P-推理与信息的 P-推理发现-辨识

史开泉

(山东大学数学与系统科学学院 济南 250100)

摘 要 P-集合(Packet sets)是把动态特性引入到有限普通集合 X 内(Cantor set X),改进有限普通集合 X 得到的一个新的数学结构与数学模型。P-集合是由内 P-集合 $X^{\bar{F}}$(internal packet set $X^{\bar{F}}$)与外 P-集合 X^{F}(outer packet set X^{F})构成的集合对;或者,$(X^{\bar{F}},X^{F})$ 是 P-集合。P-集合具有动态性。利用 P-集合,给出内 P-推理(internal packet reasoning)、外 P-推理(outer packet reasoning)、P-推理(packet reasoning)与推理模型的图形表示;P-推理的结构是:if $(\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^{\bar{F}})\Rightarrow(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^{\bar{F}})$,then $((x)_{k+1}^F,(x)_k^{\bar{F}})\Rightarrow((x)_k^F,(x)_{k+1}^{\bar{F}})$。给出内 P-推理与信息删除定理、外 P-推理与信息补充定理、P-推理与信息删除-补充定理、P-推理与普通推理关系定理、信息单位圆、内 P-推理信息圆、外 P-推理信息圆概念、P-推理信息圆的动态特性定理、推理信息圆-未知信息的内发现准则、推理信息圆-未知信息的外发现准则。利用这些结果,给出内 P-推理在未知内-信息发现-辨识中的应用。因为 P-推理是一个动态过程,给出 P-推理的属性扰动特征、内 P-推理的内 P-扰动定理、外 P-推理的外 P-扰动定理与 P-推理的 P-扰动定理。在内 P-推理中,因为内 P-扰动存在,使得内 P-推理结论中的信息丢了部分信息元;在外 P-推理中,因为外 P-扰动存在,使得外 P-推理结论中的信息被补充了部分信息元。P-集合是智能信息系统中的一个应用前景看好的新模型、新方法。

关键词 P-集合,P-推理,信息删除,信息补充,信息单位圆,未知信息发现,应用

P-reasoning and P-reasoning Discovery-identification of Information

SHI Kai-quan

(School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Jinan 250010, China)

Abstract By embedding the dynamic characteristics into the finite Cantor set X and improving it, a novel mathematics structure and model was obtained, which is P-sets(Packet sets). P-sets is a set-pair composed of internal P-set $X^{\bar{F}}$ (internal packet set $X^{\bar{F}}$) and outer P-set X^{F} (outer packet set X^{F}), or $(X^{\bar{F}},X^{F})$ is P-sets. Based on P-sets, internal P-reasoning(internal packet reasoning), out p-reasoning(outer packet reasoning), P-reasoning(packet reasoning) and the diagrammatic representation of reasoning model were given. The structure of P-reasoning is "if $(\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^{\bar{F}})\Rightarrow(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^{\bar{F}})$, then $((x)_{k+1}^F,(x)_k^{\bar{F}})\Rightarrow((x)_k^F,(x)_{k+1}^{\bar{F}})$". A few theorems were presented, which are internal P-reasoning and information deleting theorem, outer P-reasoning and information supplementing theorem, P-reasoning and information deleting-supplementing theorem, the relation theorem of P-reasoning and general reasoning and so on. A few concepts were given, which are information unit circle, internal P-reasoning information circle and outer P-reasoning information circle. The dynamic characteristics theorem of P-reasoning information circle was given. The internal discovery and outer discovery criterion of reasoning information circle-unknown information were given. By using the results, the application of internal packet reasoning in the unknown internal information discovery-identification was given. The attribute perturbation characteristic of P-reasoning, internal P-perturbation theorem of internal P-reasoning, outer P-perturbation theorem of outer P-reasoning and P-perturbation of P-reasoning were obtained using the dynamic characteristic of P-reasoning. In the internal P-reasoning, owing to the existence of internal P-perturbation, part information in the internal P-reasoning conclusion is lost. In the outer P-reasoning, owing to the existence of outer P-perturbation, part information is supplemented into the outer P-reasoning conclusion. P-sets is a novel model and method with good application prospect in the intelligent information system.

Keywords P-sets, P-reasoning, Information deleting, Information supplementing, Information unit circle, Unknown information discovery, Application

1 引言

有限普通集合(Cantor set X)$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\subset U$ 具有 3 个特性:I. X 具有边界确定性,II. X 具有精确性,III. X 具有静态性。特性 I,II,III 潜藏在有限普通集合 X 内;1965 年之后,人们才注意到特性 I,II,III,例如 $X=\{x_1,x_2x_3,x_4,$

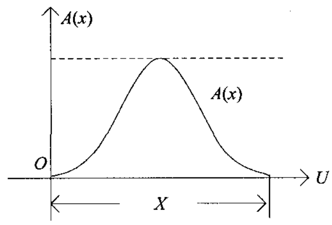
到稿日期:2010-08-24 返修日期:2010-11-12 本文受河南省科技攻关项目(102102210425)资助。

史开泉(1945—),男,教授,博士生导师,主要研究领域为粗集理论与应用、信息系统与信息识别理论与应用,E-mail:shikq@sdu.edu.cn。

$x_5\}$是由 5 个男人组成的集合，X 内没有女人；显然，集合 X 的边界具有确定性。X 内有 5 个元素 x_1,x_2x_3,x_4,x_5，X 内的元素个数是精确的；显然，集合 X 具有精确性。X 内有 5 个元素 x_1,x_2x_3,x_4,x_5，不允许 X 之外的元素 y_k 进入 X 内，或者 $y_k\in X$；也不允许 X 内的元素 x_i 离开 X，或者 $x_i\overline{\in}X$；$i\in(1,2,3,4,5)$；显然，集合 X 具有静态性。特性 I,II,III 容易被人们接受与认可。

1965 年，杰出学者 L. A. Zadeh 教授用“边界不确定性”代替“边界确定性”，改进了有限普通集合 X，提出了模糊集合(Fuzzy sets)[1]，给出了模糊集合的数学结构与模糊集合的图像[1]，如图 1 所示。

$$A:X\to[0,1]$$
$$x\to A(x)$$



U 是论域，X 是 U 上的非空有限普通集合，A 是 $\mathscr{F}(X)$上的模糊集合，$A(x)\in[0,1]$是 $x\in X$ 关于模糊集合 A 的隶属函数。

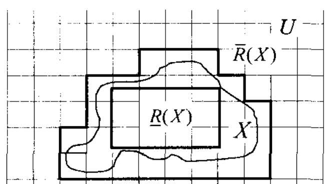
图 1

例如，A 是被定义在 $X\subset U$ 上的一个“老年人”模糊集合，如果 60 岁是老年人，那么 61 岁是不是老年人？63 岁是不是老年人？显然，“老年人”模糊集合的边界是不确定的。事实上，若 60 岁被定义成“老年人”，则 61,63,…,70,78 等都应该是老年人；这些人“老年”的程度是不相同的。

1982 年，杰出学者 Z. Pawlak 教授用“近似性”代替“精确性”改进了有限普通集合 X，提出了粗集合(Rough sets) $(R_-(X),R^-(X))$[6]，给出了粗集合的数学结构与图像[6]，如图 2 所示：

$$R_-(X)=\bigcup[x]=\{x\mid x\in U,[x]\subseteq X\}$$
$$R^-(X)=\bigcup[x]=\{x\mid x\in U,[x]\cap X\neq\phi\}(R_-(X),R^-(X))$$

式中，$R_-(X)$是 $X\subset U$ 的下近似，$R^-(X)$是 $X\subset U$ 的上近似；$(R_-(X),R^-(X))$是 $X\subset U$ 的 R-粗集合；R 是等价关系。



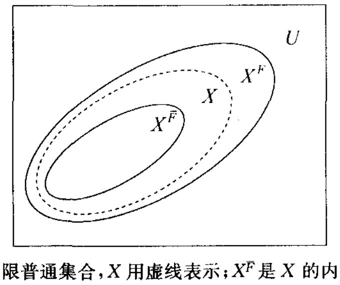
$R_-(X),R^-(X)$分别是 $X\subset U$ 的下近似，上近似；X 是 U 上的有限普通集合，X 用不规则的封闭曲线表示；$(R_-(X),R^-(X))$是 $X\subset U$ 的 R-粗集。$R_-(X),R^-(X)$用粗实线表示。

图 2

因为集合 $X\subset U$ 的边界不规则；用 $R_-(X),R^-(X)$共同“近似逼近”集合 X(图 2 中用不规则的封闭曲线表示 X)；或者，用$(R_-(X),R^-(X))$近似地表示集合 X。模糊集合在信息系统中的多个应用领域中得到了应用[1-5]；粗集合在信息系统中的多个领域中得到了应用[6-10]。

2008 年，文献[11,12]用“动态性”代替“静态性”改进了有限普通集合 X，提出了 P-集合(Packet sets)，给出了 P-集合的数学结构与图像[11,12]，如图 3 所示。

$$(X^{\overline{F}},X^F)$$
$$\{(X_i^{\overline{F}},X_j^F)\mid i\in I,j\in J\}$$



X 是 U 上的有限普通集合，X 用虚线表示；$X^{\overline{F}}$是 X 的内 P-集合，X^F 是 X 的外 P-集合，$X^{\overline{F}},X^F$ 用实线表示；$(X^{\overline{F}},X^F)$是 $X\subset U$ 的 P-集合。

图 3

因为 X 内的一些元素被删除(X 的属性集 α 内被补充一些属性)，X 变成 $X^{\overline{F}}$，$X^{\overline{F}}\subseteq X$；因为 X 外的一些元素被补充到 X 内(X 的属性集 α 内被删除一些属性)，X 变成 X^F，$X\subseteq X^F$；因为 X 内的一些元素被删除，同时 X 外的一些元素被补充到 X 内，得到图 3。

