第45卷 第4期
2018年4月

计 算 机 科 学
COMPUTER SCIENCE

Vol.45 No.4
Apr.2018

决策形式背景属性约简的关系

秦克云 林 洪

(西南交通大学数学学院 成都 611756)

摘 要 形式背景的属性约简是形式概念分析的重要研究方向。针对决策形式背景,已有多种属性约简标准及属性约简方法。文中研究了相关属性约简方法之间的关系,从形式概念的角度给出了规则协调集的等价描述方法;证明了强协调决策形式背景中的规则协调集为协调集,粒协调决策形式背景中的规则协调集为粒协调集。

关键词 决策形式背景,约简,粒约简,规则约简

中图法分类号 TP18 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.04.043

Relationships among Several Attribute Reduction Methods of Decision Formal Context

QIN Ke-yun LIN Hong

(College of Mathematics,Southwest Jiaotong University,Chengdu 611756,China)

Abstract The attribute reduction in the formal context is an important topic of formal concept analysis. Several kinds of attribute reduction in decision formal context have been put forward. This paper was devoted to the study of the relationships among reduction,granular reduction and rule based reduction. An equivalent depiction of rule based consistent set was provided by using formal concepts. It is shown that the rule based consistent set in strong consistent formal context is a consistent set,and the rule based consistent set in granular consistent formal context is a granular consistent set.

Keywords Decision formal context,Reduction,Granular reduction,Rule based reduction

1 引言

1982年,德国数学家Wille提出了形式概念分析(FCA)理论[1],也称概念格理论。该理论是根据数据集中对象与属性之间的二元关系建立的一种概念层次结构,可用于概念的表示、排序和显示,是数据分析与规则提取的一种有效工具。作为知识处理的有力工具,概念格理论已广泛应用于知识工程、机器学习、模式识别、专家系统、决策分析、数据挖掘等领域。

作为形式概念分析的重要研究内容之一,形式背景的属性约简理论与方法受到了学术界的广泛关注。通过属性约简可以获得更简洁的知识,并揭示属性之间的依赖关系。Ganter和Wille[2]提出了协调子形式背景的概念,从减少行与列的角度提出了可约简属性与可约简对象的概念,对相关属性的特征进行了系统分析。Zhang等[3]给出了协调属性集的判断定理,提出了形式概念的区分属性与区分矩阵的概念,借助布尔逻辑公式转换给出了约简的计算方法。Liu等[4]针对基于属性的概念格与基于对象的概念格给出了协调集判断定理,通过概念的区分属性给出了属性约简方法,并刻画了概念格约简与信息系统约简之间的关系。Medina[5]刻画了概念格、基于属性的概念格及基于对象的概念格中的属性特征。人们对基于属性的概念格约简、基于对象的概念格约简及信息系统约简的相互关系也进行了深入分析[5-7]。Belohlavek等[8]针对模糊形式背景研究了保持经典集诱导的模糊概念不变的约简问题,并给出了约简方法。Wu等[9]将粒计算理论与概念格理论相结合,提出了形式背景中的粒结构与粒协调集的概念,给出了粒约简的计算方法。其中的约简计算无需构造概念格,可直接通过对象的区分属性获得,计算简便易行。Shao等[10]针对模糊形式背景提出了粒协调集与粒约简的概念,给出了粒约简的计算方法。李金海等[11]提出了概念格外延信息量的概念,给出了信息量计算方法,进而提出了一种启发式属性约简计算方法。Wei等[12]从决策规则的角度提出了决策形式背景的强协调性与弱协调性概念,对于强协调决策形式背景给出了协调集的判定定理及约简方法;对于弱协调决策形式背景,通过蕴含映射给出了约简计算方法。Wu[9]提出了粒协调决策形式背景的概念,并通过对象的区分

到稿日期:2017-03-13 返修日期:2017-06-12 本文受国家自然科学基金(61473239,61372187),西华大学省部级学科平台开放课题(szjj2014-052)资助。

