

增广 Lagrange 函数优化算法在稀疏信号重构问题中的应用

杨俊杰 刘海林

(广东工业大学应用数学学院 广州 510006)

摘要 针对稀疏信号恢复的 l^p 优化模型($0 < p \leq 1$), 提出了一种可行稳健的增广 Lagrange 函数优化算法。该算法通过构造精确罚函数的方法, 设置有限的增广因子参数, 有效地避免了类似于传统 FOCUSS 迭代算法中出现的计算病态性问题, 从而极大提高了信号恢复的精确度。为解决大规模的信号重构问题, 还引入了共轭梯度法, 以促进算法加速收敛。最后, 仿真结果表明, 改进型的增广 Lagrange 函数优化算法较大幅度提升了稀疏信号重构的能力。

关键词 稀疏信号重构, l^p 优化模型, FOCUSS 算法, 增广 Lagrange 函数优化算法

中图分类号 TP18

文献标识码 A

Application of Augmented Lagrange Optimization Algorithm to the Sparse Signal Reconstruction Problem

YANG Jun-jie LIU Hai-lin

(Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract To solve the problem of finding sparse solutions from l^p optimization model($0 < p \leq 1$), this paper presented a kind of novel robust approach based on the augmented Lagrange optimization algorithm. This method introduces precise penalty function by setting limited value of augment factor to enhance the precision of signal recovery, which also avoids the problem of ill-condition computation happened in traditional FOCUSS algorithm. For dealing with large scale problem, Conjugate Gradient method was cooperated with the augmented Lagrange optimization algorithm to accelerate the convergence speed. Finally, computer simulations illustrate the performance on strengthening the recovery ability of signal.

Keywords Sparse signal reconstruction, l^p optimization model, FOCUSS, Augmented Lagrange optimization algorithm

1 引言

近些年来, 利用欠定性方程理论将有限数据样本进行稀疏信号重构的问题成为了信号处理研究的热门话题。由 Donoho^[3] 等人提出的压缩感知理论表明: 只要信号是可压缩或者具有稀疏转化性质, 就可以通过与观测矩阵不相关的变换基矩阵将观察的高维信号投影到一个低维空间上, 然后利用求解相应的优化模型就可从该低维空间中以高概率恢复出源信号。鉴于该理论在信号压缩恢复方面上具有不可比拟的优势, 本文重点讨论如何应用压缩感知理论来解决稀疏信号重构问题。

稀疏信号重构模型可以表达为:

$$X = AS \quad (1)$$

式中, $X = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T \in R^m$ 是 m 维的观测信号向量, $A = [a_1 \dots a_n] \in R^{m \times n}$ 为已知的变换基矩阵, $S = [s_1 \dots s_n]^T \in R^n$ 则为 n 维稀疏源信号向量, 源信号个数 n 远远大于观察信号的个数 m 。稀疏信号重构问题就是根据模型(1), 在已知 A 和 X 的情况下求解欠定性方程组恢复出源信号 S 。

如果仅仅依靠观察信号向量 X 与混叠基矩阵 A 的信息, 从模型(1)中获得的源信号 S 的解将有无穷多个, 这对于实际应用来说是毫无价值的, 但现实中信号所具有的稀疏性质

为信号重构带来了可能。基于信号稀疏性的前提假设, 用于信号重构不同类型的优化模型被提了出来: 首先由 Donho^[3] 本人提出的构建最小化 l^1 范数优化模型, 通过求解线性规划问题进行稀疏信号的恢复。但是就大规模的问题而言, 线性规划的方法在运算时间上花费较长。基于 l^1 范数的最小二乘法^[2]可以用于大规模问题的求解, 但是信号的稀疏性必须事先知道, 这容易造成约束条件设置的困难。

另外一种主要的途径就是构造 l^p 模优化模型($0 < p \leq 1$), 即通过非线性优化目标将约束目标转化为无约束问题进行求解。由 Gorodnitsky 等^[9]提出来的 FOCUSS(Focal Underdetermined System Solver) 算法对于信号重构是一种有效实用的方法, 它不需要增加约束参数的设置, 同时计算复杂性低, 适合于大型问题的求解。当然 FOCUSS 算法也存在着欠缺的地方, 比如该算法在收敛迭代时容易出现计算病态性, 抗噪声的能力也较差。

