谓词形式系统$\forall UL_{h\in[0.75,1]}^{-}$及其可靠性

马盈仓[1,2] 何华灿[3]
(西北工业大学电子信息学院 西安 710072)[1] (西安工程大学理学院 西安 710048)[2]
(西北工业大学计算机学院 西安 710072)[3]

摘 要 对基于一级泛与运算的一阶谓词演算形式系统$\forall UL_{h\in[0.75,1]}^{-}$进行公理化。通过引入全称量词和存在量词，建立与命题形式系统$UL_{h\in[0.75,1]}^{-}$相对应的一阶谓词形式系统$\forall UL_{h\in[0.75,1]}^{-}$，并证明该系统的可靠性定理及演绎定理。

关键词 泛逻辑，谓词演算形式系统，泛与运算
中图法分类号 TP18,B815 **文献标识码** A

Predicate Formal System $\forall UL_{h\in[0.75,1]}^{-}$ and its Soundness

MA Ying-cang[1,2] HE Hua-can[3]
(School of Electronics and information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)[1]
(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)[2]
(School of Computer Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)[3]

Abstract The aim of this paper is the axiomatization for first-order predicate calculus formal system $\forall UL_{h\in[0.75,1]}^{-}$ based on first-level universal AND operator. By introducing the universal quantifier and existential quantifier, the predicate calculus formal deductive system $\forall UL_{h\in[0.75,1]}^{-}$ based on 1-level universal AND operator according to propositional calculus formal deductive system $UL_{h\in[0.75,1]}^{-}$ of universal logic was built up, moreover, the soundness and deduction theorems of system $\forall UL_{h\in[0.75,1]}^{-}$ were proved.

Keywords Universal logic, Predicate calculus formal system, Universal and operator

1 引言

近几年来，为了处理复杂性问题的不确定性推理问题，非经典数理逻辑的研究有了较大的发展，比如模糊逻辑、泛逻辑学等。它们的公理化研究也取得飞速发展，在模糊逻辑近年来的研究中，基于三角范数为理论的模糊形式系统[1-7]有如P. Hajek提出的基础逻辑系统BL[1]，F. Esteva和L. Godo提出的模糊逻辑系统MTL[2]等。我国学者王国俊教授提出的基于R_0蕴涵算子的逻辑系统[8-11]将模糊推理纳入到模糊逻辑的框架之中，这是一项非常大的研究成果。

泛逻辑学是在研究柔性世界逻辑规律时发现的一个全新的连续可控的逻辑体系[12-14]，用相关性来解释命题连接词的运算模型不唯一的原因。同时对模糊命题间模糊算子的选择，提供了一种途径：即通过命题间的相关性来选择算子。它反映了事物间的内在特性，即用它可以反映事物间作用的真正原因。相关性包括广义相关性(模糊命题之间的关联性)和广义自相关性(命题真值的测量误差)。并且可以将其量化为广义相关系数(一般用h表示)和广义自相关系数(一般用k表示)。h和k在$[0,1]$中连续取值。其中，一级泛非运算簇：$N(x,k)=(1-x^n)^{1/n}$，也可记为“$\sim_k$”。一级泛与运算簇定义为：$T(x,y,h,k)=\Gamma^1[(x^{mn}+y^{mn}-1)^{1/mn}]$，也可记为“$\wedge_{h,k}$”；一级泛蕴涵运算簇：$I(x,y,h,k)=\mathrm{ite}\{1|x\leqslant y;0|y=0\ \&\ m\leqslant 0;(\max(0,1-x^{mn}+y^{mn}))^{1/mn}|m\leqslant 0;(\min(1,1-x^{mn}+y^{mn}))^{1/mn}\}$，也可记为“$\Rightarrow_{h,k}$”。其中函数$\Gamma^R[x]$为$[0,R]$上的有界截取函数，当$x>R$时取值为$R$，当$x<0$时取值为0，否则为$x$。函数$\mathrm{ite}\{a|b;c\}$表示条件$b$成立时函数值为$a$，否则函数值为$c$。文献[15]对基于一级泛与命题的形式化进行了研究，提出了命题形式化系统$UL_{h\in[0.75,1]}^{-}$，本文将在此基础上引入量词$\forall$，$\exists$，提出基于一级泛与的谓词泛逻辑形式系$\forall UL_{h\in[0.75,1]}^{-}$，并证明其可靠性定理和演绎定理。