秦克云(1962-),男,教授,博士生导师,CCF高级会员,主要研究方向为粗糙集理论、粒计算、多值逻辑,E-mail:keyunqin@263.com(通信作者);**林 洪**(1993-),女,硕士生,主要研究方向为概念格理论。

属性矩阵给出粒协调决策形式背景的约简方法。Li等[13-16]对决策形式背景基于决策规则的约简问题进行了系统研究，提出了决策规则之间的蕴涵关系、冗余决策规则、必要决策规则等概念，给出了冗余决策规则及必要决策规则的等价描述，借助区分属性给出了决策形式背景保持决策规则的约简方法。Shao等[17]借助决策属性建立了概念之间的等价关系，给出了概念的压缩方法及决策规则获取方法。李进金等[18]通过引入交式可约元提出了一种形式背景属性约简方法，给出了一种概念格生成算法，针对协调决策形式背景给出了一种属性约简方法。

决策形式背景的约简理论与方法是相关领域的热门研究问题。人们提出了多种约简标准并建立了相应的约简方法，但针对这些约简之间关系的讨论较少。本文针对决策形式背景，给出规则约简的等价描述方法，进而研究约简、粒约简、规则约简之间的关系。

2 决策形式背景中的属性约简

形式概念分析基于形式背景展开讨论。一个形式背景是一个三元组(G,M,I)，其中G为所讨论的对象构成的集合，M为G中对象所具有的属性构成的集合，I是G和M之间的二元关系，即$I\subseteq G\times M$。对于任意$g\in G,m\in M$，如果$(g,m)\in I$，则表示对象g具有属性m；如果$(g,m)\notin I$，则表示对象g不具有属性m。下面用$P(X)$表示集合X的幂集合。为刻画形式概念，Wille引入了下面的算子$\uparrow:P(G)\to P(M)$，$\downarrow:P(M)\to P(G)$，则对于任意$A\in P(G),B\in P(M)$，有：

$$A^{\uparrow}=\{m\in M;\forall a\in A((a,m)\in I)\} \tag{1}$$

$$B^{\downarrow}=\{g\in G;\forall b\in B((g,b)\in I)\} \tag{2}$$

即$A^{\uparrow}$为由A中对象所具有的公共属性构成的集合，$B^{\downarrow}$为由具有B中所有属性的对象构成的集合。对于$g\in G,m\in M$，将$\{g\}^{\uparrow}$和$\{m\}^{\downarrow}$分别简记为$g^{\uparrow}$和$m^{\downarrow}$。

定义1[1] 设(G,M,I)为形式背景。对于任意$A\in P(G),B\in P(M)$，如果$A^{\uparrow}=B,B^{\downarrow}=A$，那么称二元组$(A,B)$为$(G,M,I)$中的一个形式概念，简称概念；$A$为$(A,B)$的外延，$B$为$(A,B)$的内涵。

设(G,M,I)为形式背景。(G,M,I)中所有形式概念构成的集合记为$L(G,M,I)$。对于任意$(A_1,B_1),(A_2,B_2)\in L(G,M,I)$，定义它们之间的序关系$\leqslant$为：$(A_1,B_1)\leqslant(A_2,B_2)$，当且仅当$A_1\subseteq A_2$（或等价地，$B_2\subseteq B_1$）。则有以下定理。

定理1[1] 设(G,M,I)为形式背景。$L(G,M,I)$关于$\leqslant$构成完备格，称为概念格，其中对于任意$(X_j,Y_j)\in L(G,M,I),j\in J$（$J$为指标集），有：

$$\bigwedge_{j\in J}(X_j,Y_j)=(\bigcap_{j\in J}X_j,(\bigcup_{j\in J}Y_j)^{\downarrow\uparrow}) \tag{3}$$

$$\bigvee_{j\in J}(X_j,Y_j)=((\bigcup_{j\in J}X_j)^{\uparrow\downarrow},\bigcap_{j\in J}Y_j) \tag{4}$$