基于以上的分析, 本文尝试通过运用增广 Lagrange 函数法求解 l^p 模优化模型来改善 FOCUSS 算法, 通过构造精确罚函数的方法以及设置合理的增广因子, 推导出一种改善型的迭代公式, 避免了 FOCUSS 算法中出现的计算病态性问题。同时采用共轭梯度法加快算法迭代收敛的速度, 综合得到一种具有更高恢复精确度的信号重构算法。

到稿日期: 2010-11-20 返修日期: 2011-03-01 本文受国家自然科学基金(60974077), 广东省自然科学基金(10251009001000002)资助。

杨俊杰(1985-), 男, 硕士生, 主要研究方向为盲信号分离; 刘海林(1963-), 男, 博士后, 教授, 主要研究方向为无线网络优化、盲源分离、智能计算, E-mail: hlliu@gdut.edu.cn(通信作者)。

2 改善型增广 Lagrange 函数优化算法

2.1 基于 l^p 模约束的 FOCUSS 方法简介

FOCUSS 算法的目标就是将解能量局部聚焦在为数不多的几个源信号上而让其他信号取值为零,从而实现信号的稀疏化。稀疏信号重构问题可用如下的 l^p 优化模型($0 < p \leq 1$)表示。

$$\min J(s) = \sum_{i=1}^n |s_i|^p \quad (2)$$

$$s, tX = AS$$

Rao 等人^[4]通过构造 Lagrange 函数的方法将该约束优化模型转化为无约束优化问题:

$$L(S, \lambda) = \sum_{i=1}^n |s_i|^p + \lambda^T (AS - X) \quad (3)$$

经过数学推导可以得到最终的求解公式:

$$S = \Pi^{-1}(S) A^T (A \Pi^{-1}(S) A^T)^{-1} X \quad (4)$$

式中, $\Pi^{-1}(S) = \text{diag}(|s_1|^{2-p} \cdots |s_n|^{2-p})$ 。式(4)是一个关于 S 的隐式方程,因此可以通过迭代的方式得到方程解:

$$S^{(k+1)} = \Pi^{-1}(S^{(k)}) A^T (A \Pi^{-1}(S^{(k)}) A^T)^{-1} X \quad (5)$$

不妨记式中的对称矩阵 H_k 为 $A \Pi^{-1}(S^{(k)}) A^T$, 这就是 FOCUSS 算法中的信号重构迭代公式。由于 l^p 优化模型的目标就是恢复出具有充分稀疏的信号,因此迭代式(6)中的对角矩阵 $\Pi(S^{(k)})$ 随着算法的迭代会变得愈加稀疏,这势必会加重矩阵 H_k 的病态程度,造成计算上的困难。特别是针对带噪声的欠定稀疏信号模型,FOCUSS 算法对此类问题的处理往往表现不佳,恢复精度较低。

尽管 FOCUSS 算法存在着上述的欠缺,但是该算法在实际应用中被证明是一种行之有效的方法技术,因此很多学者针对 FOCUSS 算法的缺陷提出了许多的改进方法。对 FOCUSS 算法的改进主要分为两种方向:一种是通过奇异值或者正则化手段^[8]改善上述矩阵求逆的特性;另一种则是利用最优化的方法缩短矩阵 H_k 求逆的运算时间^[7],加速算法的收敛速度。

2.2 应用增广 Lagrange 函数法求解 l^p 优化模型

本文引入增广 Lagrange 函数法来求解 l^p 优化模型。增广 Lagrange 方法^[6]也称为乘子法,是拉格朗日函数的改进型算法。常用的外罚函数法通常要求增广因子逐渐趋于无穷大,这使得目标函数的 Hesse 矩阵趋于病态,造成计算结果的不稳定。而增广 Lagrange 函数法通过构造精确罚函数,对增广因子的选择只需其大于某个正数(阈值)就能保证极小化函数收敛到原来优化问题的最优解。同时乘子法在收敛迭代次数上也明显少于一般的罚函数方法,理论和实际应用表明乘子法是一种求解优化问题的优秀方法。

针对优化模型(2),我们用构造序列无约束优化问题

$$\min F(S, \lambda, C_k) = \sum_{i=1}^n |s_i|^p + \lambda^T (X - AS) + \frac{C_k}{2} \|X - AS\|_2^2 \quad (6)$$

的解来逼近原问题的解。式(6)对增广因子 C_k 的引入可以理解为是对模型中出现的噪声进行惩罚,以期达到噪声抑制的目的。对上式关于 S 求优化梯度方向:

$$\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{\partial J(S)}{\partial S} + A^T \lambda + C_k A^T (AS - X) \quad (7)$$