2 谓词形式系统$\forall UL_{h\in[0.75,1]}^{-}$的构成

为了建立基于零级泛与运算的一阶谓词演算形式系统，先给出其一阶语言。

一阶语言J主要包括符号库和公式的生成规则两个部分。

J的符号库包括以下6类符号：

(1) 个体变元：$x,y,z,x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\cdots$；

(2) 个体常元：$a,b,c,a_1,b_1,c_1,\cdots$；

(3) 谓词符号：$P,Q,P_1,Q_1,P_2,Q_2,\cdots$；

到稿日期：2010-06-28 返修日期：2010-11-07 本文受国家自然科学基金(60273087,60575034)，陕西省教育厅专项科研计划项目(2010JK567)，西北工业大学基础研究基金(W018101)资助。

马盈仓(1972－)，男，博士后，教授，主要研究方向为非经典数理逻辑，E-mail：mayingcang@126.com；**何华灿**(1938－)，男，教授，博士生导师，主要研究方向为人工智能、泛逻辑学。

(4) 联结词符号：&(析取)，$\to$(蕴涵)，Δ(投影连接词)，$-$(否定)；

(5) 量词符号：$\forall$(全称量词)，$\exists$(存在量词)；

(6) 辅助符号：(，)，，；

(1)—(3)中的符号称为语言 J 的非逻辑符号。J 中的个体变元和个体常元统称为项，项记为 $t,t_1,t_2,\cdots$。为方便起见，J 中的全体变元之集记为 $\mathrm{Var}(J)$，全体个体常元之集记为 $\mathrm{Const}(J)$，全体项之集记为 $\mathrm{Term}(J)$。若 P 是 J 中的 n 元谓词符号，$t_1,\cdots,t_n$ 是项，则称 $P(t_1,\cdots,t_n)$ 为原子公式。

J 的公式集由以下 3 条规则有限生成：

(i) 若 P 是原子公式，则 $P\in J$；

(ii) 若 $P,Q\in J$，则 $P\&Q, P\to Q, \Delta P, -P\in J$；

(iii) 若 $P\in J$，且 $x\in \mathrm{Var}(J)$，则 $(\forall x)P,(\exists x)P\in J$。

J 中的公式可记成 $\varphi,\phi,\psi,\varphi_1,\phi_1,\psi_1,\cdots$。为了便于表达，引入以下的简写记号：

$\varphi\wedge\psi$ 定义为 $\varphi\&(\varphi\to\psi)$；

$\varphi\vee\psi$ 定义为 $((\varphi\to\psi)\to\psi)\wedge(\psi\to\varphi)\to\varphi)$；

$\neg\varphi$ 定义为 $\varphi\to\bar{0}$；

$\varphi\equiv\psi$ 定义为 $(\varphi\to\psi)\&(\psi\to\varphi)$。

其中，$\Delta\varphi\equiv\neg-\varphi$。

称一阶语言 J' 是一阶语言 J 的扩张，如果 J 的每个非逻辑符号都在 J' 中。

定义 1 形式系统 $\forall UL_{h\in[0.75,1]}^{-}$ 的公理集与推理规则如下：

(i) 公理集 $\mathrm{Axm}(\forall UL_{h\in[0.75,1]}^{-})$ 由以下形式的公式组成，其中 $\varphi,\psi,\chi\in J$，x 是个体变元

