P-模糊集($A^{\bar{F}}$,A^F)及其应用

闫立梅[1] 徐凤生[1] 史开泉[1,2]

(德州学院数学系 德州 253023)[1] (山东大学数学与系统科学学院 济南 250100)[2]

摘 要 把动态特性引入到有限普通集合 X 内,改进了普通集合 X,提出了 P-集合(packet sets);P-集合是由内 P-集合 $X^{\bar{F}}$(internal packet set $X^{\bar{F}}$)与外 P-集合 X^F(outer packet set X^F)构成的集合对;或者($X^{\bar{F}}$,X^F)是 P-集合。P-集合具有动态特性:内 P-集合具有内-动态特性,外 P-集合具有外-动态特性。把 P-集合($X^{\bar{F}}$,X^F)引入到 L. A. Zadeh 模糊集 A 中,改进 L. A. Zadeh 模糊集 A,提出 P-模糊集(packet fuzzy sets)。P-模糊集是由内 P-模糊集 $A^{\bar{F}}$(internal packet fuzzy set$A^{\bar{F}}$)与外 P-模糊集 A^F(outer packet fuzzy set A^F)构成的模糊集合对,或者($A^{\bar{F}}$,A^F)是 P-模糊集。P-模糊集具有动态特性,给出了 P-模糊集的若干特征与应用。在一定条件下,P-模糊集($A^{\bar{F}}$,A^F)能够回到 L. A. Zadeh 模糊集 A 的"原点"。P-模糊集比 L. A. Zadeh 模糊集具有更大的应用空间。P-模糊集是模糊集理论与应用中的一个新的研究方向。

关键词 P-模糊集,内 P-集合,外 P-集合,基数定理,应用

中图法分类号 O144 **文献标识码** A

P-Fuzzy Sets ($A^{\bar{F}}$,A^F) and its Applications

YAN Li-mei[1] XU Feng-sheng[1] SHI Kai-quan[1,2]

(Department of Mathematics Sciences, Dezhou University, Dezhou 253023, China)[1]

(School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan 250100, China)[2]

Abstract By introducing dynamic characteristics to finite ordinary set X, the ordinary set $X$was improved and P-sets (packet sets) was proposed. P-sets is a pair of sets composed of internal P-set $X^{\bar{F}}$ (internal packet set $X^{\bar{F}}$) and outer P-set X^F (outer packet set X^F), or, ($X^{\bar{F}}$, X^F) is P-sets. P-sets has dynamic characteristics, that is, internal P-set has internal dynamic characteristics and outer P-set has outer dynamic characteristics. P-sets ($X^{\bar{F}}$, X^F) was introduced to fuzzy set A of L. A. Zadeh, the fuzzy set A of L. A. Zadeh was improved, P-fuzzy sets(packet fuzzy sets) was given. P-fuzzy sets is a pair of fuzzy sets composed of internal P-fuzzy set $A^{\bar{F}}$ (internal packet fuzzy set $A^{\bar{F}}$)and outer P-fuzzy set A^F (outer packet fuzzy set A^F), or, ($A^{\bar{F}}$, A^F)is P-fuzzy sets. P-fuzzy sets has dynamic characteristics, some properties and applications of P-fuzzy sets were given. Under certain conditions, P-fuzzy sets ($A^{\bar{F}}$, A^F)can come back to the original of ordinary fuzzy set A of L. A. Zadeh. P-fuzzy sets has more extensive applications than fuzzy set of L. A. Zadeh. P-fuzzy sets is a new direction of fuzzy set theory and applied research.

Keywords P-fuzzy set, Internal P-set, Outer P-set, Cardinal theorem, Application

1 引言

1965年,杰出学者 L. A. Zadeh 教授提出模糊集[1],给出了模糊集的结构。这一原创性的研究得到了应用[20-30],模糊集的概念被人们接收。仔细解读与认识 L. A. Zadeh 的论文[1],得到 1)L. A. Zadeh 模糊集是具有静态特性论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$上的模糊集,例如 m 个老年人构成的有限论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$在 X 上存在"老年人"模糊集 A;2)X 上的"老年人"模糊概念是静态的(不变的);3)X 上的模糊集 A 是单一的。结论 1)-3)潜藏在 L. A. Zadeh 的原创性论文中[1],潜藏在 L. A. Zadeh 模糊集的其它理论与应用研究论文中[20-30]。人们自然提出这样的问题:①若模糊概念在 X 上发生变化(或模糊概念具有动态特性),则 L. A. Zadeh 模糊集是什么样子?②若生成模糊集 A 的有限论域 X 发生变化(X 变小,X 变大),则 L. A. Zadeh 模糊集是什么样子?或者①与②同时存在,L. A. Zadeh 模糊集的结构是什么?人们想知道①、②的解答,因为他们在研究多类具有动态特征的模糊系统时,都遇到了这个共同问题。

一个事实:集团公司 W,从利润中拿出一部分利润 H(H 是固定的),作为"特殊报酬"支付给集团公司员工集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}$中的每一个人,奖励他们为公司的经营所做的贡献,$\forall x_i\in X$ 所获得的报酬是 η_i,$i\in\{1,2,\cdots,q\}$;若 $i\neq j$,则 $\eta_i=\eta_j$。η_i 使每一个 $x_i\in X$"满意",$i=1,2,\cdots,q$;"满意"是一个模糊概念。因为一些原因,X 内的一些员工 x_i 离开 W,