经过数学推导,可以得到如下方程解的表达式。

$$S = \frac{1}{C_k} \left(\frac{p}{C_k} \Pi(S) + A^T A \right)^{-1} A^T (C_k X - \lambda) \quad (8)$$

由于 $m \ll n$, 因此我们通过矩阵变换来优化迭代方

式^[10]:

$$\left(\frac{p}{C_k} \Pi(S) + A^T A \right)^{-1} A^T = \frac{C_k}{p} \Pi^{-1}(S) A^T \left(\frac{C_k}{p} A \Pi^{-1}(S) A^T + I \right)^{-1} \quad (9)$$

类似于 FOCUSS 算法,我们同样使用迭代的方法来重构源信号:

$$S^{(k+1)} = \frac{1}{C_k} \Pi^{-1}(S^{(k)}) A^T (A \Pi^{-1}(S^{(k)}) A^T + \frac{p}{C_k} I)^{-1} (C_k X - \lambda_k) \quad (10)$$

其中,记

$$G_k = (A \Pi^{-1}(S^{(k)}) A^T + \frac{p}{C_k} I) \quad (11)$$

$$b_k = (C_k X - \lambda_k) \quad (12)$$

从式(11)中可以看出,矩阵 G_k 是一个对称的正定可逆方阵,根据增广 Lagrange 函数法,增广因子 C_k 取值只需取一个递增但是有限的正则实数就可让式(10)收敛到最优解,因此式中的增广因子 C_k 可选择为线性递增的参数:

$$C_{k+1} = C_0 + k^a, a > 0 \quad (13)$$

式中, C_0 与 a 为常数, Lagrange 乘子向量 λ 也通过迭代的方式获得:

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + C_k (AS^{(k)} - X) \quad (14)$$

从式(11)可知,矩阵 G_k 随增广因子的迭代更新仍然保持可逆,这就避免了出现 FOCUSS 迭代算法中所述的病态矩阵的可能,同时也保证了恢复算法的精确度。

2.3 引入共轭梯度法加速算法收敛

在增广 Lagrange 函数优化算法迭代式(10)中,令:

$$Y_k = G_k^{-1} b_k \quad (15)$$

对于大规模问题而言,在每次迭代中对矩阵 G_k 的求逆是整个算法运行时间中开销较大的一块,若将向量 Y_k 的求解看作是线性方程组 $G_k Y_k = b_k$ 的求解,则我们可以利用共轭梯度法(CG法)^[5]加速求解线性方程组的运行效率,提高算法的实用性。

共轭梯度法(CG法)^[5]是目前处理大型对称正定线性方程最为优秀的方法之一。简言之,共轭梯度法就是一种利用每一步迭代前点的最速下降方向来生成关于矩阵 G_k 的共轭方向,并建立求目标函数极小点的方法。共轭梯度法通过对每步剩余量 $R_k = G_k x_k - b$ 的计算,生成新的迭代共轭方向 d_k 及相应步长 α_k ,从而对目标解进行迭代更新。由于 CG 法具有二次终止性,因此该算法只需通过有限步迭代就能达到收敛的目的。CG 迭代收敛速度还直接与矩阵 G_k 的条件数有关,条件数越小收敛速度越快。对于增广 Lagrange 函数法,由于增广因子 C_k 取值稳定, G_k 的条件数也相应维持在固定的小范围内,因此用共轭梯度法可以明显缩短迭代式(10)的运算时间,提高整个算法的运行效率。

综上分析,给出增广 Lagrange 函数优化算法流程如下。

步骤1 设置算法终止参数 ϵ_0 以及共轭梯度法迭代阈值 $\epsilon, k=1$ 。初始化 $S^1 = [1, \dots, 1]_{n \times 1}^T, \lambda_1 = [0, \dots, 0]_{m \times 1}^T$, 设定总迭代次数为 N 。计算 $\Pi^{-1}(S^{(k)})$, 计算 $\Pi^{-1}(S^{(k)})$, 将第 k 次迭代增广因子设置为表达式 $C_k = C_0 + k^a$, 常数 C_0 与 a 为经验设置值,乘子向量 λ_k 按式(11)更新,通过式(14)、(15)生成矩阵 G_k 及向量 b_k 。