人们自然提出一个问题：用“动态性”代替有限普通集合 X 的“静态性”，改进有限普通集合 X 得到 P-集合；或者，把动态性引入到有限普通集合 X 中，改进有限普通集合 X 得到 P-集合，P-集合具有动态特性。能否利用 P-集合，得到一个新的推理模型？利用这个新的推理模型能否发现不曾被人们事先知道的未知信息？这是因为：在一类重要信息系统(例如，水下目标跟踪识别，隐形运动目标的辨识)的应用研究中，人们要求事先知道：信息的特征集(属性集)发生变化，原来的信息将变成什么？这显然是一个推理过程。

本文利用 P-集合的结构与动态特性，给出内 P-推理、外 P-推理与 P-推理；给出推理定理、推理扰动定理、推理信息圆；利用这些研究，回答人们提出问题。

为了便于讨论，先给出两个预备概念，这两个预备概念对于接受本文给出的讨论是重要的。

集合的属性特征

给定有限普通集合 $X\doteq\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$X$ 具有属性集合 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$，例如：$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$是 4 个具有红色、甜味的苹果 x_1,x_2,x_3,x_4 构成的集合，属性 $\alpha_1=$红色，属性 $\alpha_2=$甜味；集合 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$具有属性集 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2\}$。如果在 α 内补充一个属性 $\alpha_3=$重量 100 克，α 变成 $\alpha'=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$；集合 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$变成集合 $X'=\{x_1,x_3\}$。如果在 α 内删除属性 α_2，α 变成 $\alpha''=\{\alpha_1,\alpha_3\}$；集合 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$变成 $X''=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$。集合的属性特征，容易被人们接受。

元素迁移族与元素迁移

$F=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$被称作元素迁移族[11-13]，$\forall f_i\in F$ 被称作元素迁移[11-13]；$f\in F$ 的特征是：$\exists u\in U,u\overline{\in}X,f\in F$ 把 u 变成 $f(u)=x'\in X$；或者，$\exists\beta\in V,\beta\overline{\in}\alpha,f\in F$ 把 β 变成 $f(\beta)=\alpha'\in\alpha$。这里：$X$ 是元素集合，α 是属性集合，U 是有限元素论域，V 是有限属性论域。$\overline{F}=\{\overline{f}_1,\overline{f}_2,\cdots,\overline{f}_m\}$被称作元素迁移族[11-13]，$\forall\overline{f}_i\in\overline{F}$ 被称作元素迁移[11-13]；$\overline{f}\in\overline{F}$ 的特征是：$\exists x_i\in X,\overline{f}\in\overline{F}$ 把 x_i 变成 $\overline{f}(x_i)=u_i\overline{\in}X$；或者，$\exists\alpha_i\in\alpha$，$\overline{f}\in\overline{F}$ 把 α_i 变成 $f(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha$。在应用中，$f\in F,\overline{f}\in\overline{F}$ 是一个给定的函数(或者变换)。

为了讨论的方便，又保持本文内容的完整，容易接受本文给出的结果，把 P-集合引入到本文的第 2 节中，作为本文的理论准备。

2 P-集合与它的结构

约定 U 是有限元素论域，V 是有限属性论域，X 是 U 上的有限非空普通集合，α 是 V 上的有限非空属性集合。

2008 年，文献[11,12]把动态特性引入到有限普通集合 X 内，改进有限普通集合 X，给出：

给定集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}\subset U$，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\subset V$ 是 X 的属性集合，称 X^F 是 X 生成的内 P-集合(internal packet set X^F)，简称 X^F 是内 P-集合，而且

$$X^F=X-X^- \tag{1}$$

X^- 称作 X 的 $\overline{F}$-元素删除集合，而且

$$X^-=\{x|x\in X,\overline{f}(x)=u\overline{\in}X,\overline{f}\in\overline{F}\} \tag{2}$$

如果 X^F 的属性集合 α^F 满足

$$\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha'|f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\} \tag{3}$$

式中，$\beta\in V,\beta\overline{\in}\alpha$；$f\in F$ 把 β 变成 $f(\beta)=\alpha'\in\alpha$；$X^F\neq\phi$。式(1)中 $X^F=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$，$p\leqslant q$；$p,q\in N^+$。

给定集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}\subset U$，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\subset V$ 是 X 的属性集合，称 X^F 是 X 生成的外 P-集合(outer packet set X^F)，简称 X^F 是外 P-集合，而且

$$X^F=X\cup X^+ \tag{4}$$

X^+ 称作 X 的 F-元素补充集合，而且

$$X^+=\{x|u\in U,u\overline{\in}X,f(u)=x'\in X,f\in F\} \tag{5}$$

如果 X^F 的属性集合 α^F 满足

$$\alpha^F=\alpha-\{\beta_i|\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha,\overline{f}\in\overline{F}\} \tag{6}$$

式中，$\alpha_i\in\alpha$，$\overline{f}\in\overline{F}$ 把 α_i 变成 $\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha$；$\alpha^F\neq\phi$；式(4)中 $X^F=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$，$q\leqslant r$；$q,r\in N^+$。

由内 P-集合 X^F 与外 P-集合 X^F 构成的集合对，称作有限普通集合 X 生成的 P-集合(packet sets)，简称 P-集合，而且

$$(X^F,X^F) \tag{7}$$

X 称作 P-集合(X^F,X^F)的基集合(基础集合)。

由式(3)得到：

$$\alpha_1^F\subseteq\alpha_2^F\subseteq\cdots\subseteq\alpha_{n-1}^F\subseteq\alpha_n^F \tag{8}$$

满足式(8)的内 P-集合 X^F 是

$$X_n^F\subseteq X_{n-1}^F\subseteq\cdots\subseteq X_2^F\subseteq X_1^F \tag{9}$$

由式(6)得到：

$$\alpha_n^F\subseteq\alpha_{n-1}^F\subseteq\cdots\subseteq\alpha_2^F\subseteq\alpha_1^F \tag{10}$$

满足式(10)的外 P-集合 X^F 是

$$X_1^F\subseteq X_2^F\subseteq\cdots\subseteq X_{n-1}^F\subseteq X_n^F \tag{11}$$

利用式(9)、式(11)，式(7)变成

$$\{(X_i^F,X_j^F)|i\in I,j\in J\} \tag{12}$$

式(12)是 P-集合的一般表达式；I,J 是指标集(index set)。

式(12)指出：P-集合是由若干个集合对(X_i^F,X_j^F)构成的集合对族。

由式(1)—式(6)，式(8)—式(11)得到：

定理 1 若 $F=\overline{F}=\phi$，则 P-集合与有限普通集合 X 满足

$$(X^F,X^F)_{F=\overline{F}=\phi}=X \tag{13}$$

定理 2 若 $F=\overline{F}=\phi$，则 P-集合与有限普通集合 X 满足

$$\{(X_i^F,X_j^F)|i\in I,j\in J\}_{F=\overline{F}=\phi}=X \tag{14}$$

式中，$X\subset U$ 是有限普通集合；(X^F,X^F)，$\{(X_i^F,X_j^F)|i\in I,j\in J\}$是 P-集合；$F=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$，$\overline{F}=\{\overline{f}_1,\overline{f}_2,\cdots,\overline{f}_m\}$是元素迁移族；$F$ 是元素迁移 f_i 构成的集合，$\overline{F}$ 是元素迁移 $\overline{f}_j$ 构成的集合。式(13)、式(14)的证明由式(1)—式(6)直接得到，证明略。

式(13)、式(14)指出：在 $F=\overline{F}=\phi$ 的条件下，P-集合(X^F,X^F)，$\{(X_i^F,X_j^F)|i\in I,j\in J\}$回到有限普通集合 X 的“原点”；或者，在 $F=\overline{F}=\phi$ 的条件下，P-集合(X^F,X^F)，$\{(X_i^F,X_j^F)|i\in I,j\in J\}$被还原成有限普通集合 X。

P-集合的动态特征

若在属性集 α 内不断地给予属性补充，X 的属性集 α 变成式(8)，则集合 X 变成式(9)，集合 X 变成一个内 P-集合串，集合 X 具有了内-动态特性(X 向内收缩)。若在属性集 α 内不断地给予属性删除，X 的属性集 α 变成式(10)，则集合 X 变成式(11)，集合 X 变成一个外 P-集合串，集合 X 具有了外-动态特性(X 向外扩张)。若在属性集 α 内不断地给予属性补充，同时又在属性集 α 内不断地给予属性删除，则集合 X 变成集合对(X^F,X^F)；或者，集合 X 变成若干个集合对(X_i^F,X_j^F)；(X^F,X^F)，$\{(X_i^F,X_j^F)|i\in I,j\in J\}$是 P-集合，P-集合具有了动态特性。

利用 2 节中的概念，3 节中给出：

3 P-推理生成与普通推理的关系

约定 在 3，4 节的讨论中，2 节中的 X^F,X,X^F 分别记作 $(x)^F,(x),(x)^F$；或者，$(x)^F=X^F,(x)=X,(x)^F=X^F$；不引起误解。

称$(x)=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}$是 U 上的一个信息，如果(x)具有属性集 α，

$$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\} \tag{15}$$

称$(x)_{k+1}^F$是$(x)_k^F$的内 P-推理生成信息，简称$(x)_{k+1}^F$是内 P-推理信息，如果$(x)_k^F$的属性集 α_k^F 与$(x)_{k+1}^F$的属性集 α_{k+1}^F，$(x)_k^F$与$(x)_{k+1}^F$满足

$$\text{if }\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F,\text{then}(x)_{k+1}^F\Rightarrow(x)_k^F \tag{16}$$