由此定理，所有形式概念具有格结构，反映了形式概念之间的特化与泛化关系。在形式背景(G,M,I)中，如果对于任意$g\in G,m\in M$，有$g^{\uparrow}\neq\emptyset,g^{\uparrow}\neq M,m^{\downarrow}\neq\emptyset,m^{\downarrow}\neq G$，那么称$(G,M,I)$为正则形式背景[3]。以下假设所讨论的形式背景都是正则形式背景。

设(G,M,I)为形式背景，$E\subseteq M$。令$I_E=I\cap(G\times M)$，则(G,E,I_E)也是形式背景，被称为(G,M,I)的一个子形式背景。为避免混淆，将(G,E,I_E)中式由式(1)、式(2)定义的算子分别记为$\uparrow_E$和$\downarrow_E$。显然，对于任意$A\subseteq G,B\subseteq E$，有$A^{\uparrow_E}=A^{\uparrow_M}\cap E,B^{\downarrow_E}=B^{\downarrow_M}$。

设$(U,A,I),(U,T,J)$是具有相同对象集的形式背景。如果对于任意$(X,Y)\in L(U,T,J)$，存在$(X_1,Y_1)\in L(U,A,I)$使得$X_1=X$，则称$L(U,A,I)$是$L(U,T,J)$的细化[3]，记为$L(U,A,I)\leqslant L(U,T,J)$。假设$Ext(L(U,T,J)),Ext(L(U,A,I))$分别为相应概念格中所有形式概念的外延构成的集合，则$L(U,A,I)$是$L(U,T,J)$的细化，当且仅当$Ext(L(U,T,J))\subseteq Ext(L(U,A,I))$。如果$A\cap T=\emptyset$，$A,T$中的属性分别为条件属性与决策属性，则称$S=(U,A,I,T,J)$为决策形式背景。

定义2[9,12] 设$S=(U,A,I,T,J)$为决策形式背景。

1)如果$L(U,A,I)\leqslant L(U,T,J)$，那么称$S$为强协调决策形式背景。

2)如果对于任意$x\in U$，有$x^{\uparrow_A\downarrow_A}\subseteq x^{\uparrow_T\downarrow_T}$，那么称$S$为粒协调决策形式背景。

定义3[12] 设$S=(U,A,I,D,J)$为强协调决策形式背景，$E\subseteq A$。如果$L(U,E,I_E)\leqslant L(U,T,J)$，那么称$E$为$S$的协调集。$S$关于集合包含关系的极小协调集称为$S$的约简。

由定义3可知，若E为强协调决策形式背景S的协调集，则$S'=(U,E,I_E,D,J)$仍为强协调决策形式背景。强协调决策形式背景的约简是保持其强协调性的极小属性集。Wei等[12]基于区分属性给出了强协调决策形式背景的约简计算方法。

定义4[9] 设$S=(U,A,I,D,J)$为粒协调决策形式背景，$E\subseteq A$。如果对于任意$x\in U$，有$x^{\uparrow_E\downarrow_E}\subseteq x^{\uparrow_T\downarrow_T}$，则称$E$为$S$的粒协调集。$S$的极小的粒协调集被称为$S$的粒约简。

在形式背景(U,A,I)中，对于任意$x\in U$，有$(x^{\uparrow\downarrow},x^{\uparrow})$为一形式概念且由$x$完全确定。称$(x^{\uparrow\downarrow},x^{\uparrow})$为对象概念。对于任意形式概念$(X,B)\in L(U,A,I)$，由$\bigcap_{x\in X}x^{\uparrow}=X^{\uparrow}=B$可得$\bigvee_{x\in X}(x^{\uparrow\downarrow},x^{\uparrow})=(X,B)$，即所有形式概念都可以表示为若干对象概念之并。因此，对象概念是$L(U,A,I)$中的基本概念，可以看作$L(U,A,I)$中的信息粒[9]。因为形式概念中的外延与内涵可以互相确定，所以可将$\{x^{\uparrow\downarrow}|x\in U\}$看作$L(U,A,I)$中的信息粒。对于粒协调决策形式背景，$x^{\uparrow_A\downarrow_A}\subseteq x^{\uparrow_T\downarrow_T}$意味着条件属性决定的信息粒比决策属性决定的信息粒更精细。