步骤2 输入 G_k, b_k , 运用共轭梯度法进行迭代,当剩余量 R_k 范数值小于阈值 ϵ 时输出中间解向量 Y_k , 将其代入式(10)更新源信号 $S^{(k+1)}, k=k+1$ 。

步骤3 若 $\|S^{(k+1)} - S^{(k)}\| \leq \epsilon_0$ 算法终止,输出重构源

信号 S^* ; 否则返回步骤 2 继续迭代。

算法流程的评价: 增广 Lagrange 算法属于序列优化算法, 这种算法满足线性收敛性, 同时适合于数值仿真, 解决大规模复杂问题。增广因子的选择跟算法的收敛关系密切, 考虑到增广函数精确罚函数的特点以及上述算法提到的迭代矩阵病态性的影响, 增广因子选值范围应限制在较小范围。

3 数值仿真实验及结果分析

我们使用属性为 Intel(R) Pentium(R), Dual E2180 @ 2.00GHz 的个人电脑在 Windows XP 专业版本上运行 FOCUSS 算法以及本文增广 Lagrange 函数优化算法, 运行效果用信噪比公式衡量:

$$SIR(S, \hat{S}) = -20 \log_{10} \left(\frac{\|S - \hat{S}\|_F}{\|S\|_F} \right) [\text{dB}] \quad (16)$$

式中, $\|\cdot\|_F$ 为 Frobenious 范数。

例 1 我们尝试用文献[2]中提出的带噪声稀疏信号恢复仿真办法来进行实验。假设变换基矩阵 $A \in R^{256 \times 512}$, 该变换基矩阵随机产生且按行进行正交化, 源信号 $S \in R^{612}$, 其中有 k 个元素的值取幅度 ± 1 , 观察信号按照 $X = AS + E$ 产生, E 是服从 $N(0, 0.01^2 I)$ 的高斯白噪声。

本例通过仿真实验评价源信号稀疏程度变化对本文算法以及 FOCUSS 算法的恢复结果。具体做法如下: 每次将源信号起作用的个数 k 固定, 然后进行 10 次相同条件的仿真实验, 信噪比取其平均值, k 的取值依次从 1 取到 50。两种算法的 p 都设置为 0.9, 算法迭代最长次数为 30 次, 终止参数 ϵ_0 为 0.01, 增广因子为经验表达式 $C_k = 5 + k^{0.1}$, 而共轭梯度法的迭代总次数设为 10 次。仿真结果如图 1 所示。

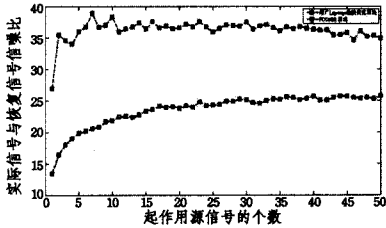


图 1 两种算法在不同稀疏程度的信噪比较

从图中相比较可知, 在不同稀疏程度上改进的增广函数法都要比 FOCUSS 算法高出 10 分贝以上, 抗噪声能力得到了明显的增强。从图中还可以看出, 增广 Lagrange 函数优化算法恢复的精度受起作用信号个数的影响不大, 而典型的 FOCUSS 算法则随稀疏度变化存在着较大的起伏。整体而言, 改进型的增广 Lagrange 函数优化算法要优于 FOCUSS 算法, 是一种稳健有效的方法。

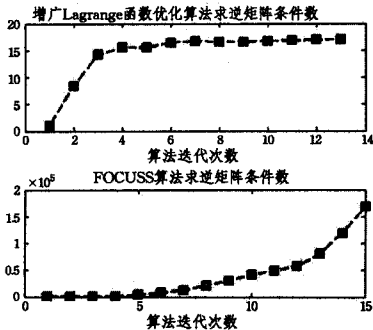


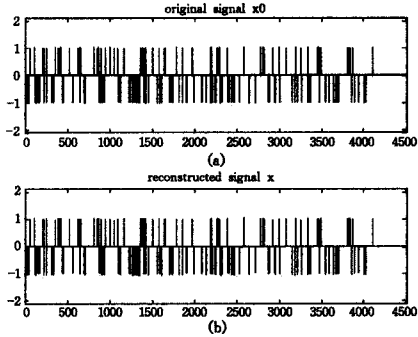
图 2 两种算法迭代矩阵 H_k 与 G_k 的条件数比较

我们对例中两种算法出现的迭代矩阵 H_k 与迭代矩阵 G_k

的条件数的变化趋势也作一个比较, 得到的结果如图 2 所示。可以明显地看到, FOCUSS 算法中的迭代矩阵 H_k 条件数随迭代次数呈指数型增长, 呈现病态的特点, 而本文算法得到的迭代矩阵 G_k 的条件数一直很小且十分稳定。该比较进一步印证本文 2.1 节的分析, 因此有理由相信本文算法无论在恢复精度还是稳健性上都要优于 FOCUSS 算法。