(U1) $(\varphi\to\psi)\to((\psi\to\chi)\to(\varphi\to\chi))$；

(U2) $(\varphi\&\psi)\to\varphi$；

(U3) $(\varphi\&\psi)\to(\psi\&\varphi)$；

(U4) $\varphi\&(\varphi\to\psi)\to(\psi\&(\psi\to\varphi))$；

(U5) $(\varphi\to(\psi\to\chi))\to((\varphi\&\psi)\to\chi)$；

(U6) $((\varphi\&\psi)\to\chi)\to(\varphi\to(\psi\to\chi))$；

(U7) $((\varphi\to\psi)\to\chi)\to(((\psi\to\varphi)\to\chi)\to\chi)$；

(U8) $\bar{0}\to\varphi$；

(U9) $(\varphi\to\varphi\&\psi)\to((\varphi\to\bar{0})\vee\psi\vee((\varphi\to\varphi\&\varphi)\wedge(\psi\to\psi\&\psi)))$；

(U10) $(--\varphi)\equiv\varphi$ (对合)；

(U11) $\neg\varphi\to-\varphi$；

(U12) $\Delta(\varphi\to\psi)\to\Delta(-\psi\to-\varphi)$ (逆序)；

(U13) $\Delta\varphi\vee\neg\Delta\varphi$；

(U14) $\Delta(\varphi\vee\psi)\to(\Delta\varphi\vee\Delta\psi)$；

(U15) $\Delta(\varphi\to\psi)\to(\Delta\varphi\to\Delta\psi)$；

(U16) $(\forall x)\varphi(x)\to\varphi(t)$，项 t 在 $\varphi(x)$ 中对 x 自由；

(U17) $(\varphi(t)\to(\exists x)\varphi(x))$，项 t 在 $\varphi(x)$ 中对 x 自由；

(U18) $(\forall x)(\chi\to\varphi)\to(\chi\to(\forall x)\varphi)$，$x$ 在 χ 中不自由；

(U19) $(\forall x)(\varphi\vee\chi)\to((\forall x)\varphi\vee\chi)$，$x$ 在 χ 中不自由；

(U20) $(\forall x)(\varphi\to\chi)\to((\exists x)\varphi\to\chi)$，$x$ 在 χ 中不自由。

(ii) 推理规则有 3 个，分离规则(MP)：由 $\varphi,\varphi\to\psi$ 推得 ψ；必然推理规则：由 φ 推出 $\Delta\varphi$；概括规则：由 φ 推出 $(\forall x)\varphi$。

以上定义中变元 x 在公式 χ 中不自由，项 t 在公式 $\varphi(x)$ 中对 x 自由等说法的含义与经典的一阶谓词逻辑一致，而且可以同样地在系统中建立证明、理论、理论的证明、理论的语法结论等概念。分别用 $\vdash\varphi$，$T\vdash\varphi$ 表示 φ 是系统的定理，φ 是理论 T 的语法结论。记 $\mathrm{Thm}(\forall UL_{h\in[0.75,1]}^{-})=\{\varphi\in J\mid\ \vdash\varphi\}$，$\mathrm{Ded}(T)=\{\varphi\in J\mid T\vdash\varphi\}$，由于命题系统 $UL_{h\in[0.75,1]}^{-}$ 的公式都是谓词系统 $\forall UL_{h\in[0.75,1]}^{-}$ 的公式，其定理也是 $\forall UL_{h\in[0.75,1]}^{-}$ 中的定理。由文献[1,15]可得如下引理。

引理 1 在 $UL_{h\in[0.75,1]}^{-}$ 中，三段论成立，即：$\{\varphi\to\psi,\psi\to\gamma\}\vdash\{\varphi\to\gamma\}$。

引理 2 如下公式是 $UL_{h\in[0.75,1]}^{-}$ 中的定理：

(1) $\varphi\to\varphi$；

(2) $\varphi\to(\psi\to\varphi)$；

(3) $(\varphi\to\psi)\to((\varphi\to\gamma)\to(\psi\to\gamma))$；

(4) $(\varphi\&(\varphi\to\psi))\to\psi$；

(5) $\Delta\varphi\equiv\Delta\varphi\&\Delta\varphi$。

引理 3 若 $T=\{\varphi\to\psi,\chi\to\gamma\}$，则 $T\vdash(\varphi\&\chi)\to(\psi\&\gamma)$。