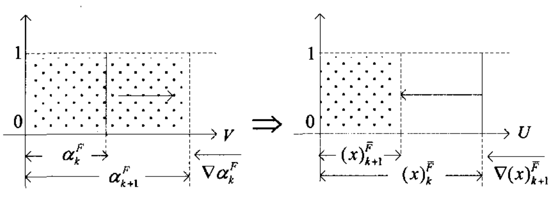
if $\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F$，then$(x)_{k+1}^F\Rightarrow(x)_k^F$称作内 P-集合生成的内 P-推理(internal packet reasoning)，简称内 P-推理。$\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F$称作内 P-推理条件，$(x)_{k+1}^F\Rightarrow(x)_k^F$称作内 P-推理结论。其中，$k\in(1,2,\cdots,n-1)$；$\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F$ 与 $\alpha_k^F\subseteq\alpha_{k+1}^F$ 等价；$(x)_{k+1}^F\Rightarrow(x)_k^F$ 与$(x)_{k+1}^F\subseteq(x)_k^F$等价。

在式(16)中，若 $\alpha_k^F=\alpha$，则式(16)变成

$$\text{if }\alpha\Rightarrow\alpha_1^F,\text{then }(x)_1^F\Rightarrow(x) \tag{17}$$

式(17)中的$(x)_1^F$与(x)，满足：$(x)_1^F=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}\subseteq\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}=(x)$；$p,q\in N^+$。

图 4 给出式(16)的直观表示。



α_k^F 内被补充属性，α_k^F 变成 α_{k+1}^F，$\alpha_k^F\subset\alpha_{k+1}^F$；$\alpha_k^F$，$\alpha_{k+1}^F\subset V$

$(x)_k^F$ 内被删除元素，$(x)_k^F$ 变成 $(x)_{k+1}^F$，$(x)_{k+1}^F\subset(x)_k^F$；$(x)_k^F$，$(x)_{k+1}^F\subset U$

图 4

称$(x)_{k+1}^F$是$(x)_k^F$的外 P-推理生成信息，简称$(x)_{k+1}^F$是外 P-推理信息，如果$(x)_k^F$的属性集 α_k^F 与$(x)_{k+1}^F$的属性集 α_{k+1}^F，$(x)_k^F$与$(x)_{k+1}^F$满足

$$\text{if }\alpha_{k+1}^F\Rightarrow\alpha_k^F,\text{then }(x)_k^F\Rightarrow(x)_{k+1}^F \tag{18}$$

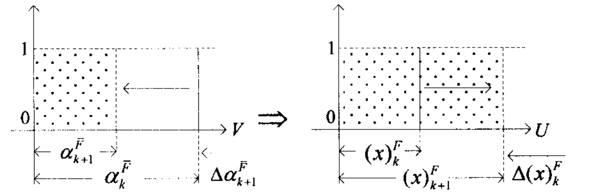
if $\alpha_{k+1}^F \Rightarrow \alpha_k^F$，then $(x)_k^F \Rightarrow (x)_{k+1}^F$ 称作外P-集合生成的外P-推理(outer packet reasoning)，简称外P-推理。$\alpha_{k+1}^F \Rightarrow \alpha_k^F$ 称作外P-推理条件，$(x)_k^F \Rightarrow (x)_{k+1}^F$ 称作外P-推理结论。

在式(18)中，若 $\alpha_k^F=\alpha$，则式(18)变成

$$\text{if } \alpha_1^F \Rightarrow \alpha, \text{ then } (x) \Rightarrow (x)_1^F \tag{19}$$

式(19)中的 $(x)_1^F$ 与 (x)，满足：$(x)=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}\subseteq\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}=(x)_1^F$；$q,r\in N^+$。

图5给出式(18)的直观表示。



α_k^F 内被删除属性，α_k^F 变成 α_{k+1}^F，$\alpha_{k+1}^F \subset \alpha_k^F$；$\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^F \subset V$

$(x)_k^F$ 内被补充元素，$(x)_k^F$ 变成 $(x)_{k+1}^F$，$(x)_k^F \subset (x)_{k+1}^F$，$(x)_k^F,(x)_{k+1}^F \subset U$

图5

称 $((x)_k^F,(x)_{k+1}^F)$ 是 (x) 的内P-推理与外P-推理生成信息，简称 $((x)_k^F,(x)_{k+1}^F)$ 是P-推理信息，如果 $(\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^F)$ 与 $(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^F)$，$((x)_k^F,(x)_{k+1}^F)$ 与 $((x)_{k+1}^F,(x)_k^F)$ 满足

$$\text{if } (\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^F)\Rightarrow(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^F) \text{ then } ((x)_{k+1}^F,(x)_k^F)\Rightarrow((x)_k^F,(x)_{k+1}^F) \tag{20}$$

$$\text{if } (\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^F)\Rightarrow(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^F) \text{ then } ((x)_{k+1}^F,(x)_k^F)\Rightarrow((x)_k^F,(x)_{k+1}^F)$$

称作P-集合生成的P-推理(packet reasoning)，简称P-推理。$(\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^F)\Rightarrow(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^F)$ 称作P-推理条件，$((x)_{k+1}^F,(x)_k^F)\Rightarrow((x)_k^F,(x)_{k+1}^F)$ 称作P-推理结论。

若 $\alpha_k^F=\alpha,\alpha_k^F=\alpha$，则式(20)变成

$$\text{if } (\alpha,\alpha_1^F)\Rightarrow(\alpha_1^F,\alpha) \text{ then } ((x)_1^F,(x))\Rightarrow((x),(x)_1^F) \tag{21}$$

称

$$\{((x)_{k+1}^F,(x)_k^F)\Rightarrow((x)_k^F,(x)_{k+1}^F)\mid k\in I\} \tag{22}$$

是P-推理生成的P-推理信息族，简称P-推理信息族。

式(20)中，$(\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^F)\Rightarrow(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^F)$ 表示：$\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F$，$\alpha_{k+1}^F\Rightarrow\alpha_k^F$；$k=1,2,\cdots,n-1$。

定理3(内P-推理与信息删除定理) 若 $(x)_{k+1}^F$ 是 $(x)_k^F$ 的内P-推理信息，则存在信息 $\nabla(x)_{k+1}^F$ 满足

$$\nabla(x)_{k+1}^F\neq\phi \tag{23}$$

式中，$\nabla(x)_{k+1}^F$ 是 $(x)_k^F$ 在内P-推理中从 $(x)_k^F$ 内删除的信息元 x_i 构成的信息，$\nabla(x)_{k+1}^F=(x)_k^F-(x)_{k+1}^F=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}-\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}=\{x_{p+1},x_{p+2},\cdots,x_q\}$。

定理4(外P-推理与信息补充定理) 若 $(x)_{k+1}^F$ 是 $(x)_k^F$ 的外P-推理信息，则存在信息 $\Delta(x)_{k+1}^F$ 满足

$$\Delta(x)_{k+1}^F\neq\phi \tag{24}$$

式中，$\Delta(x)_{k+1}^F$ 是 $(x)_k^F$ 在外P-推理中从 $(x)_k^F$ 外补充到 $(x)_k^F$ 内的信息元 x_j 构成的信息，$\Delta(x)_{k+1}^F=(x)_{k+1}^F-(x)_{k1}^F=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}-\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}=\{x_{q+1},x_{q+2},\cdots,x_r\}$。

定理3,4分别从图4,5直观地得到，定理3,4的证明略。

定理5(P-推理与信息删除-补充定理) 若 $((x)_{k+1}^F,(x)_{k+1}^F)$ 是P-推理信息 $((x)_k^F,(x)_k^F)$ 的P-推理生成，则

$$((x)_{k+1}^F,(x)_{k+1}^F)=((x)_k^F-\nabla(x)_{k+1}^F,(x)_k^F\cup\Delta(x)_{k+1}^F) \tag{25}$$

式(25)表示：$(x)_{k+1}^F=(x)_k^F-\nabla(x)_{k+1}^F$，$(x)_{k+1}^F=(x)_k^F\cup\Delta(x)_{k+1}^F$。

证明：因为 $(x)_{k+1}^F$ 是 $(x)_k^F$ 的内P-推理信息，则 $(x)_{k+1}^F$ 与 $(x)_k^F$ 满足式(16)：$(x)_{k+1}^F\Rightarrow(x)_k^F$；或者 $(x)_{k+1}^F\subseteq(x)_k^F$。由式(16)得到 $(x)_{k+1}^F$ 的属性集 α_{k+1}^F 与 $(x)_k^F$ 的属性集 α_k^F 满足 $\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F$；或者，$\alpha_k^F\subseteq\alpha_{k+1}^F$，$\text{card}(\alpha_k^F)\leqslant\text{card}(\alpha_{k+1}^F)$，这里：card=cardinal number。显然，存在 $\nabla(x)_{k+1}^F\neq\phi$；从 $(x)_k^F$ 内删除 $\nabla(x)_{k+1}^F$ 得到 $(x)_{k+1}^F$。利用式(18)，容易得到：$(x)_{k+1}^F=(x)_k^F\cup\Delta(x)_{k+1}^F$。