例 2 考虑大规模的带噪声稀疏信号恢复模型在实际仿真中可以确定取值如下: $m = 1024, n = 4096, k = 160$, 将 p 同样设置为 0.8, 噪声为方差 0.01 的高斯白噪声, 具体的构造模型方法同上。

图 3 所示为 FOCUSS 算法与增广 Lagrange 函数优化算法重构信号的对比, 可以看出恢复的信号几乎与源信号一致, 恢复效果十分明显。



(a) 原始信号; (b) 增广 Lagrange 函数优化算法信号重构图

图 3 稀疏信号重构图

从表 1 的结果还可以得到以下结论: 增广 Lagrange 函数优化算法比 FOCUSS 算法在带噪声大型稀疏信号重构模型中不仅在恢复信号精度上有了很大的提升, 而且在整体运行时间上也有了很大的缩短。

表 1 两种算法在精度及运行时间上的比较

算法名称	信噪比 (dB)	运行时间
FOCUSS 算法	19.34	212.90(s)
增广 Lagrange 优化算法	32.11	168.78(s)

例 3 针对例 2 中的大规模带噪声稀疏信号恢复仿真模型, 本文再继续做进一步的强化仿真。假设: (1) 混地矩阵 A 非正交但按列进行单位化, 源信号起作用时刻幅值为 ± 1 。(2) 混地矩阵 A 非正交但按列单位化, 源信号起作用幅值不再是单位长度, 而是由随机函数 rand 产生。针对这两种假设, 我们将增广因子分别设置为经验表达式 $C_k = 5 + k^{0.1}$, $C_k = 5 + k^{0.2}$, 模型的其他参数不做更改, 分别进行 30 次迭代以后恢复得到源信号。表 2 及表 3 是两种情况下本文算法与 FOCUSS 算法的恢复精度以及运行时间的对比。由于模型复杂程度增加, 两种算法在恢复精度上要比前两个例子较低, 但还是可以明显看出本文算法无论在时间和精度上都要优于传统的 FOCUSS 算法。

表 2 假设(1)下两种算法在精度及运行时间上的比较

算法名称	信噪比 (dB)	运行时间
FOCUSS 算法	24.95	217.69(s)
增广 Lagrange 优化算法	32.46	170.54(s)

表 3 假设(2)下两种算法在精度及运行时间上的比较

算法名称	信噪比 (dB)	运行时间
FOCUSS 算法	18.94	224.38(s)
增广 Lagrange 优化算法	25.24	172.4(s)

结束语 本文针对 FOCUSS 算法迭代公式中容易出现计算病态性的问题,提出了应用增广 Lagrange 函数优化算法解决 l^p 模优化模型,实现信号的重构。该算法通过精确罚函数的方法改良迭代公式,同时应用共轭梯度法加快了算法的收敛速度,整体上提高了信号的恢复精度,使得研究成果更具有实际的意义。

参考文献

- [1] Gorodnitsky I F, Rao B D. SparseSignal Reconstruction from Limited Data Using FOCUSS: A reweighted minimum norm algorithm[J]. IEEE Trans, Signal Process, 1997, 45(3): 600-616
- [2] Kim S-J, Koh K, Lustig M, et al. An Interior-Point Method for Large-Scale l_1 -Regularized Least Squares[J]. IEEE Journal on Selected Topics in Signal Processing, 2007, 1(4): 606-617
- [3] Donoho D. Compressive sampling[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306
- [4] Rao B D, Kreutz-Delgado K. An affine scaling methodology for

best basis selection[J]. IEEE Trans. SignalProcess, 1999, 47(1): 187-200

- [5] Nocedal J, Wright S J. Numerical Optimization[M]. New York: Springer-Verlag, 2006
- [6] Magnusr R. Multiplier and gradient methods[C]// the Second International Conference on Computing Methods in Optimization Problems. San Remo, Italy, 1968
- [7] He Zhao-shui, Cichocki H A, Zdunek R, et al. Improved FOCUSS method with conjugate gradient iterations [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(1): 399-404
- [8] Candès E J, Wakin M B, Boyd S P. Enhancing sparsity by reweighted l_1 minimization[J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2008, 14(5/6)
- [9] Gorodnitsky I F, Georgeb J S, Raoa B D. Neuromagnetic source imaging with FOCUSS: a recursive weighted minimum norm algorithm[J]. Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, 1995, 95(4): 231-251
- [10] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004