为了证明一阶系统 $\forall UL_{h\in[0.75,1]}^{-}$ 的可靠性，需要 $Ł\Pi G^{-}$-代数的概念。

定义 2[1] BL-代数是包含 4 个二元算子和两个常元的代数 $L=(L,\cap,\cup,*,\Rightarrow,0,1)$，满足以下条件：

(1) $(L,\cap,\cup,0,1)$ 是带有最大元 1 和最小元 0 的格(按照格序$\leqslant$)；

(2) $(L,*,1)$ 是有单位元 1 的交换半群，即 $*$ 是交换的、结合的，并且对任意的 x，都有 $1*x=x$；

(3) 对任意的 x,y,z，满足以下条件：

1) $z\leqslant(x\Rightarrow y)$ iff $x*z\leqslant y$

2) $x\cap y=x*(x\Rightarrow y)$

3) $(x\Rightarrow y)\cup(y\Rightarrow x)=1$

定义 3[15] 满足等式 $(x\Rightarrow x*y)\Rightarrow((x\Rightarrow 0)\cup y\cup((x\Rightarrow x*x)\cap(y\Rightarrow y*y)))=1$ 的 BL-代数称为 $Ł\Pi G$-代数。满足 $(\varphi\cap(\varphi\Rightarrow 0))=0$ 的 $Ł\Pi G$-代数称为 ΠG-代数。

定义 4[15] 通过扩充一元算子$-$的具有结构 $L=\langle L,*,\Rightarrow,\cap,\cup,0,1,-\rangle$ 的 ΠG-代数称为 ΠG^{-}-代数，且满足以下的条件：

(1) $--x=x$；

(2) $\neg x\leqslant -x$；

(3) $\Delta(x\Rightarrow y)=\Delta(-y\Rightarrow -x)$；

(4) $\Delta x\cup\neg\Delta x=1$；

(5) $\Delta(x\cup y)\leqslant\Delta x\cup\Delta y$；

(6) $\Delta x*(\Delta(x\Rightarrow y))\leqslant\Delta y$。

其中 $\neg x=(x\Rightarrow 0)$，$\Delta x=(-x\Rightarrow 0)$。

可以看出，若 $h\in[0.75,1]$，$k\in(0,1)$，则 $L=\langle[0,1],\wedge_{h,k},\Rightarrow_{h,k},\min,\max,0,1,\sim_k\rangle$ 为 ΠG^{-} 代数，即在标准线性序下的全序 ΠG^{-} 代数。

设 J 是一阶谓词语言，L 是全序 ΠG^{-} 代数。三元组 $M=(M,(r_P)_P,(m_c)_c)$ 称为一阶语言 J 的一个 L-解释，其中 M 为非空集合，对应于 J 中的任一个 n 元谓词符号 P 和个体常元 c，r_P 是 M 上的 n 元模糊关系，其隶属函数为 $r_P:M^n\to L$，m_c 是 M 中的一个元素。

定义 5 设 J 是谓词语言，M 是 J 的 L-解释，x 是个体变元，$P\in J$

(i) 映射 $v:\mathrm{Term}(J)\to M$ 称为 M-赋值，如果对任何 $c\in\mathrm{Const}(J)$，$v(c)=m_c$。

(ii) 两个 M-赋值 v,v' 称为是 x-相等的，记成 $v\equiv_x v'$，如果对任何 $y\in \mathrm{Var}(J)\setminus\{x\}$，总有 $v(y)=v'(y)$。

(iii) 由 M,v 确定的项的值定义如下：$\| x\|_{M,v}=v(x)$；$\| c\|_{M,v}=m_c$。我们可以如下递归地定义公式 φ 的真值 $\|\varphi\|^L_{M,v}$。当然 $*,\Rightarrow$ 分别对应 L 中的算子。

