

基于非局部 TV 正则化的波原子去噪算法

吴玉莲^{1,2} 冯象初¹

(西安电子科技大学理学院 西安 710071)¹ (西安医学院 西安 710021)²

摘要 结合新的多尺度几何分析工具波原子和非局部 TV 正则化提出了一种新的纹理图像去噪模型。该模型充分利用了波原子对振荡纹理图像的稀疏表示和非局部 TV 能较好地处理纹理图像的优点,使得新方法处理后的纹理图像避免了伪吉布斯振荡现象。实验结果表明,新方法的信噪比有一定提高,在保持图像的细节方面与单纯的波原子阈值和非局部 TV 比较也有明显的改善,取得了比较好的视觉效果。

关键词 图像去噪,波原子,纹理,非局部 TV,阈值

中图分类号 TP391 文献标识码 A

Denoising Algorithm with Wave Atoms Based on Nonlocal TV Regularization

WU Yu-lian^{1,2} FENG Xiang-chu¹

(School of Science, Xidian University, Xi'an 710071, China)¹ (Xi'an Medical College, Xi'an 710021, China)²

Abstract A novel denoising model for texture images was proposed, which combines the new multiscale geometric analysis tool—wave atoms and nonlocal total variation regularization scheme. This model well considers the advantages: wave atoms which has the ability of sparse representation of the oscillatory texture images and nonlocal TV version has the ability to handle better textures. Numerical experiments show that the proposed model significantly improves the SNR, performance of preserving details is much better than both only wave atoms threshold and nonlocal TV, therefore together with better visual effects.

Keywords Image denoising, Wave atoms, Textures, Nolocal TV, Threshold

1 引言

去噪是图像处理领域最重要的问题之一。小波分析是 20 世纪 90 年代出现的一门新的数学方法,由于具有时-频局部化特点和多尺度特性,在图像处理的多个领域,如纹理识别、边缘检测、图像去噪和恢复等方面得到了广泛应用。小波对含点状奇异的目标函数是最优的基,但是对具有线状奇异的函数而言,小波并不能达到最优的稀疏逼近。

为了克服小波表示高维数据的局限性,Candes 和 Donoho 等利用多尺度几何分析的思想,相继提出了正交脊波^[1]、第 1 代曲线波^[2]和第 2 代曲线波^[3,4]等。上述变换都是基于一类特殊的具有光滑边缘的几何图像模型来分析的,并取得了很好的非线性逼近效果。然而,对于更复杂的图像,例如纹理图像,它们并不是最优的。

最近,Demanet 和 Ying^[5]提出了一种新的多尺度图像分析工具,即波原子(wave atoms)。它是一种特殊的二维波包的变形,与曲线波相比,其基的支撑区间是各向同性的,即波长约等于支撑尺寸。而其每个波包的振动周期和支撑尺寸满足抛物尺度关系,即波长约等于支撑尺寸的平方。在这个意义下可以简单地将波原子理解为方向小波与 Gabor 原子的插值。相对于小波、Gabor 原子和曲线波而言,波原子对于振荡

函数(可以认为是一个简单的纹理模型)具有最优的稀疏表示。

文献[6]将小波与总变差 TV 相结合应用于二维信号的去噪,得到了比较好的效果,免于伪吉布斯振荡。相对于 TV 正则化,近年发展起来的非局部 TV^[7,8]则对污染或模糊图像有更好的处理能力;降低了 TV 正则化引起的阶梯效应,能比较好地保持图像的细节等优点。受此启发,本文用对振荡纹理图像有最优稀疏表示的波原子代替文献[6]中的小波,用非局部 TV 取代局部 TV 提出了基于波原子的非局部 TV 纹理图像去噪新方法。实验结果表明,该方法对于振荡纹理(如指纹、barbara 等图像)都具有较好的去噪效果,既较好地保护了图像的纹理细节,又有效地避免了波原子处理后引起的吉布斯振荡现象。