定理6(P-推理与信息的属性定理) 若 $(\nabla(x)_{k+1}^F,\Delta(x)_{k+1}^F)$ 是P-推理信息 $((x)_k^F,(x)_k^F)$ 生成的差信息，而且

$$(\nabla(x)_{k+1}^F,\Delta(x)_{k+1}^F)=\phi \tag{26}$$

则内P-推理信息 $(x)_k^F$ 的属性集 α_k^F 与内P-推理信息 $(x)_{k+1}^F$ 的属性集 α_{k+1}^F，外P-推理信息 $(x)_k^F$ 的属性集 α_k^F 与外P-推理信息 $(x)_{k+1}^F$ 的属性集 α_{k+1}^F 分别满足

$$\alpha_{k+1}^F-\{\beta_i\mid\alpha_i\in\alpha_{k+1}^F,\bar f(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha_{k+1}^F,\bar f\in\bar F\}=\alpha_k^F \tag{27}$$

$$\alpha_{k+1}^F\cup\{\alpha_i'\mid\beta_i\in V,\beta_i\overline{\in}\alpha_k^F,\bar f(\beta_i)=\alpha'\in\alpha_k^F,f\in F\}=\alpha_k^F \tag{28}$$

式(26)表示：$\nabla(x)_{k+1}^F=\phi$，$\Delta(x)_{k+1}^F=\phi$；$\nabla(x)_{k+1}^F$ 是内P-推理信息 $(x)_k^F$ 生成的差信息；$\Delta(x)_{k+1}^F$ 是外P-推理信息 $(x)_k^F$ 生成的差信息。

证明：式(26)等价于 $\nabla(x)_{k+1}^F=\phi$ 与 $\Delta(x)_{k+1}^F=\phi$。对于 $\nabla(x)_{k+1}^F$，利用式(16)得到：$(x)_{k+1}^F\Rightarrow(x)_k^F$；或者，$(x)_{k+1}^F\subseteq(x)_k^F$；$(x)_{k+1}^F$ 的属性集 α_{k+1}^F 与 $(x)_k^F$ 的属性集 α_k^F 满足：$\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F$；或者，$\alpha_k^F\subseteq\alpha_{k+1}^F$。若 $\nabla(x)_{k+1}^F=\phi$，则 $(x)_{k+1}^F$ 与 $(x)_k^F$ 具有相同的属性集；显然，从 α_{k+1}^F 内删除属性集 $\{\beta_i\mid\alpha_i\in\alpha_{k+1}^F,\bar f(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha_{k+1}^F,\bar f\in\bar F\}$；或者 $\alpha_{k+1}^F-\{\beta_i\mid\alpha_i\in\alpha_{k+1}^F,\bar f(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha_{k+1}^F,\bar f\in\bar F\}=\alpha_k^F$，得到式(27)。式(28)的证明与式(27)类似，证明略。

推论1 若 $\nabla(x)_{k+1}^F=\phi$，则内P-推理信息 $(x)_k^F$ 的属性集 α_k^F 与内P-推理信息 $(x)_{k+1}^F$ 的属性集 α_{k+1}^F 满足

$$(\alpha_{k+1}^F-\{\beta_i\mid\alpha_i\in\alpha_{k+1}^F,\bar f(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha_{k+1}^F,\bar f\in\bar F\})-\alpha_k^F=\phi \tag{29}$$

推论2 若 $\Delta(x)_{k+1}^F=\phi$，则外P-推理信息 $(x)_k^F$ 的属性集 α_k^F 与外P-推理信息 $(x)_{k+1}^F$ 的属性集 α_{k+1}^F 满足

$$(\alpha_{k+1}^F\cup\{\alpha_i'\mid\beta_i\in V,\beta_i\overline{\in}\alpha_k^F,\bar f(\beta_i)=\alpha'\in\alpha_k^F,f\in F\})-\alpha_k^F=\phi \tag{30}$$

定理7(P-推理与普通推理第一关系定理) 若 $F=\bar F=\phi$，则P-推理与普通推理满足

$$\{\text{if }(\alpha\Rightarrow\alpha_k^F,\alpha_k^F\Rightarrow\alpha)\text{ then }((x)_k^F\Rightarrow(x),(x)\Rightarrow(x)_k^F)\}_{F=\bar F=\phi}=\{\text{if }\alpha^*\text{ then }(x)^*\} \tag{31}$$

证明：利用2节中的式(1)—式(3)，$F=\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$，$\bar F=\{\bar f_1,\bar f_2,\cdots,\bar f_n\}$ 得到：

$$\alpha_1^F=\alpha\cup\{\alpha_1'\mid\beta_1\in V,\beta_1\overline{\in}\alpha,f_1(\beta_1)=\alpha_1'\in\alpha,f_1\in F\}$$

$$\alpha_2^F=\alpha_1^F\cup\{\alpha_2'\mid\beta_2\in V,\beta_2\overline{\in}\alpha_1^F,f_2(\beta_2)=\alpha_2'\in\alpha_1^F,f_2\in F\}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n^F=\alpha_{n-1}^F\cup\{\alpha_n'\mid\beta_n\in V,\beta_n\overline{\in}\alpha_{n-1}^F,f_n(\beta_n)=\alpha_n'\in\alpha_{n-1}^F,f_n\in F\} \tag{32}$$

$(x)_1^{\overline{F}}=(x)-\{u_1 \mid x_1\in(x),\overline{f}_1(x_1)=u_1\overline{\in}(x),\overline{f}_1\in\overline{F}\}$

$(x)_2^{\overline{F}}=(x)_1^{\overline{F}}-\{u_2 \mid x_2\in(x)_1^{\overline{F}},\overline{f}_2(x_2)=u_2\overline{\in}(x)_1^{\overline{F}},\overline{f}_2\in\overline{F}\}$

$\vdots$

$(x)_n^{\overline{F}}=(x)_{n-1}^{\overline{F}}-\{u_n \mid x_n\in(x)_{n-1}^{\overline{F}},\overline{f}_n(x_n)=u_n\overline{\in}(x)_{n-1}^{\overline{F}},\overline{f}_n\in\overline{F}\}$ (33)

若 $F=\{f\},\overline{F}=\{\overline{f}\}$，则式(32)，式(33)变成

if $\{\alpha\Rightarrow(\alpha\cup\{\alpha' \mid \beta\in V,\beta\overline{\in}\alpha,f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\})\}$,

then $\{((x)-\{u \mid x\in(x),\overline{f}(x)=u\overline{\in}(x),\overline{f}\in\overline{F}\})\Rightarrow(x)\}$ (34)

令 $\alpha^*=\alpha\cup\{\alpha' \mid \beta\in V,\beta\overline{\in}\alpha,f(\beta)=\alpha',f\in F\},(x)^*=(x)-\{u \mid x\in(x),\overline{f}(x)=u\overline{\in}(x),\overline{f}\in\overline{F}\}$；由式(34)得到

if $\alpha\Rightarrow\alpha^*$, then $(x)^*\Rightarrow(x)$ (35)

若 $F=\overline{F}=\phi$，则式(35)中的 α 与 α^*，$(x)^*$ 与 (x) 分别满足：$\alpha=\alpha^*,(x)^*=(x)$；式(35)变成

if α, then (x) (35)*

因此，得到式(31)。

式(35)*就是被人们经常使用的普通推理。

定理 8(P-推理与普通推理第二关系定理) 若 $F=\overline{F}=\phi$，则 P-推理与普通推理满足

$\{\text{if }(\alpha\Rightarrow\alpha_k^F,\alpha_k^{\overline{F}}\Rightarrow\alpha),\text{then}((x)_k^{\overline{F}}\Rightarrow(x),(x)\Rightarrow(x)_k^F)\}_{F=\overline{F}=\phi}=\{\text{if }\alpha^o,\text{then }(x)^o\}$ (36)

证明：利用 2 节中的式(4)—式(6)，$F=\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$，$\overline{F}=\{\overline{f}_1,\overline{f}_2,\cdots,\overline{f}_n\}$得到

$\alpha_1^{\overline{F}}=\alpha-\{\beta_1 \mid \alpha_1\in\alpha,\overline{f}_1(\alpha_1)=\beta_1\overline{\in}\alpha,\overline{f}_1\in\overline{F}\}$

$\alpha_2^{\overline{F}}=\alpha_1^{\overline{F}}-\{\beta_2 \mid \alpha_2\in\alpha_1^{\overline{F}},\overline{f}_2(\alpha_2)=\beta_2\overline{\in}\alpha_1^{\overline{F}},\overline{f}_2\in\overline{F}\}$

$\vdots$

$\alpha_n^{\overline{F}}=\alpha_{n-1}^{\overline{F}}-\{\beta_n \mid \alpha_n\in\alpha_{n-1}^{\overline{F}},\overline{f}_n(\alpha_n)=\beta_n\overline{\in}\alpha_{n-1}^{\overline{F}},\overline{f}_n\in\overline{F}\}$

$(x)_1^F=(x)\cup\{x_1' \mid u_1\in U,u_1\overline{\in}(x),f_1(u_1)=x_1'\in(x),f_1\in F\}$

$(x)_2^F=(x)_1^F\cup\{x_2' \mid u_2\in U,u_2\overline{\in}(x)_1^F,f_2(u_2)=x_2'\in(x)_1^F,f_2\in F\}$

$\vdots$

$(x)_n^F=(x)_{n-1}^F\cup\{x_n' \mid u_n\in U,u_n\overline{\in}(x)_{n-1}^F,f_n(u_n)=x_n'\in(x)_{n-1}^F,f_n\in F\}$

若 $F=\{f\},\overline{F}=\{\overline{f}\}$，得到

if $\{(\alpha-\{\beta_1 \mid \alpha_1\in\alpha,\overline{f}(\alpha_1)=\beta_1\in\alpha,\overline{f}\in\overline{F}\})\Rightarrow\alpha\}$,

then$\{(x)\Rightarrow((x)\cup\{x_1' \mid u_1\in U,u_1\overline{\in}(x),f(u_1)=x_1'\in(x),f\in F\})\}$