$\| P(t_1,t_2,\cdots,t_n)\|^L_{M,v}=r_P(\| t_1\|_{M,v},\cdots,\| t_n\|_{M,v})$；

$\|\varphi\to\psi\|^L_{M,v}=\|\varphi\|^L_{M,v}\Rightarrow\| t_n\|^L_{M,v}$；

$\|\varphi\&\psi\|^L_{M,v}=\|\varphi\|^L_{M,v}*\| t_n\|^L_{M,v}$；

$\|\bar{0}\|^L_{M,v}=0$；$\|\bar{1}\|^L_{M,v}=1$；

$\|\Delta\varphi\|^L_{M,v}=\Delta\|\varphi\|^L_{M,v}$；$\|-\varphi\|^L_{M,v}=-\|\varphi\|^L_{M,v}$

$\|(\forall x)\varphi\|^L_{M,v}=\inf\{\|\varphi\|^L_{M,v'}\mid v\equiv_x v'\}$；

$\|(\exists x)\varphi\|^L_{M,v}=\sup\{\|\varphi\|^L_{M,v'}\mid v\equiv_x v'\}$。

在上述定义中，为使对于每个公式都有意义，自然要求上下确界均存在。称满足这些要求的 L-解释 M 为安全的 L-解释。

定义 6 设 $\varphi\in J$，M 是安全的 L-解释。

(i) φ 在 M 中的值定义为 $\|\varphi\|^L_M=\inf\{\|\varphi\|^L_{M,v}\mid v\in\Omega(M)\}$。

(ii) $\varphi\in J$ 在 L 中是真的，如果对每一安全 L-解释 M，$\|\varphi\|^L_M=1_L$，也就是说，对每一安全 L-解释 M 和每一个体变元 M-赋值，$\|\varphi\|_{M,v}=1$。

(iii) φ 是 L-逻辑有效的，或称 φ 在 M 中是逻辑有效的，如果 φ 在任何安全的 L-解释中是 L-重言式。全体 L-逻辑有效公式之集记为 $T(L)$。

定义 7 设 $\varphi_0=f(t_1,\cdots,t_n)$ 是系统 $UL_{\bar{h}\in(0,1]}$ 中的公式，其中 $t_1,\cdots,t_n$ 是命题变元，$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\in J$。

(i) 称 $\varphi=f(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$ 是 φ_0 在 J 中的代换实例。

(ii) 称 $\varphi\in J$ 是 L 中的重言式，如果 φ 是系统 $UL_{\bar{h}\in[0.75,1]}$ 中某个重言式在 J 中的代换实例。

定理 1 若 φ 是 J 中的重言式，则对于任何线性序 ΠG^--代数 L，总有 $\varphi\in T(L)$。

证明：设 $\varphi_0=f(t_1,\cdots,t_n)$ 是系统 $UL_{\bar{h}\in[0.75,1]}$ 中的公式，$\varphi=f(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$，$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\in J$，$M$ 为任一安全的 L-解释，则对于赋值 v，可得到系统 $UL_{\bar{h}\in[0.75,1]}$ 所满足以下条件的赋值 v_0：

$$v_0(t_i)=\begin{cases}1, & \|\varphi_i\|_{M,v}=1\\ 0, & \|\varphi_i\|_{M,v}\neq 1\end{cases}(i=1,2,\cdots,n)$$

对 φ_0 中的所含连接词个数使用数学归纳法可证，$\|\varphi\|_{M,v}=1$ 当且仅当 $v_0(\varphi_0)=1$。因此，由 φ_0 是系统 $UL_{\bar{h}\in[0.75,1]}$ 中的重言式可知，$v_0(\varphi_0)=1$。从而，$\|\varphi\|_{M,v}=1$。