到稿日期:2010-06-11 返修日期:2010-09-30 本文受山东省自然科学基金(ZR2010AL019)资助。

闫立梅(1969-),女,硕士,副教授,主要研究方向为不确定优化理论及应用、信息系统理论与应用,E-mail:yanlimei9898@163.com;**史开泉**(1945-),男,教授,博士生导师,主要研究方向为粗系统理论与应用,E-mail:shikq@sdu.edu.cn(通信作者)。

$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}$变成$X^{\overline{F}}=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$，$p\leqslant q$；或者，$X^{\overline{F}}\subseteq X$。显然，$x_j\in X^{\overline{F}}$获得的“特殊报酬”$\eta_j^{\overline{F}}$比$x_i\in X$获得的“特殊报酬”$\eta_i$要“多”；或者$\eta_i\leqslant\eta_j^{\overline{F}}$。换一个说法，在利润$H$不变的条件下，$X^{\overline{F}}$内的$x_j$比$X$内的$x_i$获得的“特殊报酬”要“多”，$i=1,2,\cdots,q$；$j=1,2,\cdots,p$。“多”是一个模糊概念。因为一些原因，一些员工$x_k$来到集团公司；集团公司员工集合$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}$变成$X^F=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$，$q\leqslant r$；或者$X\subseteq X^F$。显然$x_k\in X^F$获得的“特殊报酬”$\eta_k^F$比$x_i\in X$获得的“特殊报酬”$\eta_i$要“少”；或者$\eta_k^F\leqslant\eta_i$。换一个说法，在利润$H$不变的条件下，$X^F$内的$x_k$比$X$内的$x_i$获得的“特殊报酬”要“少”，$i=1,2,\cdots,q$；$k=1,2,\cdots,r$。“少”是一个模糊概念。这个事实是人们“司空见惯”的。这个事实的特征是：X上的模糊概念“满意”，在X发生变化的条件下（X变成$X^{\overline{F}}$，X变成X^F），“满意”变成模糊概念“多”与“少”；换一个说法，集合X具有了动态特性，集合X上的模糊概念A变成了模糊概念对$(A^{\overline{F}},A^F)$；或者X变成$(X^{\overline{F}},X^F)$，模糊概念A（满意）变成模糊概念对$(A^{\overline{F}},A^F)$（$A^{\overline{F}}$=“多”，A^F=“少”）；模糊概念$A^{\overline{F}}$与模糊概念A^F具有互补特性。显然，利用 L. A. Zadeh 模糊集，研究这个事实遇到困难。这个事实成为改进的 L. A. Zadeh 模糊集，提出了 P-模糊集的事实依据。

2008 年，文献[2,3]把动态特性引入到有限普通集合X中，改进有限普通集合X，提出 P-集合（packet sets）。P-集合是由内 P-集合$X^{\overline{F}}$（internal packet set $X^{\overline{F}}$）与外 P-集合X^F（outer packet set X^F）构成的集合对；或者，$(X^{\overline{F}},X^F)$是 P-集合。P-集合具有动态特性，P-集合在多个领域中获得了应用[3-19]。P-集合为改进 L. A. Zadeh 模糊集，提出 P-模糊集（P-fuzzy sets，P=packet）给出了理论准备。

为了便于讨论，容易接受本文给出的结果，把 P-集合引入到本文的第 2 节中，作为本文讨论的预备知识。P-集合的更多概念见文献[2-19]。

2 P-集合

约定 X是U上的有限普通非空集合，U是有限元素论域，V是有限属性论域。

2008 年，文献[2,3]给出：

给定普通集合$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\subseteq U$，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\subseteq V$是$X$的属性集合，称$X^{\overline{F}}$是$X$生成的内 P-集合（internal packet set $X^{\overline{F}}$），简称$X^{\overline{F}}$是内 P-集合，而且

$$X^{\overline{F}}=X-X^- \tag{1}$$

X^-称作X的$\overline{F}$-元素删除集合，而且

$$X^-=\{x|x\in X,\overline{f}(x)=u\overline{\in}X,\overline{f}\in\overline{F}\} \tag{2}$$

如果$X^{\overline{F}}$的属性集合α^F满足

$$\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha'|\beta\in V,\beta\overline{\in}\alpha,f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\} \tag{3}$$

式中，$X^{\overline{F}}\neq\phi$。

给定普通集合$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\subseteq U$，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\subseteq V$是$X$的属性集合，称$X^F$是$X$生成的外 P-集合（outer packet set X^F），简称X^F是外 P-集合，而且

$$X^F=X\cup X^+ \tag{4}$$

X^+称作X的F-元素补充集合，而且

$$X^+=\{u|u\in U,u\overline{\in}X,f(u)=x'\in X,f\in F\} \tag{5}$$

如果X^F的属性集合$\alpha^{\overline{F}}$满足

$$\alpha^{\overline{F}}=\alpha-\{\beta_i|\alpha_i\in\alpha,\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha,\overline{f}\in\overline{F}\} \tag{6}$$