2 波原子

假设 h 是一个实值的、无穷光滑的冲击函数,支撑区间为 $[-7\pi/6, 5\pi/6]$ 。当 $|w| \leq \pi/3$ 时,满足等式 $h(\pi/2-w)^2 + h(\pi/2+w)^2 = 1$ 和 $h(-\pi/2-2w) = h(\pi/2+w)$ 。定义 $v = \bar{h}$ 是函数 h 的逆 Fourier 变换,并且假定:

$$\psi_m^0(x) = 2\text{Re}\{e^{i(m+\frac{1}{2})x} v((-1)^m(x-\frac{1}{2}))\} \quad (1)$$

则有

到稿日期:2010-03-26 返修日期:2010-06-27 本文受国家自然科学基金(60872138)资助。

吴玉莲(1978—),女,研究生,讲师,主要研究方向为偏微分方程、稀疏表示、小波理论及其在图像处理中的应用,E-mail:wyl711@163.com;冯象初(1962—),教授,博士生导师,主要研究方向为偏微分方程、小波理论及其在图像处理中的应用。

$$\overline{\psi_m^0} = e^{-i\omega/2} \{ e^{i\alpha_m} h(\epsilon_m(\omega - \pi(m+1/2))) + e^{-i\alpha_m} h(\epsilon_{m+1}(\omega + \pi(m+1/2))) \} \quad (2)$$

式中, $\epsilon_m = (-1)^m$, $\alpha_m = (\pi/2)(m+1/2)$, 并且满足 $\sum_m |\overline{\psi_m^0}|^2 = 1$ 。其平移 $\{\psi_m(x-n), n \in Z, m=0, 1, 2, \dots\}$ 就组成了 $L_2(R)$ 空间中的一组规范正交基, 从而构成了频域坐标平面的一致覆盖。

引入尺度指标 j , 并重新将基函数写为 $\psi_{m,n}^j(x) = \psi_m^j(x - 2^{-j}n) = 2^{j/2} \overline{\psi_m^0}(2^j x - n)$, 则所得的波包就组成了 $L_2(R)$ 空间中的一组规范正交基。

二维波包可以通过张量积的形式来实现, 即

$$\varphi_{\mu}^+(x_1, x_2) = \psi_{m_1}^k(x_1 - 2^{-j}n_1) \psi_{m_2}^k(x_2 - 2^{-j}n_2) \quad (3)$$

$$\varphi_{\mu}^-(x_1, x_2) = H\psi_{m_1}^k(x_1 - 2^{-j}n_1) H\psi_{m_2}^k(x_2 - 2^{-j}n_2) \quad (4)$$

式中, H 是 Hilbert 变换。 $\mu = (j, m, n) = (j, m_1, m_2, n_1, n_2)$ 对应于相位空间的一个点 (x_{μ}, ω_{μ}) , $x_{\mu} = 2^{-j}n$ 和 $\omega_{\mu} = \pi 2^j m$, 并且满足 $C_1 2^j \leq \max_{i=1,2} |m_i| \leq C_2 2^j$, 这里 C_1 和 C_2 是两个正的常数。由于 $\varphi_{\mu}^+(x_1, x_2)$ 和 $\varphi_{\mu}^-(x_1, x_2)$ 事实上就是一对波原子规范正交基, 那么其组合 $\varphi_{\mu}^{(1)} = (\varphi_{\mu}^+ + \varphi_{\mu}^-)/2$, $\varphi_{\mu}^{(2)} = (\varphi_{\mu}^+ - \varphi_{\mu}^-)/2$ 就构成了冗余为 2 的波原子紧框架。

3 非局部 TV

众所周知, 由于局部滤波方法很容易将纹理误认为噪声而被丢掉, 因此非局部方法^[9,10]在纹理图像中已得到广泛应用, 而 Gilboa-Osher 在文献[11]又把这种非局部思想在图论的基础上用于变分问题中。定义一幅图像 $u: \Omega \rightarrow R$; 非负对称的权函数 $w: \Omega \times \Omega \rightarrow R$,

$$w_{\mu}(x, y) = \exp\left(-\frac{(G_{\sigma} * |u(x+\cdot) - u(y+\cdot)|^2)(0)}{h^2}\right) \quad (5)$$

