Y_n 。

以上定义 1 至定义 4 所用符号均与文献[6]一致。

修正冒泡排序网络 Y_2, Y_3 和 Y_4 ,如图 1 所示。

定义 5 对修正冒泡排序网络 Y_n 采用 i 划分是指固定的顶点的第 i 个位置为数字 k ,记这样划分所得的子图为 $Y_n(i(k))$,其中 $1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n$ 。对修正冒泡排序网络采用 (i, j) 划分是指固定的顶点的第 i 个和第 j 个位置分别为数字 k 和数字 l ,记这样划分所得的子图为 $Y_n(i(k), j(l))$,其中 $1 \leq i, j \leq n, 1 \leq k, l \leq n, i \neq j, k \neq l$ 。由 Y_n 的对称性,令 $i < j$,同时

本文受甘肃省自然科学基金(ZS991-A25-017-G)资助。

师海忠(1962—),男,博士,副教授,主要研究方向为组合优化、互连网络理论、图半群与图语言等, E-mail: haizhong.shi@163.com; 马继勇(1984—),男,硕士生,主要研究方向为组合最优化; 牛攀峰(1985—),男,硕士生,主要研究方向为组合最优化; 侯菲菲(1986—),女,硕士生,主要研究方向为组合最优化。

由冒泡排序网络,修正冒泡排序网络的定义及其划分定义可以得到如下结论:

- ### 3 主要结果

猜想: 对于任意的自然数 $n \geq 3$, 修正冒泡排序网络 Y_n 是 i 个边不交的哈密尔顿圈以及 $n-2i$ 个完美对集的并。

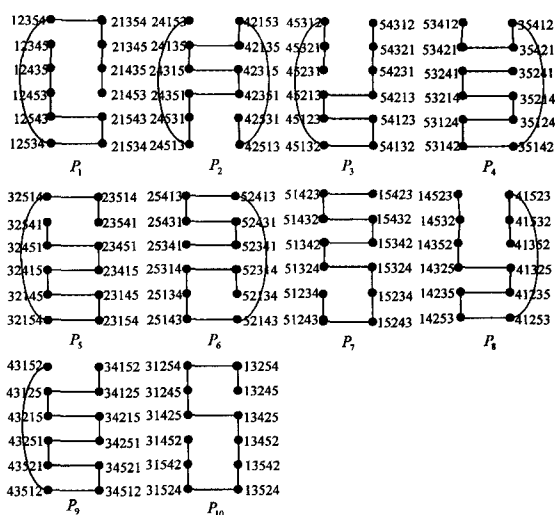
即对于任意的 $1 \leq s < t \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $i=t$ 的猜想总是强于 $i=s$ 的猜想。也就是说, 若当 $i=t$ 时猜想成立, 则当 $i=s$ 时猜想一定成立; 但若当 $i=s$ 时猜想成立, 则推不出当 $i=t$ 时猜想成立。当 $i=1$ 时猜想成立, 说明修正冒泡排序网络 Y_n 是哈密尔顿图, 当 $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 时猜想成立, 说明修正冒泡排序网络 Y_n 可哈密尔顿分解。

引理 1^[4] 对于 k 正则的二部图 G , 图 G 可以分解为不交的 k 个完美对集的并。

(2) Y_4 是边不交的 2 个边不交的哈密尔顿圈的。

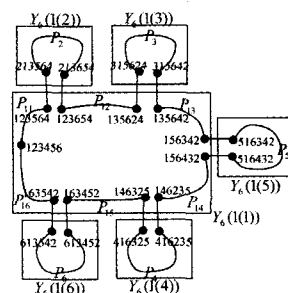
证明:对 Y_5 采用 $(1,5)$ 划分,由定义 5 知,可以得到 10 个子图 $Y_5(1(i,j),5((j,i)))$,其中 $1 \leq i, j \leq 5$, $i < j$, 并且 $i-j \equiv 1(\bmod n)$ 或者 $j-i \equiv 1(\bmod n)$ 。首先,构造 Y_5 的 1 个哈密尔顿圈 H_1 ,使对于每个子图 $Y_5(1(i,j),5((j,i)))$ 的所有顶点在 H_1 中是连续的。哈密尔顿圈 H_1 在 Y_5 各子图中的路如图 2 所示。