令 $\alpha^o=\alpha-\{\beta_1 \mid \alpha_1\in\alpha,\overline{f}(\alpha_1)=\beta_1\overline{\in}\alpha,\overline{f}\in\overline{F}\},(x)^o=(x)\cup\{x_1' \mid u_1\in U,u_1\overline{\in}(x),f(u_1)=x'\in(x),f\in F\}$，则有

if $\alpha^o\Rightarrow\alpha$, then $(x)\Rightarrow(x)^o$

若 $F=\overline{F}=\phi$，则 α^o 与 α，$(x)^o$ 与 (x) 分别满足 $\alpha^o=\alpha,(x)^o=(x)$；得到

if α, then (x)

得到式(36)；if α, then (x) 是人们经常使用的普通推理。

由定理 7,8 得到：

命题 1 在动态-静态条件下，P-推理是普通推理的一般形式，普通推理是 P-推理的特例。

利用几何的直观方法，对 3 节中的结果再认识，4 节中给出：

4 P-推理信息圆与它的动态特征

给定 $(x)=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}$，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$ 是 (x) 的属性集，Y 称作 (x) 生成的信息值集合，而且

$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_q\}$ (37)

称 γ 是(x)的信息尺度(scale)，而且

$\gamma=\|Y\|/\|Y\|$ (38)

式中，$\|Y\|=(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_q^2)^{\frac{1}{2}}$ 是向量 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_q)^T$ 的 2-范数，$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_q)^T$ 是信息值集合 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_q\}$ 生成的向量。

称 $Y^{\overline{F}}$ 是内 P-推理信息 $(x)^{\overline{F}}=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$ 生成的信息值集合，而且

$Y^{\overline{F}}=\{y_1,y_2,\cdots,y_p\}$ (39)

称 $\gamma^{\overline{F}}$ 是 $(x)^{\overline{F}}$ 的信息尺度(scale)，而且

$Y^{\overline{F}}=\|Y^{\overline{F}}\|/\|Y\|$ (40)

式中，$(x)^{\overline{F}}$ 具有属性集 $\alpha^{\overline{F}}$；$(x)^{\overline{F}}$ 的属性集 $\alpha^{\overline{F}}$ 与 (x) 的属性集 α 满足：$\alpha\subseteq\alpha^{\overline{F}}$；$\|Y^{\overline{F}}\|=(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2)^{\frac{1}{2}}$ 是向量 $Y^{\overline{F}}=(y_1,y_2,\cdots,y_p)^T$ 的 2-范数；$Y^{\overline{F}}=(y_1,y_2,\cdots,y_p)^T$ 是信息值集合 $Y^{\overline{F}}=\{y_1,y_2,\cdots,y_p\}$ 生成的向量。

称 Y^F 是外 P-推理信息 $(x)^F=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$ 生成的信息值集合，而且

$Y^F=\{y_1,y_2,\cdots,y_r\}$ (41)

称 γ^F 是 $(x)^F$ 的信息尺度(scale)，而且

$Y^F=\|Y^F\|/\|Y\|$ (42)

式中，$(x)^F$ 具有属性集 α^F；$(x)^F$ 的属性集 α^F 与 (x) 的属性集 α 满足：$\alpha^F\subseteq\alpha$；$\|Y^F\|=(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2)^{\frac{1}{2}}$；式(37)，式(39)，式(41)中的 p,q,r 满足：$p\leqslant q\leqslant r$；$p,q,r\in N^+$。

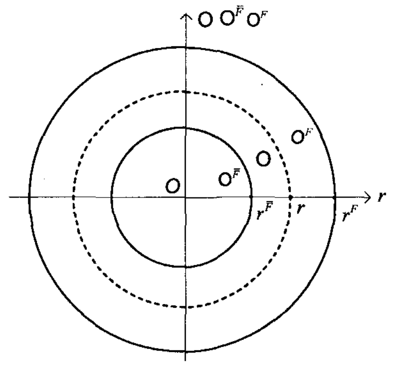
以坐标原点 O 为圆心，以信息尺度 γ 为半径作圆 $\mathcal{O}$，$\mathcal{O}$ 称作 (x) 生成的信息单位圆。

称 $O^{\overline{F}},O^F$ 分别是内 P-推理信息圆，外 P-推理信息圆；如果 $O^{\overline{F}}$ 的圆心是坐标原点 O，半径是信息尺度 $\gamma^{\overline{F}}$；如果 O^F 的圆心是坐标原点 O，半径是信息尺度 γ^F。

这里：$O^{\overline{F}}$ 是 $(x)^{\overline{F}}$ 生成的信息圆，O^F 是 $(x)^F$ 生成的信息圆。

称 $O^{\overline{F}}-O^F$ 是由内 P-推理信息圆 $O^{\overline{F}}$ 与外 P-推理信息圆 O^F 构成的 P-推理信息环；$O^{\overline{F}},O^F$ 分别称作 $O^{\overline{F}}-O^F$ 的内-边界，外-边界。

图 6 给出信息单位圆 $\mathcal{O}$，内 P-推理信息圆 $O^{\overline{F}}$，外 P-推理信息圆 O^F，P-推理信息环 $O^{\overline{F}}-O^F$ 的直观表示。



信息单位圆 $\mathcal{O}$，γ 是 $\mathcal{O}$ 的半径，$\mathcal{O}$ 被信息 (x) 生成；$\mathcal{O}$ 用虚线表示。内 P-推理信息圆 $O^{\overline{F}}$，$\gamma^{\overline{F}}$ 是 $O^{\overline{F}}$ 的半径，$O^{\overline{F}}$ 被内 P-推理信息 $(x)^{\overline{F}}$ 生成；$O^{\overline{F}}$ 用实线表示。外 P-推理信息圆 O^F，γ^F 是 O^F 的半径，O^F 被外 P-推理信息 $(x)^F$ 生成；O^F 用实线表示。$O_k^{\overline{F}}-O_k^F$ 是由 $O^{\overline{F}}$ 与 O^F 构成的 P-推理信息环。

图 6

容易得到：

定理 9(内-同心圆定理)　若$(x)_k^F$是(x)的一个内 P-推理信息，则$(x)_k^F$生成的内 P-推理信息圆 O_k^F是信息单位圆O的一个内-同心圆，而且

$$O_k^F \subset O \tag{43}$$

式中，O是(x)生成的信息单位圆，符号"$\subset$"表示 O_k^F被包围在O内。

定理 10(外-同心圆定理)　若$(x)_\lambda^F$是(x)的一个外 P-推理信息，则$(x)_\lambda^F$生成的外 P-推理信息圆 O_λ^F是信息单位圆O的一个外-同心圆，而且

$$O \subset O_\lambda^F \tag{44}$$

式中，符号"$\subset$"表示 O_λ^F被包围在O外。

定理 11(P-信息环定理)　若$((x)_k^F,(x)_\lambda^F)$是(x)的一个 P-推理信息，则$((x)_k^F,(x)_\lambda^F)$生成一个信息环，而且

$$O_k^F - O_\lambda^F \tag{45}$$

O_k^F,O_λ^F分别是信息环 $O_k^F-O_\lambda^F$的内-边界与外-边界。式中，$k\neq\lambda,k,\lambda\in(1,2,\cdots,n)$。

定理 9—定理 11 的证明利用式(37)—式(42)，$\gamma^F\leqslant\gamma\leqslant\gamma^{\bar{F}}$ 与图 6 直观得到，证明略。

推论 3　若信息(x)的属性集α内被补充部分属性，则信息单位圆O被萎缩成一个内 P-推理信息圆 O_p^F。

推论 4　若信息(x)的属性集α内被删除部分属性，则信息单位圆O被扩展成一个外 P-推理信息圆 O_q^F。

推论 5　若信息(x)的属性集α内被补充部分属性，同时又被删除另外一部分属性，则信息单位圆O生成一个信息环 $O_p^F-O_q^F$。

定理 12(P-推理信息环的动态特性定理)　若$((x)_{k+1}^F,(x)_k^F)$,$((x)_k^F,(x)_{k+1}^F)$是 P-推理信息，而且

$$((x)_{k+1}^F,(x)_k^F)\Rightarrow((x)_k^F,(x)_{k+1}^F) \tag{46}$$

则　1°. O_{k+1}^F,O_k^F是单位信息圆O的内-同心圆，而且

$$O_{k+1}^F \subset O_k^F \tag{47}$$

O_{k+1}^F,O_k^F是单位信息圆O的外-同心圆，而且

$$O_k^F \subset O_{k+1}^F \tag{48}$$

2°. 信息环 $O_{k+1}^F-O_{k+1}^F$与信息环 $O_k^F-O_k^F$满足

$$O_k^F-O_k^F \subset O_{k+1}^F-O_{k+1}^F \tag{49}$$

式(46)表示：$(x)_{k+1}^F\Rightarrow(x)_k^F$,$(x)_k^F\Rightarrow(x)_{k+1}^F$；"$\Rightarrow$"与"$\subseteq$"等价；式(47)，式(48)中的"$\subset$"的意义与式(43)，式(44)中的"$\subset$"的意义相同；式(49)中的"$\subset$"表示，$O_k^F-O_k^F$被包在 $O_{k+1}^F-O_{k+1}^F$内。