相应的非局部梯度:

$$\nabla_w u: \Omega \times \Omega \rightarrow R, \nabla_w u(x, y) = (u(y) - u(x)) \sqrt{w(x, y)} \quad (6)$$

向量 \vec{v} 非局部散度:

$$(\operatorname{div}_w \vec{v})(x) = \int_R (v(x, y) - v(y, x)) \sqrt{w(x, y)} dy \quad (7)$$

非局部 TV:

$$J_{\text{NLTV}}(u) = \int |\nabla_w u| = \int_R \sqrt{\int_R (u(y) - u(x))^2 w(x, y) dy} dx \quad (8)$$

4 新模型

4.1 新模型的提出

尽管波原子阈值对振荡纹理有最优的稀疏表示, 但是它使得处理后的图像产生虚假的吉布斯现象。因此, 为了更好地保护纹理边缘等细节, 笔者建议用基于波原子的非局部投影正则化方法处理振荡纹理图像, 它能在去除噪声的同时更好地保护纹理、边缘等细节, 视觉效果较好。

软阈值函数 τ 定义如下:

$$\tau(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) \cdot (|x| - \delta), & |x| \geq \delta \\ 0, & |x| < \delta \end{cases}, (\delta \text{ 为阈值}) \quad (9)$$

对噪声图像 f 的波原子系数应用软阈值, 将软阈值后的波原子系数指标集定义为:

$$\Lambda = \{\mu: |c_{\mu} f| \geq \delta\} \quad (10)$$

得到干净图像 u 的一个估计: $\hat{u} = \sum_{\mu \in \Lambda} S_{\tau}(c_{\mu} f) \varphi_{\mu}$

由于波原子阈值会在不连续点附近产生虚假的吉布斯现象, 为了减少这种现象, 结合非局部变分, 对下面的优化问题求解:

$$\min_f J_{\text{NLTV}}(f) = \int |\nabla_w f| \quad (11)$$

定义 $L_2(\Omega)$ 上的线性子空间 $V = \{v: c_{\mu}(v) = 0, \forall \mu \in \Lambda\}$, 给定正序列 $(t_k)_{k=0}^{\infty}$, 其中 $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} t_k = \infty$, 类似于文献

[6], 则式(11)基于波原子的非局部投影正则化阈值为:

$$\begin{cases} f^{(k+1)} = f^{(k)} - t_k P_V(g J_{\text{NLTV}}(f^{(k)})) \\ f^1 = \hat{u} \end{cases} \quad (12)$$

式中, $g J_{\text{NLTV}}(f)$ 是非局部 TV 关于 f 的次梯度:

$$g J_{\text{NLTV}}(f) = -\operatorname{div}_w(g(|\nabla_w f|) \nabla_w f), g(x) = \frac{1}{x} \quad (13)$$

$P_V(g)$ 为函数 g 在空间 V 上的投影。假设 T 为波原子变换, T^{-1} 为逆变换, 则:

$$P_V(g) = T^{-1} \tau^{-1} T(g) \quad (14)$$

式中, τ^{-1} 定义如下:

$$\tau^{-1}(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \delta \\ \operatorname{sgn}(x) \cdot (|x| - \delta), & |x| < \delta \end{cases} \quad (15)$$

4.2 算法描述

综上所述, 本文阈值去噪算法可归纳如下。

Part1: 干净图像的波原子阈值估计

(1) 对带噪图像 f 进行波原子变换: $c_{\mu} f = \langle f, \varphi_{\mu} \rangle$;

(2) 非线性阈值: $S_{\tau}(c_{\mu} f)$;

(3) 图像重构: $\hat{u} = \sum_{\mu \in \Lambda} S_{\tau}(c_{\mu} f) \varphi_{\mu}$ 。

Part2: 估计图像 u 的迭代修正

(1) 初始化: 设置最大迭代次数 $iter_max$, 初值 $f^1 = \hat{u}$;