• 266 •



引理 4 Y_6 是边不交的 2 个哈密顿圈 H_1 和 H_2 以及 2 个完美对集 M_1 和 M_2 的并。

因此,在各子图 $Y_6(1(i))$ 中可得到形如 Y_5 中的圈 H_1 的圈 H_1^i , 其中 $1 \leq i \leq 6$, 即 $H_1^1 = \langle 123456 - P_{11} - 123564 - 123654 - P_{12} - 135624 - 135642 - P_{13} - 156342 - 156432 - P_{14} - 146235 - 146325 - P_{15} - 163452 - 163542 - P_{16} - 123456 \rangle$, $H_1^2 = \langle 213564 - P_2 - 213654 - 213564 \rangle$, $H_1^3 = \langle 315624 - P_3 - 315642 - 315624 \rangle$, $H_1^4 = \langle 416235 - P_4 - 416325 - 416235 \rangle$, $H_1^5 = \langle 516342 - P_5 - 516432 - 516342 \rangle$, $H_1^6 = \langle 613452 - P_6 - 613542 - 613452 \rangle$ 。如图 3 所示, 可将这 6 个子图的哈密尔顿圈 H_1^i 按图的方式合成 Y_6 的哈密尔顿圈 H_1 。即 $H_1 = \langle 123456 - P_{11} - 123564 - 213564 - P_2 - 213654 - 123654 - P_{12} - 135624 - 315624 - P_3 - 315642 - 135642 - P_{13} - 156342 - 516342 - P_5 - 516432 - 156432 - P_{14} - 146235 - 416235 - P_4 - 416325 - 146325 - P_{15} - 163452 - 163452 - P_6 - 613542 - 613542 - P_{16} - 123456 \rangle$ 。



利用相同的办法,在 Y_6 的各子图 $Y_6(1(i))$ 中可得到形如 Y_5 中的圈 H_1 的圈 H_1^i , 其中 $1 \leq i \leq 6$, 即 $H_1^1 = \langle 123456 - Q_{11} - 126435 - 126453 - Q_{12} - 152346 - 152364 - Q_{13} - 136452 - 136425 - Q_{14} - 164235 - 164325 - Q_{15} - 145623 - 145263 - Q_{16} - 123456 \rangle$, $H_1^2 = \langle 216435 - Q_2 - 216453 - 216435 \rangle$, $H_1^3 = \langle 316452 - Q_3 - 316425 - 316452 \rangle$, $H_1^4 = \langle 415623 - Q_4 -$

415263-415623), $H_2^5 = \langle 512346 - Q_5 - 512364 - 512346 \rangle$, $H_2^6 = \langle 614235 - Q_6 - 614325 - 614235 \rangle$ 。如图4所示,可将这6个子图的哈密尔顿圈 H_i^5 按图的方式合成 Y_6 的哈密尔顿圈 H_2 。

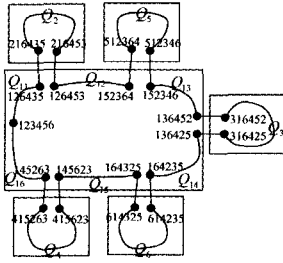


图4 Y_6 中的 H_2

即 $H_2 = \langle 123456 - Q_{11} - 126435 - 216435 - Q_2 - 216453 - 126453 - Q_{12} - 152346 - 512346 - Q_5 - 512364 - 152364 - Q_{13} - 136452 - 316452 - Q_3 - 316425 - 136425 - Q_{14} - 164235 - 614235 - Q_6 - 614325 - 164325 - Q_5 - 145623 - 415623 - Q_4 - 415263 - 145263 - Q_6 - 123456 \rangle$ 。由引理1可得到2个完美对集 M_1 和 M_2 。因而引理成立。

注:在引理4中,由于 Y_6 的子图 $Y_6(1(i))$ 和 Y_5 同构,在子图 $Y_6(1(i))$ 中顶点 $ia_2a_3 \cdots a_n$ 对应 Y_5 中的顶点 $a_2'a_3' \cdots a_n'$,其中,顶点 $a_2'a_3' \cdots a_n'$ 是按照顶点 $ia_2a_3 \cdots a_n$ 中的数字 $a_2, a_3, \cdots, a_n$ 先后顺序。例如,顶点 241563 对应顶点 31452,则 H_1^5 中的路 $P_{11} = 123456 - \cdots - 123564$ 对应 Y_5 中 H_1 的路 $12345 - \cdots - 12453$ 。

引理5 当 $n \geq 5$ 时,对 Y_n 采用1划分,在所得的任意子图 $Y_n(1(i))$ 中,对于子图中的任意一个哈密尔顿圈 H ,圈 H 中必然包含形如 $e = \langle ika_3a_4 \cdots a_n, ika_3'a_4' \cdots a_n' \rangle$ 的边,其中 $1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n$, 且 $i \neq k$ 。