证明：由 3 节中的式(20)，4 节中的式(37)—式(42)与定理 11 直接得到式(47)—式(49)，证明略。

命题 2　P-推理中，存在最小内 P-信息圆 O_*^F，最大外 P-信息圆 O_*^F。

命题 3　P-推理中，信息单位圆O具有有限个内 P-信息圆 O_k^F与有限个外 P-信息圆 O_k^F。

对 3 节、4 节中的结果给出再讨论，5 节中给出：

5　P-推理与它的属性扰动定理

"扰动"一词取自控制理论，把"扰动"一词移植到这里表示：在内 P-推理中，如果在内 P-推理中条件中，存在属性集合$\nabla\alpha_k^F$,$\nabla\alpha_k^F$ 被补充到属性集合 α_k^F 内(或者，$\nabla\alpha_k^F$ 进入 α_k^F 内)；在外 P-推理中，如果在外 P-推理中条件中，存在属性集合$\Delta\alpha_k^F$,$\Delta\alpha_k^F$从属性集合 α_k^F内被删除(或者，$\Delta\alpha_k^F$离开 α_k^F内)；在这样的条件下，内 P-推理结论，外 P-推理结论发生什么样的变化？在$\nabla\alpha_k^F$ 补充到 α_k^F 内，$\Delta\alpha_k^F$被从 α_k^F内删除同时存在的条件下，P-推理结论发生什么样的变化？人们要求知道这个事实。或者，$\nabla\alpha_k^F$ 被补充到 α_k^F 内；$\Delta\alpha_k^F$从 α_k^F内被删除；内 P-推理结论，外 P-推理结论生成什么样的扰动特征？或者，同时存在$\nabla\alpha_k^F$ 补充到 α_k^F 内，$\Delta\alpha_k^F$从 α_k^F内被删除，P-推理结论生成什么样的扰动特征？这些特征是动态信息研究中被人们经常遇到的，这些特征对于认识动态信息系统是十分必要的。利用 3 节、4 节中的结果，给出这些问题的讨论。

称属性集合$(\alpha_k^F\cup\nabla\alpha_k^F)$是属性集合 α_k^F 的内 P-属性扰动生成，如果 α_k^F 与$(\alpha_k^F\cup\nabla\alpha_k^F)$满足

$$\alpha_k^F\Rightarrow(\alpha_k^F\cup\nabla\alpha_k^F) \tag{50}$$

式中，$\nabla\alpha_k^F\neq\phi,k=1,2,\cdots,n$。

称属性集合$(\alpha_k^F-\Delta\alpha_k^F)$是属性集合 α_k^F的外 P-属性扰动生成，如果 α_k^F与$(\alpha_k^F-\Delta\alpha_k^F)$满足

$$(\alpha_k^F-\Delta\alpha_k^F)\Rightarrow\alpha_k^F \tag{51}$$

式中，$(\alpha_k^F-\Delta\alpha_k^F)\neq\phi,\Delta\alpha_k^F\neq\phi,k=1,2,\cdots,n$；式(50)、式(51)中"$\Rightarrow$"与"$\subseteq$"等价。

称属性集合$((\alpha_k^F\cup\nabla\alpha_k^F),(\alpha_k^F-\Delta\alpha_k^F))$是属性集合$(\alpha_k^F,\alpha_k^F)$的 P-属性扰动生成，如果$(\alpha_k^F\cup\nabla\alpha_k^F)$是内 P-属性扰动生成，$(\alpha_k^F-\Delta\alpha_k^F)$是外 P-属性扰动生成，而且满足

$$(\alpha_k^F,\alpha_k^F)\rightleftharpoons((\alpha_k^F\cup\nabla\alpha_k^F),(\alpha_k^F-\Delta\alpha_k^F)) \tag{52}$$

式中，"$\rightleftharpoons$"是一个特别的符号，"$\rightleftharpoons$"表示：$\alpha_k^F\Rightarrow(\alpha_k^F\cup\nabla\alpha_k^F)$,$(\alpha_k^F-\Delta\alpha_k^F)\Rightarrow\alpha_k^F$。

由式(50)—式(52)得到：

定理 13(内 P-推理的内 P-扰动定理)　若 α_k^F 是信息$(x)_k^F$的属性集合，则存在属性集合$\nabla\alpha_k^F$ 满足

$$\text{if } \alpha_k^F\Rightarrow(\alpha_k^F\cup\nabla\alpha_k^F),\text{then } ((x)_k^F-\nabla(x)_k^F)\Rightarrow(x)_k^F \tag{53}$$

式中，$\nabla(x)_k^F$是从信息$(x)_k^F$内被删除的信息，$k=1,2,\cdots,n$。

定理 13 指出：内 P-推理条件中存在属性扰动($\nabla\alpha_k^F$ 入侵到 α_k^F 内)，引起内 P-推理结论中的信息扰动($\nabla(x)_k^F$从$(x)_k^F$内被删除)；或者，内 P-推理结论具有了动态特征。

定理 14(外 P-推理的外 P-扰动定理)　若 α_k^F是信息$(x)_k^F$的属性集合，则存在属性集合 $\Delta\alpha_k^F$满足

$$\text{if } (\alpha_k^F-\Delta\alpha_k^F)\Rightarrow\alpha_k^F,\text{then } (x)_k^F\Rightarrow((x)_k^F\cup\Delta(x)_k^F) \tag{54}$$

式中，$\Delta(x)_k^F$ 是被补充到信息$(x)_k^F$ 内的信息，$k=1,2,\cdots,n$。

定理 14 指出：外 P-推理条件中存在属性扰动($\Delta\alpha_k^F$从 α_k^F内被删除)，引起外 P-推理结论中的信息扰动($\Delta(x)_k^F$被补充到$(x)_k^F$内)；或者，外 P-推理结论具有了动态特性。

定理 15(P-推理的 P-扰动定理)　若 α_k^F,α_k^F分别是信息$(x)_k^F$,$(x)_k^F$ 的属性集合，则存在属性集合$\nabla\alpha_k^F$,$\Delta\alpha_k^F$满足

if $(\alpha_k^F,\alpha_k^F)\rightleftharpoons((\alpha_k^F\cup\nabla\alpha_k^F),(\alpha_k^F-\Delta\alpha_k^F))$

then $(((x)_k^F-\nabla(x)_k^F),((x)_k^F\cup\Delta(x)_k^F))\rightleftharpoons((x)_k^F,(x)_k^F)$ (55)

式中,$\nabla(x)_k^F$ 是从 $(x)_k^F$ 内被删除的信息,$\Delta(x)_k^F$ 是被补充到 $(x)_k^F$ 内的信息,$k=1,2,\cdots,n$。

定理 15 指出:P-推理条件中存在属性扰动($\nabla\alpha_k^F$ 入侵到 α_k^F 内与 $\Delta\alpha_k^F$ 从 α_k^F 内删除),引起 P-推理结论中的信息扰动(部分信息从 $(x)_k^F$ 内被删除与部分信息被补充到 $(x)_k^F$ 内)。

定理 13—定理 15 的证明由 2 节中的 P-集合结构式(1)—式(7)、式(12);3 节中的式(16)、式(18)、式(20)直接得到,证明略。

由定理 13—定理 15 得到:

命题 4 存在内 P-扰动的内 P-推理,内 P-推理结论中的信息 $(x)^F$ 一部分信息元 x_i 在扰动中被丢失。

命题 5 存在外 P-扰动的外 P-推理,外 P-推理结论中的信息 $(x)^F$ 在扰动中被补充信息元 x_j。

命题 6 存在 P-扰动的 P-推理,P-推理结论中的信息 $((x)^F,(x)^F)$ 在扰动中被丢失信息元 x_i 又被补充信息元 x_j。

定理 16(P-推理的 P-扰动失效定理) 若 α_k^F,α_k^F 分别是信息 $(x)_k^F,(x)_k^F$ 的属性集合,存在属性集合 $\nabla\alpha_k^F,\Delta\alpha_k^F$ 满足

if $(\alpha_k^F,\alpha_k^F)\Leftrightarrow((\alpha_k^F\cup\nabla\alpha_k^F),(\alpha_k^F-\Delta\alpha_k^F))$

then $(((x)_k^F-\nabla(x)_k^F),((x)_k^F\cup\Delta(x)_k^F))\Leftrightarrow((x)_k^F,(x)_k^F)$ (56)

则

$\mathrm{UNI}\{(((x)_k^F-\nabla(x)_k^F),((x)_k^F\cup\Delta(x)_k^F)),((x)_k^F,(x)_k^F)\}$ (57)

式中,UNI=unidentification;式(56)中,“$\Leftrightarrow$”与“=”等价。

定理 16 指出:P-推理结论中的信息具有“刚性”特征;在属性补充,属性删除的条件下,P-推理结论保持不变。“刚性”一词取自物理学。

利用 3 节—5 节的讨论,6 节中给出:

6 P-推理与未知信息发现-应用

在讨论未知信息发现之前,先给出两个准则。

推理信息圆-未知信息内-发现准则

若信息 $(x)^0$ 生成的信息圆 O^0 是信息单位圆 O 的一个内圆,则 $(x)^0$ 是在 (x) 内被发现的一个未知信息,$(x)^0\subset(x)$,$(x)^0=(x)^F$。

推理信息圆-未知信息外-发现准则

若信息 $(x)^*$ 生成的信息圆 O^* 是信息圆单位圆 O 的一个外圆,则 $(x)^*$ 是在 (x) 外被发现的一个未知信息,$(x)\subset(x)^*$,$(x)^*=(x)^F$。

利用 3 节一节 5 中给出的讨论与本节中的准则,尽量避开过多的专业概念,这里给出一个通俗,能被一般人接受的例子;为了简单,又不失理论的一般性,例子只给出内 P-推理在未知内-信息辨识-发现中的应用。

给定 x_1-x_{10} 是山东大学控制科学与工程学院本科学生它们列入表 1 中。

表 1 x_1-x_{10} 与它们的属性集合 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
α			α_1		α_2		α_3			

表 1 中,属性 α_1=一年级,α_2=男性,α_3=20 岁;x_1-x_{10} 的特征值(x_1-x_{10} 的身高,cm)列入表 2 中。

表 2 x_1-x_{10} 的特征值(信息元 x_1-x_{10} 的信息值)