式中，$\alpha^{\overline{F}}\neq\phi$。

内 P-集合$X^{\overline{F}}$与外 P-集合X^F构成的集合对，称作普通集合X生成的 P-集合（Packet sets），而且

$$(X^{\overline{F}},X^F) \tag{7}$$

简称$(X^{\overline{F}},X^F)$是 P-集合；普通集合X称作 P-集合的基集合（基础集合）。

由式(1)一式(3)得到

$$X_n^{\overline{F}}\subseteq X_{n-1}^{\overline{F}}\subseteq\cdots\subseteq X_2^{\overline{F}}\subseteq X_1^{\overline{F}} \tag{8}$$

由式(4)一式(6)得到

$$X_1^F\subseteq X_2^F\subseteq\cdots\subseteq X_{n-1}^F\subseteq X_n^F \tag{9}$$

则式(7)变成

$$\{(X_i^{\overline{F}},X_j^F)|i\in I,j\in J\} \tag{10}$$

式(10)是 P-集合的一般形式，是 P-集合的集合对族形式。I，J是指标集。

由式(1)一式(10)容易得到

$$(X^{\overline{F}},X^F)_{F=\overline{F}=\phi}=X \tag{11}$$

$$\{(X_i^{\overline{F}},X_j^F)|i\in I,j\in J\}_{F=\overline{F}=\phi}=X \tag{12}$$

式(2)，式(3)；式(5)，式(6)；式(11)，式(12)中的$F=\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$是元素迁移族，$f\in F$是元素迁移；$f\in F$的特征是$u\in U$，$u\overline{\in}X$，$f\in F$把u变成$f(u)=x'\in X$；或者$\beta\in V$，$\beta\overline{\in}\alpha$，$f\in F$把$\beta$变成$f(\beta)=\alpha'\in\alpha$。$\overline{F}=\{\overline{f}_1,\overline{f}_2,\cdots,\overline{f}_n\}$是元素迁移族，$\overline{f}\in\overline{F}$是元素迁移；$\overline{f}\in\overline{F}$的特征是$x\in X$，$\overline{f}\in\overline{F}$把$x$变成$\overline{f}(x)=u\overline{\in}X$；或者，$\alpha_i\in\alpha$，$\overline{f}\in\overline{F}$把$\alpha_i$变成$\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha$。$f\in F$，$\overline{f}\in\overline{F}$是一个给定的函数。

利用第 2 节中的概念与 L. A. Zadeh 模糊集[1]，第 3 节给出了 P-模糊集。

3 P-模糊集与它的结构

定义 1 设$X\subseteq U$是有限普通集合（论域），称A是 L. A. Zadeh 模糊集，如果

$$A:X\to[0,1] \tag{13}$$

$$x\to A(x)$$

定义 2 设$X^{\overline{F}}$是普通集合X的内 P-集合，称$A^{\overline{F}}$是模糊集A生成的内 P-模糊集，如果

$$A^{\overline{F}}:X^{\overline{F}}\to[0,1] \tag{14}$$

$$x\to A^{\overline{F}}(x)$$

式中，$A^{\overline{F}}(x)$称作$A^{\overline{F}}$的内-隶属函数，$A^{\overline{F}}(x)$称作x对$A^{\overline{F}}$的内-隶属度；$X^{\overline{F}}\subseteq X$。

定义 3 设X^F是普通集合X的外 P-集合，称A^F是模糊集A生成的外 P-模糊集，如果

$$A^F:X^F\to[0,1] \tag{15}$$

$$x\to A^F(x)$$

式中，$A^F(x)$称作A^F的外-隶属函数，$A^F(x)$称作x对A^F的外-隶属度。

定义 4 由内 P-模糊集$A^{\overline{F}}$与外 P-模糊集A^F构成的模糊集合对，称作模糊集A生成的 P-模糊集（packet fuzzy sets），而且

$$(A^{\overline{F}},A^F) \tag{16}$$

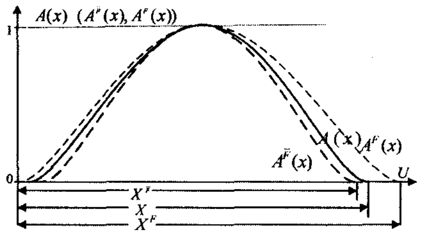
简称$(A^{\overline{F}},A^F)$是 P-模糊集，称A是$(A^{\overline{F}},A^F)$的基模糊集（基础模糊集）。

由式(8)、式(9)与式(16)得到

$$\{(A_i^{\overline{F}},A_j^F)|i\in I,j\in J\} \tag{17}$$

式(17)是P-模糊集的一般表达式，是P-模糊集的模糊集合对族的形式；I,J 是指标集。

图1给出模糊集 A，P-模糊集 (A^F,A^F) 的直观表示。



A^F 是内P-集合 X^F 上的内P-模糊集，A^F 是外P-集合 X^F 上的外P-模糊集，内P-模糊集 A^F、外P-模糊集 A^F 用虚线表示，P-模糊集 (A^F,A^F) 用双虚线表示，普通模糊集 A(L. A. Zadeh模糊集)用实线表示

图1 P-模糊集 (A^F,A^F)