证明:由定义5及其结论可知,对 Y_n 采用1划分,所得的子图 $Y_n(1(i))$ 同构于 B_{n-1} ,由冒泡排序网络 B_n 的定义易知,在子图 $Y_n(1(i))$ 中形如 $u = ika_3a_4 \cdots a_n$ 的顶点的个数为 $m = (n-2)!$,又因为 $n \geq 5$,则 $m = (n-2)! \geq (5-3)! = 6$,即 $m \geq 6$ 。由于圈 H 为子图 $Y_n(1(i))$ 的哈密尔顿圈,假设圈 H 中不包含形如 $e = \langle ika_3a_4 \cdots a_n, ika_3'a_4' \cdots a_n' \rangle$ 的边,并且令 $u_1 = ika_3a_4 \cdots a_n, u_2 = ika_3'a_4' \cdots a_n', u_3 = ika_3''a_4'' \cdots a_n''$,且圈 H 先后经过 u_1, u_2, u_3 ,由于圈 H 不包含边 $e' = \langle u_1, u_2 \rangle$,则 $H = \cdots - u_1 - \cdots - u_2 - \cdots - u_3 - \cdots$,要使圈 H 由 u_2 到达 u_3 ,则必经过边 $e'' = \langle u_2, u_3 \rangle$,否则与圈 H 是子图 $Y_n(1(i))$ 的哈密尔顿圈相矛盾。所以假设不成立。即圈 H 中必然包含形如 $e = \langle ika_3a_4 \cdots a_n, ika_3'a_4' \cdots a_n' \rangle$ 的边,其中 $1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n$, 且 $i \neq k$ 。

引理6^[13] 当 $n \geq 3$ 时,修正冒泡排序网络 Y_n 是边偶泛圈的。

由引理6可知,当 $n \geq 3$ 时,修正冒泡排序网络 Y_n 中存在哈密尔顿圈,又由引理4可知,当 $i=1$ 时,猜想成立。即当 $n \geq 3$ 时,修正冒泡排序网络 Y_n 是边不交的一个哈密尔顿圈和 $n-2$ 个完美对集的并。

定理 当 $n \geq 4$ 时,修正冒泡排序网络 Y_n 是边不交的两个哈密尔顿圈 H_1 和 H_2 和 $n-4$ 个完美对集的并。

证明:当 $n=3$ 时,显然, $i \leq \lfloor \frac{3}{2} \rfloor$, i 只能为1,因此要求

$n \geq 4$ 。由引理2,引理3,引理4知,当 $n=4, 5, 6$ 时,定理成立,下证当 $n > 6$ 时,定理成立。

假设对于任意的小于 $n > 6$ 的自然数 t ,定理成立,下证当 $t=n$ 时定理成立。

首先,对 Y_n 采用1划分,得到 n 个子图 $Y_n(1(i))$,其中 $i=1, 2, \cdots, n$ 。由归纳假设及定义5的结论知, $Y_n(1(i))$ 与 B_{n-1} 同构,由于对于 $n=5$ 和 $n=6$ 时,把由 $(1, n)$ 置换生成的边都作为了一个完美对集,由其证明过程可知,对于 Y_{n-1} 中的边不交的两个哈密尔顿圈可不包含由 $(1, n)$ 置换所生成的边,即 B_{n-1} 中存在两个边不交的哈密尔顿圈 H_1^* 和 H_2^* ,因此,在任意一个子图 $Y_n(1(i))$ 中存在该子图边不交的两个哈密尔顿圈 H_1^i 和 H_2^i 。由引理5可知,对于子图 $Y_n(1(1))$ 中的哈密尔顿圈 H_1^1 和 H_2^1 ,其必然包含形如 $e_k = \langle 1ka_3a_4 \cdots a_n, 1ka_3'a_4' \cdots a_n' \rangle$ 的边,其中 $k=2, 3, \cdots, n$,由于 H_1^1 之间彼此同构, H_2^1 之间也彼此同构,并由引理3的证明可知,存在某条边 $e_{k1}^1 \in H_1^1$,其中 $e_{k1}^1 = \langle u_k^1, v_k^1 \rangle$, $u_k^1 = 1ka_3a_4 \cdots a_n, v_k^1 = 1ka_3'a_4' \cdots a_n'$,使得 $e_{k1}^1 = \langle u_k^1, v_k^1 \rangle$, $u_k^1 = k1a_3a_4 \cdots a_n, v_k^1 = k1a_3'a_4' \cdots a_n'$,则 $e_{k1}^1 \in H_1^1 \in Y_n(1(k))$,其中 $k=2, 3, \cdots, n$ 。对于子图 $Y_n(1(1))$ 和子图 $Y_n(1(k))$,去掉边 e_{k1}^1 和 e_{k1}^1 ,添加边 $\langle u_k^1, u_k^{1'} \rangle$ 和 $\langle v_k^1, v_k^{1'} \rangle$,则可将子图 $Y_n(1(1))$ 和子图 $Y_n(1(k))$ 各自的哈密尔顿圈 H_1^1 和 H_1^k 合成这两个子图顶点的并在 Y_n 中生成的子图的一个哈密尔顿圈,让 k 取遍2到 n 的 $n-1$ 个自然数可将 n 个子图各自的哈密尔顿圈 H_1^i 合成 Y_n 的一个哈密尔顿圈 H_1 。同理也可将 n 个子图各自的哈密尔顿圈 H_2^i 合成 Y_n 的一个哈密尔顿圈 H_2 。由归纳假设可知, H_1 和 H_2 彼此之间边不交,因此,在 Y_n 中存在边不交的两个哈密尔顿圈 H_1 和 H_2 ,对于 Y_n ,将 H_1 和 H_2 的边从 Y_n 去掉,显然所得的子图是 $n-4$ 正则的连通二部图。由引理1知,该子图可分解为不交的 $n-4$ 个完美对集的并,因此对于任意的 $n > 6$,修正冒泡排序网络 Y_n 是边不交的两个哈密尔顿圈 H_1 和 H_2 和 $n-4$ 个完美对集的并。