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
y	1.66	1.68	1.70	1.73	1.68	1.80	1.78	1.82	1.69	1.76

把表 1 写成信息 (x),表 2 写成信息 (x) 的信息值集合 y,而且

$(x)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\}$ (58)

$(y)=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6,y_7,y_8,y_9,y_{10}\}$
$=\{1.66,1.68,1.70,1.73,1.68,1.80,1.78,1.82,1.69,1.76\}$ (59)

(x) 具有属性集合 α,而且

$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ (60)

利用 3 节中给出的讨论,容易得到:

if $\alpha\Leftrightarrow\alpha$, then $(x)\Leftrightarrow(x)$ (61)

式中,符号“$\Leftrightarrow$”与“=”等价。

在属性集 α 内补充属性 β_1=重庆市,α 变成 α_1^F,而且

$\alpha_1^F=\alpha\cup\{f(\beta_1)\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1'\}$ (62)

由式(61)得到:

if $\alpha\Rightarrow\alpha_1^F$, then $(x)_1^F\Rightarrow(x)$ (63)

式(63)给出:$(x)_1^F=\{x_3,x_9\}$,$(x)_1^F$ 是 (x) 的一个内 P-推理信息;$(x)_1^F\subset(x)$。

在属性集 α 内补充属性 β_2=重庆市渝北区,α 变成 α_2^F,而且

$\alpha_2^F=\alpha_1^F\cup\{f(\beta_2)\}=\alpha\cup\{f(\beta_1),f(\beta_2)\}$
$=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1',\alpha_2'\}$ (64)

由式(63)得到:

if $\alpha\Rightarrow\alpha_2^F$, then $(x)_2^F\Rightarrow(x)$ (65)

式(65)给出:$(x)_2^F=\{x_9\}$,$(x)_2^F$ 是 (x) 的一个内 P-推理信息,$(x)_2^F\subset(x)$。

由表 1—表 2,式(58)—式(65)与 3 节中的式(16),在内 P-推理的方式下,在 (x) 内找到重庆市的学生 x_3,x_9;找到重庆市渝北区学生 x_9;或者,由式(62)—式(65),利用内 P-推理的方式,在 (x) 内发现了内 P-信息 $(x)_1^F,(x)_2^F$;内 P-信息 $(x)_1^F,(x)_2^F$ 是不曾被人们事先知道的未知信息;在这之前,人们只知道 x_1-x_{10} 是山东大学控制科学与工程学院,大学一年级,男性,20 岁的一群学生。

由式(59)与式(38)得到:$\gamma=\|Y\|/\|Y\|=1$,由 $\gamma=1$ 为半径得到 (x) 的信息单位圆 O。由内 P-信息 $(x)_1^F=\{x_3,x_9\}$ 的信息值集合 $Y_1^F=\{y_3,y_9\}=\{1.70,1.69\}$ 与式(40)得到 $\gamma_1^F=\|Y_1^F\|/\|Y\|=0.44$,由 $\gamma_1^F=0.44$ 为半径得到 $(x)_1^F$ 生成的内 P-信息圆 O_1^F,O_1^F 是 O 的一个内-同心圆。由内 P-信息 $(x)_2^F=\{x_9\}$ 的信息值集合 $Y_2^F=\{y_9\}=\{1.69\}$ 与式(40)得到 $\gamma_2^F=\|Y_2^F\|/\|Y\|=0.31$,由 $\gamma_2^F=0.31$ 为半径得到 $(x)_2^F$ 生成的内 P-信息圆 O_2^F,O_2^F 是 O 的一个内-同心圆。O_1^F 与 O_2^F 满足:$O_2^F\subset O_1^F$。

由推理信息圆-未知信息内-发现准则得到:$(x)_2^F,(x)_1^F$ 是在 (x) 内被发现的未知信息。由命题 2 得到:在式(65)的条

件下，$(x)_2^{\overline{F}}$ 生成最小内-信息圆 $O_*^{\overline{F}}$，$O_*^{\overline{F}}=O_2^{\overline{F}}$。由定理11、定理12得到：$O_2^{\overline{F}}$，$O_1^{\overline{F}}$ 与 O 分别构成信息环：$O_2^{\overline{F}}-O$，$O_1^{\overline{F}}-O$。

显然，由内P-推理式(63)、式(65)得到 $(x)_1^{\overline{F}}$ 与 (x)，$(x)_2^{\overline{F}}$ 与 (x) 满足

$$IDE((x)_1^{\overline{F}},(x)) \tag{66}$$

$$IDE((x)_2^{\overline{F}},(x)) \tag{67}$$

再回到本节例子的开头：$(x)_1^{\overline{F}}=\{x_3,x_9\}$，$(x)_2^{\overline{F}}=\{x_9\}$ 在内P-推理中，从 $(x)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\}$ 内被发现-辨识。$(x)_1^{\overline{F}}$ 与 $(x)_2^{\overline{F}}$ 满足5节中的定理13与命题4。

式(67)中 IDE=identification。

本文3节—5节的讨论与本节中的一个简单例子给出一个思想：利用 if $\alpha\Rightarrow\alpha_k^F$，then $(x)_k^{\overline{F}}\Rightarrow(x)$ 能够找到事先不为人知的信息 $(x)_\lambda^{\overline{F}}$，$k=1,2,\cdots,n,\lambda\in(1,2,\cdots,n)$；显然，if $\alpha\Rightarrow\alpha_k^F$，then $(x)_k^{\overline{F}}\Rightarrow(x)$ 表达了这个寻找未知信息 $(x)_\lambda^{\overline{F}}$ 的动态过程，这个过程的本质是：$\alpha\Rightarrow\alpha_1^F$，$(x)_1^{\overline{F}}\Rightarrow(x)$；$\alpha\Rightarrow\alpha_2^F$，$(x)_2^{\overline{F}}\Rightarrow(x)$；$(x)_n^{\overline{F}}\subseteq(x)_{n-1}^{\overline{F}}\subseteq\cdots\subseteq(x)_2^{\overline{F}}\subseteq(x)_1^{\overline{F}}\subseteq(x)$。这个思想可移植到下列专业应用领域中，这些应用研究领域是：信息科学：机器人智能识别、信息图像的塑性变换、计算机视觉识别、信息动态分类；控制科学：离散系统的状态识别、系统故障状态判断-恢复；生物医学工程：病变细胞的形态识别、医学影像的比对-识别；材料科学：新材料发现、新材料成分的数值估计。这些应用前景看好的应用领域留给对此感兴趣的读者去讨论。

7 诸多讨论

7.1 函数的搬迁特性与P-集合的存在

函数 f 这个数学中常见的基础概念，估计不知道的人很少；或许有人这样说："函数是一个数学定义，一个定义有什么好说的?"。事实上，在这个普通的数学定义中，存在着一些被人们不屑一顾的东西。给定区间 $[a,b]$，$[c,d]$，$[a,b]\cap[c,d]=\phi$；f 是给定的一个函数，$[a,b]$ 是 f 的定义域，$[c,d]$ 是 f 的值域；$\forall x_i\in[a,b]$，$f(x_i)=y_i\in[c,d]$ 得到：取 $x_1,x_2,\cdots,x_m\in[a,b]$，$f$ 把 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 变成 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m)\in[c,d]$，等价于 f 把 $x_1,x_2,\cdots,x_m\in[a,b]$ 搬迁到 $[c,d]$ 中；在搬迁过程中，f 把 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 变成 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m)\in[c,d]$。显然，"搬迁"是个动态过程；换一个说法，函数 f 使得 $[a,b]$ 中的 $x_i\in[a,b]$ 搬迁到 $[c,d]$ 中；或者，$f(x_i)\in[c,d]$。函数 f 的搬迁特性早已潜藏在函数定义中，搬迁特性或许未引起人们对它的兴趣。函数 f 的搬迁特性，催生了P-集合的生成，函数 f 的搬迁特性，还原了有限普通集合 X 的动态的原本面貌。

在P-集合中，函数 f 被定义为"元素迁移"，利用对有限普通集合 X 的属性集合 α 内的属性 $\alpha_k\in\alpha$，从 α 内迁出到 α 外；或者 $\overline{f}(\alpha_k)=\beta_k\overline{\in}\alpha$。利用对有限普通集合 X 的属性集合 α 外的属性 $\beta_k\overline{\in}\alpha$，从 $\beta_k\overline{\in}\alpha$ 外迁入到 $\beta_k\overline{\in}\alpha$ 内；或 $f(\beta_k)=\alpha_k'\in\alpha$，有限普通集合 X 变成外P-集合 X^F，有限普通集合 X 变成内P-集合 $X^{\overline{F}}$；P-集合 $(X^{\overline{F}},X^F)$ 被生成。因为属性集合 α 内的多个不同属性被多次迁出到 α 外，α 外的多个不同属性被多次迁入到 α 内；这个动态特性使得P-集合的集合对族的存在；或者 $\{(X_i^{\overline{F}},X_i^F)\mid i\in I,j\in J\}$ 存在。"元素迁移"是P-集合动态特性的"核心概念"。因此，P-集合是由一串集合对 $(X_i^{\overline{F}},X_i^F)$ 构成的数学结构。本文中式(1)—式(14)给出这个结构。