由定义1—定义4，容易得到P-模糊集 (A^F,A^F) 与普通模糊集 A(L. A. Zadeh模糊集)的关系。

定理1(P-模糊集与普通模糊集第一关系定理) P-模糊集 (A^F,A^F) 与普通模糊集 A 满足

$$(A^F,A^F)|_{\overline{F}=F=\phi}=A \tag{18}$$

证明：①若 $\overline{F}=\phi$，则式(2) $X^-=\{x|x\in X,\overline{f}(x)=u\overline{\in}X,\overline{f}\in\overline{F}\}=\phi$，式(1) $X^F=X-X^-$ 变成 $X^F=X$。由文献[1]与内P-模糊集 A^F 的定义得到 $A^F=A$，或者 X^F 上的内P-模糊集 A^F 退化成 X 上的L. A. Zadeh模糊集 A。②若 $F=\phi$，则式(5) $X^+=\{u|u\in U,u\overline{\in}X,f(u)=x'\in X,f\in F\}=\phi$，式(4) $X^F=X\cup X^+=X$，再由文献[1]与外P-模糊集 A^F 的定义得到 $A^F=A$，或者外P-集 X^F 上的外P-模糊集 A^F 退化成 X 上的L. A. Zadeh模糊集 A。由①与②得到式(18)。

定理1指出，若 $\overline{F}=F=\phi$，P-模糊集 (A^F,A^F) 回到L. A. Zadeh模糊集 A 的"原点"。

定理2(P-模糊集与普通模糊集第二关系定理) P-模糊集 $\{(A_i^F,A_j^F)|i\in I,j\in J\}$ 与普通模糊集 A 满足

$$\{(A_i^F,A_j^F)|i\in I,j\in J\}|_{\overline{F}=F=\phi}=A \tag{19}$$

证明：令 I,J 是有限指标集或者 $I=J=\{1,2,\cdots,n\}$。①$\forall i\in I$，若 $\overline{F}=\phi$，由定理1得到 $A_i^F=A$；②$\forall j\in J$，若 $F=\phi$，由定理1得到 $A_j^F=A$。由①与②，若 i 取遍 $\{1,2,\cdots,n\}$，j 取遍 $\{1,2,\cdots,n\}$，在 $\overline{F}=F=\phi$ 的条件下，都有 $(A_i^F,A_j^F)=A$，式(19)成立。

定理2指出，在 $\overline{F}=F=\phi$ 的条件下，由 A_i^F,A_j^F 构成的P-模糊集合对 (A_i^F,A_j^F)，$i\in I,j\in J$ 回到L. A. Zadeh模糊集 A 的"原点"。

由定义1—定义4、定理1、定理2、第2节中的式(1)—式(12)得到：

命题1 在静态-动态的条件下，P-模糊集是L. A. Zadeh模糊集的一般形式，L. A. Zadeh模糊集是P-模糊集的特例。

命题2 在静态-动态的条件下，生成L. A. Zadeh模糊集 A 的有限论域 X 是生成P-模糊集 (A^F,A^F) 论域 (X^F,X^F) 的特例；生成P-模糊集 (A^F,A^F) 的有限论域 (X^F,X^F) 是生成L. A. Zadeh模糊集 A 的有限论域 X 的一般形式。

由模糊集 A 的 λ-截集概念得到 $A_\lambda=\{x\in X|A(x)\geqslant\lambda\}$。容易得到内P-模糊集 A^F 的 λ-截集 $A_\lambda^F=\{x\in X^F|A^F(x)\geqslant\lambda\}$ 与外P-模糊集 A^F 的 λ-截集 $A_\lambda^F=\{x\in X^F|A^F(x)\geqslant\lambda\}$ 构成的 $(A_\lambda^F,A_\lambda^F)$ 是P-集合。因此在图1状态下，得到定理3—定理8。

定理3(P-模糊截集-P-集合定理) 若 (A^F,A^F) 是P-模糊集，则 $\forall\lambda\in(0,1)$，P-模糊集生成P-λ 截集 $(A_\lambda^F,A_\lambda^F)$，即一个P-集合，而且

$$(A_\lambda^F,A_\lambda^F)=(X^F,X^F) \tag{20}$$

式中，(X^F,X^F) 是P-集合[2,3]；X^F,X^F 是普通集；A_λ^F,A_λ^F 分别是 A^F 的P-λ 截集、A^F 的P-λ 截集。

证明：任取 $\lambda\in(0,1)$，那么对 $\forall x\in A_\lambda^F$，有 $A^F(x)\geqslant\lambda$，必有 $A(x)\geqslant\lambda$，从而 $x\in A_\lambda$，也有 $A^F(x)\geqslant\lambda$，$x\in A_\lambda^F$，则 $A_\lambda^F\subseteq A_\lambda\subseteq A_\lambda^F$。令 $A_\lambda^F=X^F$，$A_\lambda^F=X^F$，则 $(A_\lambda^F,A_\lambda^F)$ 是一个P-集合。或者 $(A_\lambda^F,A_\lambda^F)=(X^F,X^F)$。

定理4(P-λ 截集序定理) 若 $\{(A_i^F,A_j^F)|i\in I,j\in J\}$ 是P-模糊集，对于给定的 $\lambda\in(0,1)$，则

$$(A_n^F,A_n^F)_\lambda\subseteq\!\!\!\supseteq(A_{n-1}^F,A_{n-1}^F)_\lambda\subseteq\!\!\!\supseteq\cdots\subseteq\!\!\!\supseteq(A_2^F,A_2^F)_\lambda\subseteq\!\!\!\supseteq(A_1^F,A_1^F)_\lambda \tag{21}$$