由定义4可知，粒协调决策形式背景(U,A,I,D,J)的粒约简是使得(U,E,I_E,D,J)仍然为粒协调决策形式背景的极小属性集E。Wu等[9]基于区分属性给出了粒协调决策形式背景的粒约简计算方法。该方法无需构造概念格，可直接通过对象的区分属性获得粒约简，计算简便。决策形式背景的约简与粒约简有如下关系。

定理2 设$S=(U,A,I,D,J)$为强协调决策形式背景。则有：

1)S为粒协调决策形式背景。

2)若 $E\subseteq A$ 为 S 的协调集,则 E 为 S 的粒协调集。

证明:1)对于任意 $x\in U$,由于 $(x^{\uparrow_T\downarrow_T},x^{\uparrow_T})\in L(U,T,J)$ 且 S 强协调,因此存在 $(X,B)\in L(U,A,I)$ 使得 $X=x^{\uparrow_T\downarrow_T}$。由 $x\in x^{\uparrow_T\downarrow_T}$ 可得 $x\in X$,从而有 $x^{\uparrow_A\downarrow_A}\subseteq X^{\uparrow_A\downarrow_A}=X=x^{\uparrow_T\downarrow_T}$。即 S 为粒协调决策形式背景。

2)假设 E 为 S 的协调集,则由定义 3 可得 $S'=(U,E,I_E,D,J)$ 仍为强协调决策形式背景。于是由定理 2 中 1)可知,$S'=(U,E,I_E,D,J)$ 为粒协调决策形式背景,从而 E 为 S 的粒协调集。

3　决策形式背景基于决策规则的约简

决策形式背景的知识体现为决策规则[13,15]。设 $S=(U,A,I,D,J)$ 为决策形式背景,$E\subseteq A$。对于任意 $(X,B)\in L(U,E,I_E)$,$(Y,C)\in L(U,D,J)$,如果 $X\subseteq Y$,且 X,B,Y,Z 都不为空集,则称 $(X,B)\rightarrow(Y,C)$ 为决策规则,简记为 $B\rightarrow C$。

决策规则 $B\rightarrow C$ 的直观含义解释为:如果某对象 x 具有 B 中的所有属性,则由 $x\in B^{\downarrow}=X\subseteq Y=C^{\downarrow}$ 可知,x 必然具有 C 中的所有属性。以下记所有决策规则构成的集合为 $R(E,D)$。

对于决策规则 $B\rightarrow C$,如果存在 $B_1\rightarrow C_1\in R(E,D)-\{B\rightarrow C\}$ 使得 $B_1\subseteq B$ 且 $C\subseteq C_1$,记为 $B_1\rightarrow C_1\Rightarrow B\rightarrow C$,则称 $B\rightarrow C$ 在 $R(E,D)$ 中是多余的[13];否则称 $B\rightarrow C$ 在 $R(E,D)$ 中是必要的,$R(E,D)$ 中所有必要决策规则构成的集合记为 $R_n(E,D)$。若决策规则 $B\rightarrow C$ 是多余的,则存在决策规则 $B_1\rightarrow C_1$ 使得 $B_1\subseteq B$ 且 $C\subseteq C_1$。因此,按照决策规则的直观含义,$B\rightarrow C$ 提供的决策信息包含于 $B_1\rightarrow C_1$ 提供的决策信息。在这个意义下,$B\rightarrow C$ 是多余的。

定义 5[13]　设 $S=(U,A,I,D,J)$ 为决策形式背景,$E\subseteq A$。称 E 为 S 的一个规则协调集,如果 $R(E,D)\Rightarrow R(A,D)$,即对于任意 $B\rightarrow C\in R(A,D)$,存在决策规则 $B_1\rightarrow C_1\in R(E,D)$ 使得 $B_1\rightarrow C_1\Rightarrow B\rightarrow C$。$S$ 的极小的规则协调集被称为 S 的一个规则约简。