7.2 P-集合与P-推理的关系

从式(1)—式(14)的P-集合结构中直观地得到：设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\subset U$ 是有限普通集合，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\subset V$ 是 X 的属性集合；如果在 α 内补充属性，α 变成 α_1^F，$\alpha\subseteq\alpha_1^F$；则 X 变成 $X_1^{\overline{F}}$，$X_1^{\overline{F}}\subseteq X$；如果在 α 内删除属性，α 变成 $\alpha_1^{\overline{F}}$，$\alpha_1^{\overline{F}}\subseteq\alpha$；则 X 变成 X_1^F，$X\subseteq X_1^F$，如此等等。显然，这个过程与人类大脑通过推理认识事物相似，因此

$$\alpha\subseteq\alpha_k^F\Rightarrow X_k^{\overline{F}}\subseteq X \tag{68}$$

$$\alpha_k^F\subseteq\alpha\Rightarrow X\subseteq X_k^F \tag{69}$$

式(69)能够等价地表示成式(70)—式(72)的形式

$$\text{if } \alpha\Rightarrow\alpha_k^F,\ \text{then } X_k^{\overline{F}}\Rightarrow X \tag{70}$$

$$\text{if } \alpha_k^{\overline{F}}\Rightarrow\alpha,\ \text{then } X\Rightarrow X_k^F \tag{71}$$

$$\begin{aligned}&\text{if } ((\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^{\overline{F}})\Rightarrow(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^{\overline{F}}))\\&\text{then}((X_{k+1}^{\overline{F}},X_k^F)\Rightarrow(X_k^{\overline{F}},X_{k+1}^F))\end{aligned} \tag{72}$$

式(68)—式(72)给出P-集合生成的P-推理过程；这个过程在信息智能识别中被人们经常使用，却未引起人们对它的重视。事实上，式(1)—式(14)给出的表示与式(68)—式(72)给出的表示是等价的；或许有人这样说：有限普通集合 X 的属性集合 α 内的属性补充，属性删除利用推理得到P-集合 $(X^{\overline{F}},X^F)$，$\{(X_i^{\overline{F}},X_i^F)\mid i\in I,\ j\in J\}$。推理的本身是一个动态过程，这个动态过程就是P-集合的动态特性。

7.3 未知信息发现的几何特征

在本文中，利用P-集合生成的P-推理，发现不曾被人们事先知道的未知信息(在粗集中称作知识发现)，这些未知信息不是在 (x) 内被发现就是在 (x) 外被发现；或者 $(x)_k^{\overline{F}}\subseteq(x)$，$(x)\subset(x)_k^F$，二者必居其一；被发现的未知信息有小，有大(或者 card$((x)_k^{\overline{F}})$ 小，card$((x)_k^F)$ 大)。人们自然要问：被发现的未知信息 $(x)_k^{\overline{F}}$ 或者 $(x)_k^F$，能否找到一个具有一般意义的直观几何图形，利用这个图形来认识它们? 为此，本文用信息 $(x)=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 生成一个半径 $\gamma=1$ 的信息单位圆 O，凡是被发现的未知信息 $(x)_k^{\overline{F}}$，都在 O 内($(x)_k^{\overline{F}}$ 生成内P-推理信息圆 $O_k^{\overline{F}}\subset O$)；凡是被发现的未知信息 $(x)_k^F$，都在 O 外($(x)_k^F$ 生成外P-推理信息圆 $O_k^F\supset O$)。如果把信息单位圆 O 移植到计算机视觉识别系统中，如果系统工作正常，则系统在任意时刻 $t_\lambda\in T$ 的输出构成半径 $\gamma=1$ 的同一个信息单位圆 O。信息单位圆已成为动态信息系统工作状态直观认识的几何图形度量与表示。

本文对P-推理的简短讨论或许给读者认识P-集合的结构、P-集合的应用提供帮助，或许本文给出的P-推理与P-推理过程启迪读者从这些讨论及这些结果中悟出一些更新的想法与得到更新的研究；作者欣喜地看到，这些新的研究将来自充满希望的年轻一代。

参 考 文 献

[1] Zadeh L A. Fuzzy Sets[J]. Information and Control, 1965(8): 338-353

[2] Zadeh L A. A fuzzy-set-theoretical interpretation of linguistic hedges[J]. Journal of Cybernetics, 1972(5): 4-34

[3] Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes[J]. IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics, 1973(3): 28-44

[4] Zimmermann H J. Fuzzy programming and linear programming with several objective function[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978(1):45-56
[5] Gaines B R. Foundation of fuzzy reasoning [J]. International Journal of Man-Machine Studies, 1976(8):623-668
[6] Pawlak Z. Rough Sets [J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982(11):341-356
[7] Mrozek A. Rough Sets and dependency analysis among attribute in computer implementation of experts inference models[J]. International Journal of Man-Machine Studies, 1989(30):457-473
[8] Nakamura A. A rough logic based on incomplete information and its application [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 1996(15):267-378
[9] Miyamoto S. Application of rough Sets to information retrieval [J]. Journal of the American Society for Information Sciences, 1998(49):195-203
[10] Duntsch I. Rough relation algebras[J]. Fundamenta Informaticae, 1994(21):321-331
[11] 史开泉. P-集合[J]. 山东大学学报:理学版, 2008, 43(11):77-84
[12] Shi Kai-quan. P-Sets and its applications[J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2009, 9(2):209-219
[13] 史开泉. P-集合与它的应用特性[J]. 计算机科学, 2010, 37(8):1-8
[14] Shi Kai-quan, Li Xiu-hong. Camouflaged information identification and its application [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10(2):157-167
[15] 张丽, 崔玉泉, 史开泉. 外 P-集合与数据内-恢复[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(6):1233-1238
[16] 张飞, 陈萍, 张丽. P-集合的 P-分离与应用[J]. 山东大学学报:理学版, 2010, 45(3):18-22
[17] 史开泉, 张丽. 内 P-集合与数据外-恢复[J]. 山东大学学报理学版, 2009, 44(4):8-14
[18] Zhang Li, Cui Yu-quan. Outer P-Sets and data internal recovery [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10(2):189-199
[19] Zhang Li, Xiu Ming, Shi Kai-quan. P-Sets and applications of internal-outer data Circle[J]. Quantitative Logic and Soft Computing, 2010, 1(2):581-592
[20] Li Yu-ying, Zhang Li, Shi Kai-quan. Generation and Recovery of Compressed data and Redundant data [J]. Quantitative Logic and Soft Computing, 2010, 1(2):661-672
[21] Xiu Ming, Shi Kai-quan, Zhang Li. P-Sets and $\overline{F}$-data Selection-Discovery[J]. Quantitative Logic and Soft Computing, 2010, 1(2):791-800
[22] 周玉华, 张冠宇, 张丽. 内-外数据圆与动态数据-恢复[J]. 山东大学学报:理学版, 2010, 45(8):21-26
[23] Lin Hong-kang, Li Yu-ying. P-Sets and its P-Separation theorems[J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10(2):209-215
[24] 周玉华, 张冠宇, 史开泉. P-集合与双信息规律生成[J]. 数学的实践与认识, 2010, 40(13):71-80
[25] Wang Yang, Geng Hong-qin, Shi Kai-quan. The mining of dynamic information based on P-Sets and its application[J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10(2):234-240
[26] Zhang Guan-yu, Li En-zhong. Information gene and identification of its information Knock-out/Knock-in [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10(2):308-315
[27] Huang Shun-liang, Wang Wei, Geng Dian-you. P-Sets and its internal P-memory Characteristics[J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10(2):216-222
[28] Liu Ji-qin. P-Probabilities and its application [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10(2):200-222
[29] 张冠宇, 周厚勇, 史开泉. P-集合与双 P-数据恢复-辨识[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(9):1919-1924
[30] 于秀清. P-集合的识别与筛选[J]. 山东大学学报:理学版, 2010, 45(1):94-98
[31] 汤积华, 陈保会, 史开泉. P-集合与($\overline{F}$, F)数据生成-辨识[J]. 山东大学学报:理学版, 2009, 44(11):83-92
[32] 李豫颖, 谢维奇, 史开泉. $\overline{F}$-残缺数据的辨识与恢复[J]. 山东大学学报:理学版, 2009, 45(9):57-64
[33] 刘若慧, 刘保仓, 史开泉. 外 P-集合与 F-信息伪装[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(1):116-119
[34] 耿红琴, 张冠宇, 史开泉. F-信息伪装与伪装-还原辨识[J]. 计算机科学, 2011, 38(2):241-245
[35] 汪洋, 张冠宇, 史开泉. P-集合与 $\overline{F}$-记忆信息特征-应用[J]. 计算机科学, 2011, 38(2):246-249
[36] 于秀清. P-集合与 F-外嵌入信息辨识-发现[J]. 计算机科学, 2011, 38(2):250-253
[37] 史开泉, 姚炳学. 函数 S-粗集与规律辨识 [J]. 中国科学 E:信息科学, 2008, 38(4):553-564
[38] 史开泉, 赵建立. 函数 S-粗集与隐藏规律安全-认证 [J]. 中国科学 E:信息科学, 2008, 38(8):1234-1243
[39] Shi Kai-quan, Yao Bing-xue. Function S-rough sets and law identification[J]. Sciences in China, F: Information Sciences, 2008, 51(5):499-510
[40] Shi Kai-quan, Zhao Jian-li. Function S-rough sets and Security-authentication of hiding law[J]. Sciences in China, F: Information Sciences, 2008, 51(7):924-935
[41] Shi Kai-quan. Function S-rough sets and mining-discovery of rough law in system[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2006, 17(2):330-338
[42] Shi Kaiquan, Chang Ting-cheng. One direction S-rough sets[J]. International Journal of Fuzzy Mathematics, 2005, 13(2):239-344
[43] Shi Kai-quan. Two direction S-rough sets[J]. International Journal of Fuzzy Mathematics, 2005, 13(2):335-349
[44] 史开泉. S-粗集与数据挖掘单位圆特征[J]. 计算机科学, 2010, 37(5):1-8
[45] 史开泉, 姚炳学. 函数 S-粗集与系统规律挖掘[M]. 北京:科学出版社, 2007:10-68