(2) 由式(13)计算 $g J_{\text{NLTV}}(f^k)$;

(3) 由式(14)计算 $P_V(g)$;

(4) 取步长 $t_k = 1/\sqrt{k}$, 计算 $f^{(k+1)} = f^{(k)} - t_k P_V(g J_{\text{NLTV}}(f^{(k)}))$;

(5) 置 $k = k+1$, 若 $k < iter_max$, 则转至 Part2(2), 否则迭代结束。

5 实验结果及讨论

为了验证上述算法的有效性, 本文分别对两幅图像 Barbara 和 Fingerprint 进行了仿真实验。表 1 给出的是波原子软阈值、非局部 TV 以及新模型(12)对带有不同强度高斯白噪声图像处理后的 SNR 对比结果。从表中可以看出, 新模型对含噪纹理图像处理后的 SNR 相对于波原子软阈值都有至少 0.2dB 的提高, 与非局部 TV 相比从视觉上也有明显改善; 并且从图 1 对 Barbara 图像在 $\sigma=10$ 和图 2 对 Fingerprint 图像在 $\sigma=15$ 给出的上述 3 种方法的去噪效果, 可以看出新方法比前两种方法处理后的结果更加清晰、自然, 而非局部 TV 和新方法在信噪比上差不多, 但其过度光滑了图像的比如手臂、裤角等一些细节。

本文方法的实质: 在波原子域对图像的最优解进行约束

(下转第 292 页)

- [J]. 广西师范学院学报:自然科学版,2007;24-29
- [21] 王成儒,吴娅辉. 旋转不变广义粗糙度特征结合自适应加权距离在纹理检索中的应用[J]. 中国图象图形学报,2005,6(10):762-766
- [22] Vo A P N, Nguyen T T, Oraintara S. Texture Image Retrieval Using Complex Directional Filter Bank[C]//IEEE International Symposium on Circuits and Systems. 2006;5495-5498
- [23] Jian Mu-wei, Dong Jun-yu, Gao Da-wei, et al. New texture features based on wavelet transform coinciding with human visual perception[C]//Proceedings-SNPD 2007; Eighth ACIS International Conference on Software Engineering, Artificial Intelligence, Networking, and Parallel/Distributed Computing. vol. 1, 2007;369-373
- [24] Abbadeni N. Computational Perceptual Features for Texture Representation and Retrieval[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2011, 20(1): 236-246
- [25] Abbadeni N, Ziou D, Wang S. Perceptual textural features corresponding to human visual perception[C]// Proceedings of the 13th Vision Interface Conference. 2000;365-372
- [26] Wu W J, Ma L Z, Xiao X Z. Method of Tongue Image Segmentation Based on Luminance and Roughness Information[J]. Journal of System Simulation, 2006, 18(s11): 374-379
- [27] Chamorro-Martinez J, Galan-Perales E, Sanchez D, et al. Prados-Suarez. A fuzzy approach to image texture representation applied to visual coarseness description[C]//2006 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Sheraton Vancouver Wall Centre Hotel, Vancouver, BC, Canada, 2006;1099-1104
- [28] Zhan Xu, Sun Xing-bo. Comparison of two gabor texture descriptor for texture classification[C]//2009 WASE International Conference on Information Engineering. 2009;52-56
- [29] Zhang Yang, He Rongyi. Comparison of Two Methods For Texture Image Classification[C]//2009 Second International Workshop on Computer Science and Engineering. 2009;65-68
- [30] Chamorro-Martinez J, Martinez-Jimenez P. A comparative study of texture coarseness measures [C] // Image Processing 2009 16th IEEE International Conference (ICIP). 2009;1337-1340
- [31] Dogra D P, Tripathy K, Majumdar A K, et al. A Comparative Study on Texture Features Used for segmentation of Images Rich in Texture[C]//2009 IEEE International Conference on Signal and Image Processing Applications. 2009;336-339
- [32] Singh M, Singh S. Spatial texture analysis; a comparative study [C]//IEEE Proc. on 16th Inter. Conf. on Pattern Recognition. vol. 1, 2002;676-679
- [33] Chang K I, Bowyer K W, Sivagurunath M. Evaluation of texture segmentation algorithms [C] // Proc. IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. vol. 57, 2003;294-299
- [34] 赵海英,徐丹. 图像分形维数计算方法的比较[J]. 云南大学学报:自然科学版,2004,26(5A):56-59
- [35] Brodatz Texture Database[EB/OL]. <http://www.ux.uis.no/~tranden/brodatz.html>