式中，"$\subseteq\!\!\!\supseteq$"是一个特殊记号，"$\subseteq$"表示 $(A_n^F)_\lambda\subseteq(A_{n-1}^F)_\lambda\subseteq\cdots\subseteq(A_2^F)_\lambda\subseteq(A_1^F)_\lambda$；"$\supseteq$"表示 $(A_n^F)_\lambda\supseteq(A_{n-1}^F)_\lambda\supseteq\cdots\supseteq(A_2^F)_\lambda\supseteq(A_1^F)_\lambda$；$(A_i^F,A_i^F)_\lambda$ 表示 $(A_i^F,A_i^F)_\lambda=((A_i^F)_\lambda,(A_i^F)_\lambda)$，$i=1,2,\cdots,n$。

证明：令 I,J 是有限指标集或者 $I=J=\{1,2,\cdots,n\}$。对于给定的 $\forall\lambda\in(0,1)$，①由式(8)得到 $(A_n^F)_\lambda\subseteq(A_{n-1}^F)_\lambda\subseteq\cdots\subseteq(A_2^F)_\lambda\subseteq(A_1^F)_\lambda$；②由式(9)得到 $(A_n^F)_\lambda\supseteq(A_{n-1}^F)_\lambda\supseteq\cdots\supseteq(A_2^F)_\lambda\supseteq(A_1^F)_\lambda$。且 $\forall i\in I,J$，$(A_i^F)_\lambda\subseteq(A)_\lambda\subseteq(A_i^F)_\lambda$，$(A_i^F)_\lambda$，$(A_i^F)_\lambda$ 构成以 A_λ 为基集的 P-集合 $((A_i^F)_\lambda,(A_i^F)_\lambda)$。由①与②得到式(21)。

定理5(P-λ 截集基数定理) 若 $\{(A_i^F,A_j^F)|i\in I,j\in J\}$ 是P-模糊集，对于给定的 $\lambda\in(0,1)$，则

$$\mathrm{card}((A_i^F)_\lambda)\leqslant\mathrm{card}((A_j^F)_\lambda),i\in I,j\in J \tag{22}$$

式中，card=cardinal number。

证明：对于给定的 $\lambda\in(0,1)$，$\forall i\in I,j\in J$，由定理3得到 $(A_i^F)_\lambda\subseteq(A_j^F)_\lambda$，则 $\mathrm{card}((A_i^F)_\lambda)\leqslant\mathrm{card}((A_j^F)_\lambda)$，$i\in I,j\in J$。

定理6(最小基数定理) 在内P-模糊集 A_i^F，$i\in I$ 中，$\forall\lambda_0\in(0,1)$，唯一存在内P-模糊集 A_k^F，A_k^F 的内P-λ_0 截集 $(A_k^F)_{\lambda_0}$ 满足

$$\mathrm{card}((A_k^F)_{\lambda_0})=\min_{i\in I}\mathrm{card}((A_i^F)_{\lambda_0}) \tag{23}$$

证明：对于有限指标集 $I=\{1,2,\cdots,n\}$，在图1状态下得到 $A_{i+1}^F\subseteq A_i^F$，$i=1,2,\cdots,n-1$。对 $\forall\lambda_0\in(0,1)$，$(A_n^F)_{\lambda_0}\subseteq(A_{n-1}^F)_{\lambda_0}\subseteq\cdots\subseteq(A_2^F)_{\lambda_0}\subseteq(A_1^F)_{\lambda_0}$，唯一存在内P-模糊集 A_k^F，A_k^F 的内P-λ_0 截集 $(A_k^F)_{\lambda_0}$ 满足 $\mathrm{card}((A_k{}^F)_{\lambda_0})=\min\limits_{i\in I}\mathrm{card}((A_i{}^F)_{\lambda_0})$。

定理7(最大基数定理) 在外P-模糊集 A_j^F，$j\in J$ 中，对 $\forall\lambda_0\in(0,1)$，唯一存在外P-模糊集 A_l^F，A_l^F 的P-λ_0 截集 $(A_l{}^F)_{\lambda_0}$ 满足

$$\mathrm{card}((A_l^F)_{\lambda_0})=\max_{j\in J}\mathrm{card}((A_j^F)_{\lambda_0}) \tag{24}$$

证明：对于有限指标集 $J=\{1,2,\cdots,n\}$，在图1状态下得到 $A_{j+1}^F\supseteq A_j^F$，$j=1,2,\cdots,n-1$。对 $\forall\lambda_0\in(0,1)$，$(A_n^F)_{\lambda_0}\supseteq(A_{n-1}^F)_{\lambda_0}\supseteq\cdots\supseteq(A_2^F)_{\lambda_0}\supseteq(A_1^F)_{\lambda_0}$，唯一存在外P-模糊集 A_l^F，A_l^F 的外P-λ_0 截集 $(A_l{}^F)_{\lambda_0}$ 满足 $\mathrm{card}((A_l^F)_{\lambda_0})=\max\limits_{j\in J}\mathrm{card}((A_j^F)_{\lambda_0})$。