(上接第 157 页)

4 实验测试与结果分析

在支持度相同的情况下比较两个算法的运行时间。实验采用 FIMI Repository 中的 BMS-POS 产品交易记录数据集^[8]及由 IBM 提供的数据生成器所产生的合成数据集。FIMI Repository 数据集包括 515,597 条数据,我们选取其中的 10,000 条作为实验数据;数据生成器所产生的数据集近似服从正态分布,共 12000 条,平均每条包含 25 个项目。所设计的实验方法如下:设定支持度阈值从 1% 到 10%。对于两个数据集,分别比较 FGC 和 NSFSG 算法的运行时间。实验结果如图 2 所示。

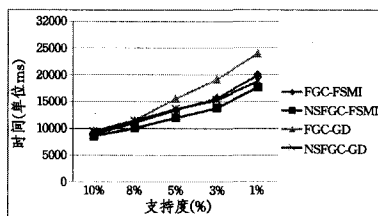


图2 两种算法运行时间的比较

从上述实验结果可知,NSFSG 算法在支持度为 10% 的时候,运行时间要少于 FGC 算法。并且,随着支持度的减小,NSFSG 算法的优势也越明显。合成数据集近似服从正态分布,NSFSG 更易发挥优势。虽然合成数据集交易比 FSMI 数据集多 2000 条,但其速度能达到 FGC 处理后者的速度。实验证明 NSFSG 算法是快速有效的。

随着人数的变化,两个算法运行时间的变化如图 3 所示。其中,选定支持度为 5%。

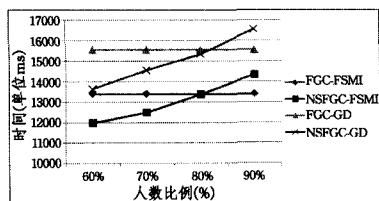


图3 阈值变化示意

根据用户对购买商品的人数比例的需要,我们选取动态的阈值来达到时间上的优化。通过图 3 看出,随着人数比例减少,本算法运行时间与 FGC 相比明显减少。并且在大部分情况下,本程序都能快速找到频繁项目集。由于人数比例由用户决定,使用户掌握一定的主动性并积极参与挖掘过程,在增加系统可用性的同时提高了算法的执行效率。

结束语 本文提出了一种改进的 FGC 算法。相对于一般的约束关联规则挖掘算法,它更关注与用户交互方面的改进。通过简洁性约束和正态分布的运用,在算法的规模和时间上有了有一定程度的改善。未来的工作可以从扩展算法的其他约束或结合频繁闭项目集上着手。

参考文献

- [1] Bonchi F, Giannotti F, et al. ExAnte: A preprocessing method for frequent-pattern mining[J]. 2005, 20(3): 25-31
- [2] Bonchi F, Lucchese C. Extending the state-of-the-art of constraint-based pattern discovery[J]. Data & Knowledge Engineering, 2007, 60(2): 377-399
- [3] Agrawal A, Mannila H, et al. Relational data mining [J]. Data Mining and Knowledge Discovery Handbook, Part 6, 2010: 887-911
- [4] Erwin A, Gopalan R P, et al. Efficient mining of high utility itemsets from large datasets[J]. Advances in Knowledge Discovery and Data Mining Lecture Notes in Computer Science, 2008, 5012: 554-561
- [5] Pears R, Kuty S. FGC: An Efficient Constraint Based Frequent Set Miner[C]// 2007 IEEE/ACS International Conference on Computer Systems and Applications. 2007: 424-431
- [6] Seeja K R, Alam M A, Jain S K. An association rule mining approach for co-regulated signature genes identification in cancer [J]. World Scientific Connecting Great Minds, 2009, 18(8): 1409-1423
- [7] Leung C K, Lakshmanan L V S, Ng R T. Exploiting Succinct Constraints Using FP-Trees[J]. Column: Constraints in datamining, ublication, 2002: 40-49
- [8] <http://fimi.cs.helsinki.fi/>