(上接第 287 页)

的非局部变分方法,同简单的波原子阈值不同,不是简单地将小于阈值的系数置为零,而是在非局部变分意义下对小于阈值的系数做适当的修正后再进行恢复。需要说明的是,此处用非局部变分而不用简单的局部变分的原因是非局部变分对纹理图像的细节保护方面明显优于通常的局部变分,当然它们对图像中出现的伪吉布斯现象都有很好的抑制作用。对于非局部变分计算量大的缺点也是不可避免的,可以考虑用分裂的 Bregman^[12]等方法对其进行加速,这也是我们下一步值得研究的。

表 1 不同方法信噪比(dB)的比较

图像	Fingerprint			Barbara		
	5	10	15	5	10	15
噪声	12.56	7.18	4.58	13.20	7.75	5.07
软阈值	15.24	10.73	8.51	17.49	13.56	11.33
非局部 TV	15.35	11.17	8.35	17.68	13.92	11.65
新方法	15.48	11.23	8.80	17.70	14.15	11.73



图 1 $\sigma=10$ 带噪的 Barbara 图像和 3 种方法去噪图像

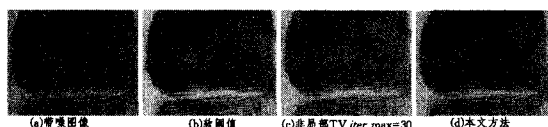


图 2 $\sigma=15$ 带噪的 Fingerprint 图像和 3 种方法去噪图像

参考文献

- [1] Donoho D L. Orthonormal ridgelet and linear singularities[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2000, 31(5): 1062-1099
- [2] Candes E J, Donoho D L. Curvelets; a surprisingly effective non-adaptive representation for objects with edges[C]//Curves and Surfaces Fitting, Saint-Malo 1999. Nashville, TN, 2000; 105-120
- [3] Candes E J, Donoho D L. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with C singularities[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2004, 57(2): 219-266
- [4] 刘国军,冯象初,郝彬彬. 代曲线波图像恢复模型及其算法[J]. 西安电子科技大学学报, 2009, 36(6): 1092-1097
- [5] Demanet L, Ying L X. Wave atoms and sparsity of oscillatory patterns[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2007, 23(3): 368-387
- [6] Durand S, Froment J. Reconstruction of wavelet coefficients using total variation minimization[J]. SIAM Sci. Comput., 2003, 24: 1754-1767
- [7] Kindermann S, Osher S, Jones P W. Deblurring and Denoising of Images by Nonlocal Functionals[R]. UCLA Report, December 2004
- [8] Lou Yi-fei, Zhang Xiao-qun, Osher S. Image Recovery via Nonlocal Operators[Z]. UCLA, Manuscript, November 2008
- [9] Buades A, Coll B, Morel J-M. A non-local algorithm for image denoising[R]. 2005
- [10] Liu Yan-li, Wang Jin. A Robust and Fast Non-local Means Algorithm for Image Denoising[J]. Journal of Computer Science and Technology, 2008, 23(2): 270-279
- [11] Gilboa G, Osher S. Nonlocal Operators with Applications to Image Processing [J]. Multiscale Model. Simul., 2008, 7(3): 1005-1028
- [12] Zhang Xiao-qun, Burger M. Bregmanized Nonlocal Regularization for Deconvolution and Sparse Reconstruction[R]. CAM report, 2009-03