根据定义 5,如果 E 为 S 的一个规则协调集,则对于任意决策规则 $B\rightarrow C\in R(A,D)$,存在决策规则 $B_1\rightarrow C_1\in R(E,D)$ 使得 $B_1\rightarrow C_1\Rightarrow B\rightarrow C$,即 $B_1\rightarrow C_1$ 可以提供 $B\rightarrow C$ 包含的决策信息。因此,规则约简标准可以保证条件属性约简后,决策规则提供的信息没有丢失。

Li 等[13]研究了决策形式背景基于决策规则的约简问题,给出了规则协调集的若干判定定理,借助区分属性及区分函数给出了决策形式背景的规则约简方法。下面通过形式概念对规则协调集进行刻画。

定理 3　设 $S=(U,A,I,D,J)$ 为正规决策形式背景,$E\subseteq A$。E 为 S 的一个规则协调集,当且仅当:对于任意 $(X,B)\in L(U,D,J)$,如果存在 $(X_1,B_1)\in L(U,A,I)$ 使得 $X_1\subseteq X$,则存在 $(X_2,B_2)\in L(U,E,I_E)$ 使得 $X_1\subseteq X_2\subseteq X$。

证明:(必要性)设 E 为 S 的规则协调集且 $(X,B)\in L(U,D,J)$,$(X_1,B_1)\in L(U,A,I)$ 使得 $X_1\subseteq X$。于是由 $X_1\subseteq X$ 可得 $B_1\rightarrow B\in R(A,D)$。因为 E 为规则协调集,所以存在 $B_2\rightarrow C_2\in R(E,D)$ 使得 $B_2\rightarrow C_2\Rightarrow B_1\rightarrow B$。于是有 $(B_2^{\downarrow},B_2)\in L(U,E,I_E)$,$(C_2^{\downarrow},C_2)\in L(U,D,J)$,$B_2^{\downarrow}\subseteq C_2^{\downarrow}$,且 $B_2\subseteq B_1$,$B\subseteq C_2$。令 $X_2=B_2^{\downarrow}$,于是有 $X_1=B_1^{\downarrow}\subseteq B_2^{\downarrow}=X_2$,且有 $X_2=B_2^{\downarrow}\subseteq C_2^{\downarrow}\subseteq B^{\downarrow}=X$。

(充分性)对于任意 $B\rightarrow C\in R(A,D)$,有 $(C^{\downarrow},C)\in L(U,D,J)$,$(B^{\downarrow},B)\in L(U,A,I)$ 且 $B^{\downarrow}\subseteq C^{\downarrow}$。由假设可得,存在 $(X_2,B_2)\in L(U,E,I_E)$ 使得 $B^{\downarrow}\subseteq X_2\subseteq C^{\downarrow}$。由 $X_2\subseteq C^{\downarrow}$ 可知,$B_2\rightarrow C\in R(E,D)$。再由 $B^{\downarrow}\subseteq X_2$ 可得,$B_2=X_2^{\uparrow_E}=X_2^{\uparrow_A}\cap E\subseteq X_2^{\uparrow_A}\subseteq B^{\downarrow\uparrow_A}=B$,故有 $B_2\rightarrow C\Rightarrow B\rightarrow C$。即 E 为 S 的一个规则协调集。

此定理从形式概念的角度对规则协调集进行了刻画。通过此定理可以讨论决策形式背景的约简、规则约简以及粒约简之间的关系。

定理 4　设 $S=(U,A,I,D,J)$ 为强协调决策形式背景,$E\subseteq A$。如果 E 为 S 的规则协调集,那么 E 为 S 的协调集。

证明:对于任意 $(X,B)\in L(U,D,J)$,因为 S 是强协调决策形式背景,所以有 $(X,X^{\uparrow_A})\in L(U,A,I)$。因为 E 是规则协调集,所以由定理 3 可知,存在 $(X_2,B_2)\in L(U,E,I_E)$ 使得 $X\subseteq X_2\subseteq X$。于是有 $X=X_2\in Ext(L(U,E,I_E))$。从而有 $L(U,E,I_E)\leqslant L(U,D,J)$,即 E 为 S 的协调集。