综上所述,当 $n \geq 4$ 时,修正冒泡排序网络 Y_n 是边不交的两个哈密尔顿圈 H_1 和 H_2 和 $n-4$ 个完美对集的并。

结束语 提出了关于修正冒泡排序网络的一簇猜想,证明了当 $i=1, 2$ 时,猜想成立;当 $i \geq 3$ 时,猜想成立的证明以及修正冒泡排序网络的其它性质有待于进一步研究。

参考文献

- [1] Bondy J A, Marty U S R. Graph Theory[M]. London: Springer, 2008
- [2] 师海忠. 互连网络的代数环模型[D]. 北京: 中国科学院数学与系统科学研究院应用数学研究所, 1998
- [3] 徐俊明. 组合网络理论[M]. 北京: 科学出版社, 2007
- [4] 高随祥. 图论与网络流理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009
- [5] Cayley A. The theory of graphs, graphical representation. Mathematical Paper[J]. Cambridge, 1895, 10: 26-28
- [6] 师海忠, 路建波. 关于互连网络的几个猜想[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(31): 112-115
- [7] Akers S B, Krishnamurthy B. A group-theoretic model for symmetric interconnection network[J]. IEEE Transaction on Computers, 1989, 38(4): 555-565

(下转第275页)

时间的增大而迅速提升,这是因为 802.11Ext 的传输协作模块和接收协作模块一同发挥作用。

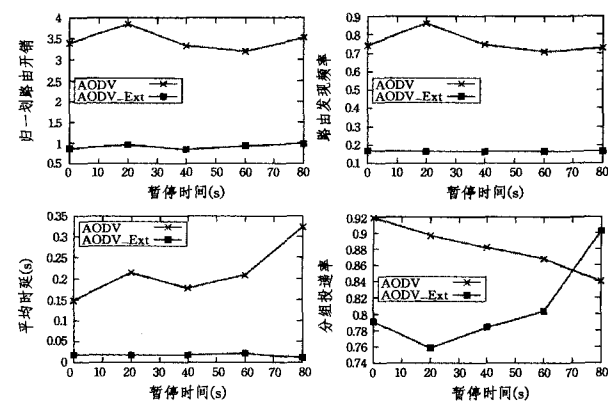


图3 不同节点暂停时间下的仿真结果(场景3)

4)不同的发包速度
图4结果显示,随着发包速度的递增,网络负载逐渐加重,网络中数据报文碰撞和拥塞的概率增大,导致 AODV 协议各项评价指标有不同幅度的降低。特别是分组投递率,在 802.11a Mac 路由下出现大幅下滑,甚至出现了近一半的数据包传输丢失的情况;相反在 802.11Ext 接入方式下分组投递率保持相对平稳,无大幅波动现象,这跟 802.11Ext 协议的物理层跟踪技术是分不开的。