定理8(基数差定理) 若 $\overline{F}=F=\phi$，则 $\forall\lambda\in(0,1)$，最小基数 $\mathrm{card}((A_k^F)_\lambda)$ 与最大基数 $\mathrm{card}((A_l^F)_\lambda)$ 相等，或者

$$\mathrm{card}((A_k^F)_\lambda)=\mathrm{card}((A_l^F)_\lambda) \tag{25}$$

证明：若 $\overline{F}=F=\phi$，①由 $\overline{F}=\phi$ 得到 $X_n^F=X_{n-1}^F=\cdots=X_2^F=$

$X_1^{\bar{F}}=X$,进一步有 $A_n^{\bar{F}}=A_{n-1}^{\bar{F}}=\cdots=A_2^{\bar{F}}=A_1^{\bar{F}}=A$;②由 $F=\phi$ 得到 $X_1^F=X_2^F=\cdots=X_n^F=X$,进一步有 $A_1^F=A_2^F=\cdots=A_n^F=A$。由①与②得到 $A_n^{\bar{F}}=A_{n-1}^{\bar{F}}=\cdots=A_1^{\bar{F}}=A_1^F=A_2^F=\cdots=A_n^F=A$。对于 $\forall\lambda\in(0,1)$,有 $\mathrm{card}((A_k^{\bar{F}})_\lambda)=\mathrm{card}((A_l^F)_\lambda)$。

4 P-模糊集的应用

在本节的讨论中,给出 P-模糊集的应用。例子中 $x_i\in X$,属性 $\alpha_i\in\alpha$ 的名称略。

设 x_1-x_8 是案件 W 的犯罪嫌疑人,组成犯罪嫌疑人集合 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$,具有犯罪事实(属性)$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$。关于犯罪"严重"程度形成集合 X 上的一个模糊集合 A,得到表 1。

表 1 模糊集 A 与其隶属函数 $A(x)$

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
A(x)	0.6	0.70	0.55	0.65	0.8	0.76	0.83	0.77

显然,在犯罪的嫌疑人中,他们的犯罪有"轻""重"之分,需要找出"重犯"与"从犯"。为此进行了作案现场的调查和证据的认证,获得了新的犯罪证据,α_1',α_2',α 的属性得到补充,α 变成 $\alpha^{\bar{F}}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_1',\alpha_2'\}$,犯罪嫌疑人 X 变成 $X^{\bar{F}}=\{x_2,x_4,x_6,x_7,x_8\}$,得到"重犯嫌疑人"集合。"重犯"是个模糊概念,因此存在定义在 $X^{\bar{F}}$ 上的内 P-模糊集 $A^{\bar{F}}$,得到表 2。

表 2 模糊集 $A^{\bar{F}}$ 与其隶属函数 $A^{\bar{F}}(x)$

$X^{\bar{F}}$	x_2	x_4	x_6	x_7	x_8
$A^{\bar{F}}(x)$	0.65	0.60	0.73	0.82	0.75

为了把与案件 W 有关的嫌疑犯都找到(望风者、通风报信者等);或者把 α_1,α_3 从 α 中删除,α 变成 $\alpha^F=\{\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5\}$,得到案件 W 的全部犯罪集合 $X^F=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\}$。在这里 X^F 是"轻犯嫌疑人"集合,"轻犯"是个模糊概念,因此存在定义在 X^F 上的外 P-模糊集 A^F,得到表 3。

表 3 模糊集 A^F 与其隶属函数 $A^F(x)$

X^F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
$A^F(x)$	0.66	0.72	0.55	0.65	0.82	0.81	0.84	0.80	0.65	0.78

为此,给出阈值 $\lambda=0.75$,那么 $(A^{\bar{F}})_{0.75}=\{x_7,x_8\}$,$A_{0.75}=\{x_5,x_6,x_7,x_8\}$,$(A^F)_{0.75}=\{x_5,x_6,x_7,x_8,x_{10}\}$。显然,$(A^{\bar{F}})_{0.75}\subseteq A_{0.75}\ (A^F)_{0.75}$。$((A^{\bar{F}})_{0.75},(A^F)_{0.75})$ 是 $A_{0.75}$ 的 P-集合。这里 $\lambda=0.75$ 是由案件 W 的特征得到的。

5 诸多讨论

①回到 L. A. Zadeh 的原创性论文中[1],研读论文[1],容易得到 L. A. Zadeh 模糊集 A(普通模糊 A)是建立在集合 X 上的;或者 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 是 m 个"老年人"构成的有限普通集;因此,在 X 上有"老年模糊集 A"。如果 $X=\phi$,则不存在"老年模糊集 A"(或者,"老年人模糊概念");因此,普通集合论域 X 是模糊集 A 存在的"基石与根本"。在 L. A. Zadeh 模糊集[1]中,丢掉了集合 X 的属性集 α 与属性集 α 的变化这个重要客观事实。事实上,每一个有限普通集 X 都对应一个属性集 α,例 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ 是 3 个"红色"$=\alpha_1$,"甜味"$=\alpha_2$ 的苹果构成的有限普通集,$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 是 X 的属性集。在我们熟悉的课程"数学分析"、"高等数学"、"离散数学"中,仅有 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 是一个有限普通集合的概念,X 具有的属性集 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$ 的概念却没有给出。