推论 1　设 $S=(U,A,I,D,J)$ 为强协调决策形式背景,$E\subseteq A$。如果 E 为 S 的规则约简,那么存在 $E'\subseteq E$ 使得 E' 为 S 的约简。

定理 5　设 $S=(U,A,I,D,J)$ 为粒协调决策形式背景,$E\subseteq A$。如果 E 为 S 的规则协调集,那么 E 为 S 的粒协调集。

证明:如果对于任意 $g\in U$,有 $(x^{\uparrow_D\downarrow},x^{\uparrow_D})\in L(U,D,J)$,$(x^{\uparrow_A\downarrow},x^{\uparrow_A})\in L(U,A,I)$。因为 S 为粒协调决策形式背景,所以有 $x^{\uparrow_A\downarrow}\subseteq x^{\uparrow_D\downarrow}$。因为 E 是规则协调集,所以由定理 3 可知,存在 $(X_2,B_2)\in L(U,E,I_E)$ 使得 $x^{\uparrow_A\downarrow}\subseteq X_2\subseteq x^{\uparrow_D\downarrow}$。从而由 $x\in x^{\uparrow_A\downarrow}$ 可得 $x\in X_2$,因此有 $x^{\uparrow_E\downarrow}\subseteq X_2^{\uparrow_E\downarrow}=X_2\subseteq x^{\uparrow_D\downarrow}$。因此 E 为 S 的粒协调集。

推论 2　设 $S=(U,A,I,D,J)$ 为粒协调决策形式背景,$E\subseteq A$。如果 E 为 S 的规则约简,那么存在 $E'\subseteq E$ 使得 E' 为 S 的粒约简。

结束语　基于概念格理论的形式背景属性约简理论与方法是形式概念分析的热门研究问题。本文针对决策形式背景讨论了几种已有约简方法之间的关系。给出了规则协调集的等价描述方法;基于此等价描述说明规则约简标准强于约简以及粒约简标准。规则约简与弱协调决策形式背景约简之间的关系以及规则约简与形式背景基于粗糙集模型的约简之间的关系我们将另文讨论。

参 考 文 献

[1]　WILLE R. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts[C]// Ordered sets. Dordrecht-Boston: Reidel, 1982: 445-470.

[2]　GANTER B, WILLE R. Formal Concept Analysis, Mathematic Foundations[M]. Berlin: Springer, 1999.

(下转第 290 页)

gression for Face Reconstruction and Recognition with Mixed Noise [J]. Pattern Recognition,2015,48(12):3811-3824.

[6] QIAN J,LUO L,YANG J,et al. Robust Nuclear Norm Regularized Regression for Face Recognition with Occlusion [J]. Pattern Recognition,2015,48(10):3145-3159.

[7] WRIGHT J,GANESH A,RAO S,et al. Robust Principal Component Analysis:Exact Recovery of Corrupted Low-Rank Matrices Via Convex Optimization[C]// Proceedings of Advances in Neural Information Processing Systems. Curran Associates, Inc. ,2009:2080-2088.

[8] CANDES E J,LI X,MA Y,et al. Robust Principal Component Analysis? [J]. Journal of the ACM,2011,58(31):1-73.

[9] KIM W,SUH S,HWANG W,et al. Svd Face:Illumination-Invariant Face Representation [J]. IEEE Signal Processing Letters,2014,21(11):1336-1340.

[10] LI X,DAI D,ZHANG X,et al. Structured Sparse Error Coding for Face Recognition with Occlusion [J]. IEEE Transactions on Image Processing,2013,22(5):1889-1900.