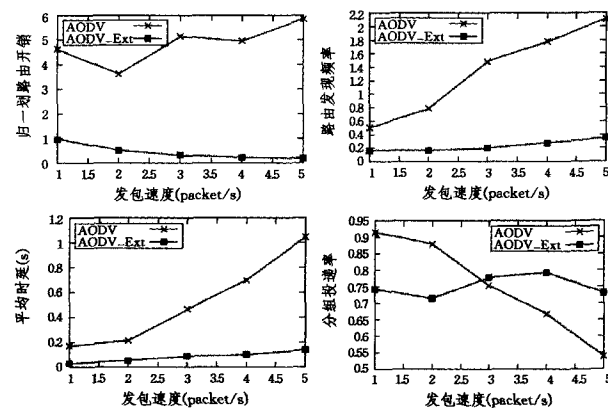


图4 不同节点发包速度下的仿真结果(场景4)

结束语 本文使用网络仿真器 NS-2.33,在多种测试场景中 对 AODV 协议分别采用 802.11a 和 802.11Ext 两种不同的 Mac 层接入方式进行了性能分析。实验结果表明,802.11Ext 具有明显的优势特点。在这个模型中,帧捕获能力是很重要的一个特性,它允许接收端区分 Mac 帧的帧头和数据部分,使用不同的标准来处理它们,这种技术在提高通信模型的稳定性方面作用明显。同时,NS-2 中 WirelessPhyExt 和 802.11Ext 可以支持多种调制机制,并可为每个帧设置不同的编码方式,这一优点可以直接促使 Mac 帧在传输过程中拥有更短的传输延时,更适合移动网络。

参 考 文 献

[1] 陈荣,江虹,杨欢. Ad Hoc 网络路由协议性能对比仿真研究[J]. 计算机工程与设计,2008,29(18):4672-4675

[2] Perkins C E, Royer E M. Ad Hoc on-demand distance vector routing [C]//Proceedings of the 1999 IEEE Workshop on Mobile Computing Systems and Applications. Washington, DC: IEEE Computer Society,1999:90-100

[3] Perkins C E, Royer E M. Ad-hoc on-Demand Distance Vector Routing[C]//WMCSA'99. IEEE, Feb. 1999:90-100

[4] Chen Q, et al. Overhaul of IEEE 802.11 modeling and simulation in NS-2 [C]//Proceedings of the 10th ACM Symposium on Modeling Analysis and Simulation of Wireless and Mobile Systems. New York, ACM Press,2007:159-168

[5] University of Southern California. The network simulator-ns-2 [EB/OL]. <http://www.isi.edu/nsnam/ns/>,2009-08-15

[6] 柯志亨,程荣祥,邓德隽. NS2 仿真实验——多媒体和无线网络通信 [M]. 北京:电子工业出版社,2009

[7] 王鲁光,贾智平,李新. AODV 和 AOMDV 路由协议性能分析与比较[J]. 计算机应用,2010,30(3):740-744

[8] 刘庆邦,周燕,喻其财. IEEE 802.11 用于 Ad hoc 网络的性能问题及改进方法[J]. 计算机与信息技术,2010

[9] 王卫疆,李强,陈芳信. IEEE 802.11 速率自适应 Ad Hoc 网络跨层路由研究[J]. 空军雷达学院学报,2008:1673-8691

(上接第 267 页)

[8] Lakshmivarahan S, Jwo J-S, Dhall S K. Symmetry in interconnection networks based on Cayley graphs of permutation groups: A survey[J]. Parallel Computing,1993,19:361-407

[9] Araki T, Kikuchi Y. Edge-bipancyclicity and edge-fault-tolerant bipancyclicity of bubble-sort graphs[J]. Information Processing Letters,2006,100:52-59

[10] Araki T, Kikuchi Y. Hamiltonian laceability of bubble-sort graphs[J]. Information Sciences,2007,177:2679-2691

[11] Shi Hai-zhong, Niu Pan-feng. Hamiltonian decomposition of

some interconnection networks[A]//Proceed of the 3th Annual International Conference on Combinatorial Optimization and Applications[C]. Berlin: Springer,2009:231-237

[12] 马继勇,师海忠,牛攀峰. 低维修正冒泡排序网络一个猜想的证明[J]. 甘肃科学学报,2011,23(1):57-60

[13] 师海忠,马继勇,牛攀峰. 修正冒泡排序网络的边偶泛圈性[J]. 数学的实践与认识,2011,41(8):208-216

[14] Shi Hai-zhong, Niu Pan-feng, Lu Jian-bo. One conjecture of bubble sort graphs