②2008 年,文献[2,3]依据属性集 α 的变化(α 变大、α 变小),改进了有限普通集合 X,提出了 P-集合$(X^{\bar{F}},X^F)$,$X^{\bar{F}}\subseteq X$,$X\subseteq X^F$;普通集合 X 具有动态特性;α 变大,X 变小,X 变成 $X^{\bar{F}}\subseteq X$;α 变小,X 变大,X 变成 $X\subseteq X^F$;普通集合 X 变成集合对$(X^{\bar{F}},X^F)$。利用 P-集合的集合对$(X^{\bar{F}},X^F)$的结构及 L. A. Zadeh 的学术思想,改进 L. A. Zadeh 的工作[1],得到了本文提出的 P-模糊集$(A^{\bar{F}},A^F)$,这是顺理成章的事。在给定的条件下,P-模糊集$(A^{\bar{F}},A^F)$回到了 L. A. Zadeh 模糊集 A 的"原点"。从本文给出的简单讨论中,人们或许能看到在模糊信息系统研究中,P-模糊集比 L. A. Zadeh 模糊集具有更大的应用空间,这是因为模糊信息系统具有动态特性。

③再回到 L. A. Zadeh 的原创性论文[1]与 P-模糊集中,容易得到:若集合 X 的属性集 α 发生变化($\mathrm{card}(\alpha)$ 增大,$\mathrm{card}(\alpha)$ 减小),则集合 X 上的单个模糊集 A[1]变成模糊集合对$(A^{\bar{F}},A^F)$,满足"量变到质变"的哲学规律。量变是指集合 X 的属性集 α 内属性个数的变化,质变是指一个模糊集 A 变成模糊集合对$(A^{\bar{F}},A^F)$。

④P-模糊集$(A^{\bar{F}},A^F)$是把动态特性引入到 L. A. Zadeh 模糊集 A 的论域(有限论域)X 中,改进了 L. A. Zadeh 模糊集 A 得到的,P-模糊集$(A^{\bar{F}},A^F)$是以模糊集合对的形式出现的。可以这样看:$A^{\bar{F}}$ 是以内 P-集合 $X^{\bar{F}}$ 作为论域的 L. A. Zadeh 模糊集,A^F 是以外 P-集合 X^F 作为论域的 L. A. Zadeh 模糊集。因为 P-模糊集是以模糊集合对的形式定义的,P-模糊集比 L. A. Zadeh 模糊集具有更宽的应用范围。P-模糊集能够应用到下列领域:

- 动态模糊信息处理与应用
- 动态模糊信息图像生成与辨识
- 动态模糊信息规律生成与风险估计
- 模糊信息隐藏技术与应用
- 模糊信息伪装技术与应用
- 模糊信息内嵌入-外嵌入与应用
- 模糊信息过滤-还原技术与应用
- 模糊分辨技术与应用
- 动态模糊识别技术与应用
- 模糊信息挖掘-分离技术与应用

参考文献

[1] Zadeh L A. Fuzzy Sets [J]. Information and Control, 1965, 8: 338-353

[2] 史开泉. P-集合[J]. 山东大学学报:理学版, 2008, 43(11): 75-84

[3] Shi Kai-quan. P-sets and Its Applications [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2009, 9(2): 209-219

[4] 史开泉. P-集合与它的应用特征[J]. 计算机科学, 2010, 37(8): 1-8

[5] 史开泉. S-粗集与数据挖掘单位圆特征[J]. 计算机科学, 2010, 37(5): 1-8

[6] 史开泉. P-集合与双 P-数据恢复-辨识[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(9): 1919-1924

[7] 于秀清, 史开泉. P-集合与 $\bar{F}$-外嵌入信息发现-辨识[J]. 计算机科学, 2011, 38(1): 201-206

[8] 张丽, 崔玉泉, 史开泉. 外 P-集合与数据内-恢复[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(6): 1233-1238

[9] 汤积华, 陈保会, 史开泉. P-集合与$(\bar{F},F)$-数据生成-辨识[J]. 山东大学学报:理学版, 2009, 44(11): 83-92

[10] 周玉华,张冠宇,史开泉. P-集合与双信息规律生成[J]. 数学的实践与认识,2010,40(13):71-80
[11] Zhang Guanyu, Li Enzhong. Information gene and its information knock-out/knock in [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications,2010,10(2):267-275
[12] Zhang Li, Cui Yuquan. Outer P-sets and data internal-recovery [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications,2010,10(2):229-236
[13] Liu Jiqin. P-probabilities and its applications [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010,10(2):237-244
[14] Liu Hongkang, Li Yuling. P-sets and its P-separation theorem [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications,2010,10(2):245-251
[15] 张飞,陈萍,张丽. P-集合的 P-分离与应用[J]. 山东大学学报:理学版,2010,45(3):18-22
[16] 于秀清. $P_{(\rho,\sigma)}$-集合与它的随机特性[J]. 计算机科学,2010,37(9):218-221
[17] 于秀清. P-集合与数据挖掘-还原[J]. 河南师范大学学报:自然科学版,2010,38(5):52-55
[18] 于秀清. P-集合的动态特性[J]. 计算机工程与应用,2010,46(18):45-48
[19] 于秀清. P-集合的识别与筛选[J]. 山东大学学报:理学版,2010,45(1):94-98
[20] 罗承忠. 模糊集引论[M]. 北京:北京师范大学出版社,2005:13-18
[21] Dubois D, Prade H. Measuring properties of fuzzy sets: A general technique and its use in fuzzy query evaluation [J]. Fuzzy Sets and Systems,1990,38:137-152
[22] Esogbue A O, Theologidu M, Guo Kejiao. On the application of fuzzy sets theory to the optimal flood control problem arising in water resources systems [J]. Fuzzy Sets and Systems,1992,48(2):155-172
[23] Chen Degang, He Qiang, Wang Xizhao. Fuzzy rough set based support vector machines [J]. Fuzzy Sets and Systems,2010,161(4):596-607
[24] Kuncheva L I. Fuzzy rough set: Application to feature selection [J]. Fuzzy Sets and Systems,1992,51(2):147-153
[25] Atanassova L C. Remark on the cardinality of the intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems,1995,75(3):399-400
[26] Yang Xinmin. Some properties of convex fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems,1995,72(1):129-132
[27] Bigand A, Colot O. Fuzzy filter based on interval-valued fuzzy sets for image filtering [J]. Fuzzy Sets and Systems,2010,161(1):96-117
[28] Chen Shui-li, Cheng Ji-shu. θ-Convergence of nets of L-fuzzy sets and its applications [J]. Fuzzy Sets and Systems,1997,86(2):235-240
[29] Radecki T. A theoretical background for applying fuzzy set theory in information retrieval [J]. Fuzzy Sets and Systems,1983,10(1):169-183
[30] Wygralak M. Questions of cardinality of finite fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems,1999,102(2):185-210