[11] WEI X,LI C,HU Y. Robust Face Recognition Under Varying Illumination and Occlusion Considering Structured Sparsity[C]// International Conference on Digital Image Computing Techniques and Applications. 2012:1-7.

[12] JIA K,CHAN T H,MA Y. Robust and Practical Face Recognition Via Structured Sparsity [C] // European Conference on Computer Vision. 2012:331-344.

[13] TZIMIROPOULOS G,ZAFEIRIOU S,PANTIC M. Subspace Learning From Image Gradient Orientations [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2012, 34(12):2454-2466.

[14] ZHANG T,TANG Y Y,FANG B,et al. Face Recognition under Varying Illumination Using Gradientfaces [J]. IEEE Transactions on Image Processing,2009,18(11):2599-2606.

(上接第 259 页)

[3] ZHANG W X,WEI L,QI J J. Attribute reduction theory and approach to concept Lattice[J]. Science in China F, 2005, 48(6):713-726.

[4] LIU M,SHAO M W,ZHANG W X,et al. Reduction method for concept lattices based on rough set theory and its application [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2007, 53(9):1390-1410.

[5] MEDINA J. Relating attribute reduction in formal,object-oriented and property-oriented concept lattice[J]. Computers and Mathematics with Applications,2012,64(6):1992-2002.

[6] DIAS S M,VIEIRA N J. Concept lattices reduction:definition, analysis and classification[J]. Expert Systems with Applications,2015,42(20):7084-7097.

[7] WANG X,ZHANG W X. Relations of attribute reduction between object and property oriented concept lattices[J]. Knowledge-Based Systems,2008,21(5):398-403.

[8] BELOHLAVEK R,SKLENAR V,ZACPAL J. Crisply generated fuzzy concepts[C]// Proceedings of ICFCA 2005, Lecture Notes in Artificial Intelligence. 2005:269-284.

[9] WU W Z,LEUNG Y,MI J S. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering,2009,21(10):1461-1474.

[10] SHAO M W,YANG H Z,WU W Z. Knowledge reduction in formal fuzzy contexts[J]. Knowledge-Based Systems,2015,73: 265-275.

[11] LI J H,LV Y J,LIANG B M. Algorithm for attribute reduction based on information quantity of concept lattice extension[J]. Computer Engineering and Applications,2009,45(10):144-146. (in Chinese)
李金海,吕跃进,梁斌梅.基于概念格外延信息量的属性约简算法[J].计算机工程与应用,2009,45(10):144-146.

[12] WEI L,QI J J,ZHANG W X. Attribute reduction theory of concept lattice based on decision formal contexts[J]. Science in China F,2008,51(7):910-923.

[13] LI J H,MEI C L,LV Y J. Knowledge reduction in decision formal contexts[J]. Knowledge-Based Systems,2011,24(5):709-715.

[14] LI J H,MEI C L,LV Y J. Knowledge reduction in real decision formal contexts[J]. Information Sciences, 2012, 189(7): 191-207.

[15] LI J H,MEI C L,WANG J H,et al. Rule-preserved object compression in formal decision contexts using concept lattices[J]. Knowledge-Based Systems,2014,71:435-445.

[16] LI J H,LV Y J. Attribute reduction and rules extraction in decision formal context based on concept lattice[J]. Mathematics in Practice and Theory,2009,39(7):182-188.(in Chinese)
李金海,吕跃进.基于概念格的决策形式背景属性约简及规则提取[J].数学的实践与认识,2009,39(7):182-188.

[17] SHAO M W,LEUNG Y,WU W Z. Rule acquisition and complexity reduction in formal decision contexts[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2014,55(1):259-274.

[18] LI J J,ZHANG Y L,WU W Z,et al. Attribute reduction for formal context and consistent decision formal context and concept lattice generation [J]. Chinese Journal of Computer, 2014, 37(8):1768-1774.(in Chinese)
李进金,张燕兰,吴伟志,等.形式背景与协调决策形式背景属性约简与概念格生成[J].计算机学报,2014,37(8):1768-1774.