(上接第 158 页)

选择了 10%的分群用户不参与活动,最后与参与活动的相比,发现通过模型得到的分群结果比不分群的用户在营销活动参与率上提高了近 6 倍。

结束语 本文通过分布图分析和汽泡图分析可以看出,分群区分特征非常明显,因此 K-MEANS 对于新业务分群效果较好。模型可以直接作为运营商今后短信业务客户群细分的标准,采用具备监督的分类算法可以更显著地完成分群工作。通过因子分析,可以很好地提升模型开发的效率。K-MEANS 方法迭代过程可以通过专家根据实际情况停止迭代次数,以达到最好的迭代效果。分群结果可以直接被应用,成为运营商的标准,减少再次挖掘的成本。2009 年 10 月到 12 月期间,我们在西部某通信公司针对模型进行了实际应用,直接提升经济效益 430 万元。通过比较发现,通过模型得到的分群结果比传统随机抽取结果在营销活动参与率上提高近 6 倍。

总体而言,本文所提出的分群模型能够较为准确地反映某公司的短信业务的细分效果。但由于 K-MEANS 算法本身的局限性导致模型仍然具备提升的空间。例如,算法在第一次迭代中,对中心点的选择是随机进行的,因此可能导致模型结构受到影响。另外,判断算法是否终止的标准可以是多个因素决定:目标函数值不再下降;两次迭代得到的聚点相同;两次迭代得到的划分相同;达到最大迭代次数。组合优化的问题是 NP 完全问题,解决这些问题可以通过爬山算法。但为了节省时间,我们这里通过人为经验决定,而理论上可以采用启发式算法,其更能提升模型的理论精度。

参考文献

[1] 吴斌,郑毅,傅伟鹏,等. 一种基于群体智能的客户行为分析算法[J]. 计算机学报,2003,26(8):913-918
[2] 梁静国,张亚光,戈华. CRM 中的模糊 c 均值(FCM)客户聚类算法研究[J]. 哈尔滨工业大学学报,2004,25(2):257-260
[3] 曲昭伟,郑岩,吕廷杰. 基于聚类实现客户行为分析[J]. 东北师大学报:自然科学版,2006,38(2):19-21
[4] 郑国荣,张郑礼,郭鹏,等. 聚类分析在电信消费模式中的应用[J]. 重庆大学学报:自然科学版,2006,29(4):119-121
[5] 吕巍,蒋波,陈洁. 基于 K-Means 算法的中国移动市场顾客行为细分策略研究[J]. 管理学报,2005,2(1):80-84
[6] 陈治平,胡宇舟,顾学道. 聚类算法在电信客户细分中的应用研究[J]. 计算机应用,2007,9081(10):2569-2577
[7] Glendon C, Thompson W. Understanding Your Customer: Segmentation Techniques for Gaining Customer Insight and Predicting Risk in the Telecom Industry [R/OL]. http://www2.sas.com/proceedings/forum2008/TOC.html
[8] Kim S-Y. Customer segmentation and strategy development based on customer lifetime value: A case study[J]. Expert Systems with Applications,2006,31:101-107
[9] Hwang H, Jung T. An LTV model and customer segmentation based on customer value: A case study on the wireless telecommunication industry [J]. Expert Systems with Applications, 2004,26(2):181-188
[10] Rho J J. Internet Customer Segmentation Using Web Log Data [J]. Journal of Business & Economics Research,2004,2(11)
[11] 王芳. 主成分分析与因子分析的异同比较以及应用[J]. 统计教育,2003(5):14-17
[12] 于秀林,任雪松. 多元统计分析[M]. 北京:中国统计出版社,1999:5-100
[13] Kantardzic M. Data Mining Concepts, Models, Methods, and Algorithms[M]. [S. l.]: IEEE Press Publishing House,2002
[14] Dunhan M H. 数据挖掘教程[M]. 郭崇慧,田风占,译. 北京:清华大学出版社,2005