3 谓词形式系统 $\forall UL_{\bar{h}\in[0.75,1]}$ 的可靠性

引理 4 公理(U1)－(U20)是每一线性序 ΠG^--代数 L 的 L-重言式。

证明：根据定理 1 可知，(U1)－(U15)是 L-逻辑有效的。下证其它公理也是逻辑有效的。

要验证(U16)，(U17)，设变元 y 在公式 φ 中对 x 自由，则对于 M-赋值″，当 $v''\equiv_x v$ 且 $v''(x)=v(y)$ 时，$\|\varphi(y)\|^L_{M,v}=\|\varphi(x)\|^L_{M,v''}$。从而，

$$\begin{aligned}\|(\forall x)\varphi(x)\|^L_{M,v}&=\inf_{v'\equiv v}\|\varphi(x)\|^L_{M,v}\leqslant\|\varphi(y)\|^L_{M,v''}\\&\leqslant\sup_{v'}\|\varphi(x)\|^L_{M,v'}\\&=\|(\exists x)\varphi(x)\|^L_{M,v}\end{aligned}$$

于是，

$\|(\forall x)\varphi(x)\to\varphi(y)\|_{M,v}=\|(\forall x)\varphi(x)\|_{M,v}\to\|\varphi(y)\|_{M,v}=1$。

对于(U18)，设 x 在 v 中不自由，则对于 M-赋值 w，当 $w\equiv_x v$ 时，$\| v\|^L_{M,w}=\|\varphi(x)\|^L_{M,v}$。只需证明：$\inf_w(\| v\|^L_{M,w}\Rightarrow\|\varphi\|^L_{M,w})\leqslant(\| v\|^L_{M,v}\Rightarrow\inf_w\|\varphi\|^L_{M,w})$。令：$\| v\|^L_{M,v}=\| v\|^L_{M,w}=a$，$\|\varphi\|^L_{M,w}=b_w$。因此我们必须证明 $\inf_w(a\Rightarrow b_w)\leqslant(a\Rightarrow\inf_w b_w)$。一方面，$\inf_w b_w\leqslant b_w$，因此对每一 w，$a\Rightarrow b_w\geqslant(a\Rightarrow inf_w b_w)$，所以 $inf_w(a\Rightarrow b_w)\geqslant(a\Rightarrow\inf_w b_w)$。另一方面，如果对每一 w，$z\leqslant(a\Rightarrow b_w)$，则 $z*a\leqslant b_w$，即 $z*a\leqslant\inf_w b_w$，从而 $z\leqslant(a\Rightarrow\inf_w b_w)$。所以，$(a\Rightarrow\inf_w b_w)$ 是所有 $(a\Rightarrow b_w)$ 的下确界。从而 $\inf_w(a\Rightarrow b_w)\leqslant(a\Rightarrow\inf_w b_w)$。

类似地，我们证明(U19)，需要验证 $\inf_w(a_w\Rightarrow b_w)=(\sup_w a_w\Rightarrow b)$。实际上，$\sup_w\geqslant a_w$，从而 $(sup_w a_w\Rightarrow b)\leqslant(a_w\Rightarrow b)$，所以 $(\sup_w a_w\Rightarrow b)\leqslant\inf_w(a_w\Rightarrow b)$。如果对每一 w，$z\leqslant a_w\Rightarrow b$，则 $a_w\leqslant(z\Rightarrow b)$，从而 $\sup_w a_w\leqslant(z\Rightarrow b)$，即 $z\leqslant(\sup_w a_w\Rightarrow b)$。因此 $\sup_w a_w\Rightarrow b$ 是下确界。这就证明了(U19)。

下面证明(U20)，我们需要证明 $\inf_w(a\vee b_w)=a\vee\inf_w b_w$。实际上，$a\leqslant a\vee b_w$，因此 $a\leqslant\inf_w(a\vee b_w)$；类似的 $\inf_w b_w\leqslant\inf_w(a\vee b_w)$，从而 $a\vee\inf_w b_w\leqslant\inf_w(a\vee b)$。另一方面，对每一 w，设 $z\leqslant a\vee b_w$，我们证明 $z\leqslant a\vee\inf_w b_w$。

情形 1　若 $a\leqslant\inf_w b_w$，则 $z\leqslant b_w$ 对每一 w，$z\leqslant\inf_w b_w$ 并且 $z\leqslant a\vee\inf_w b_w$。

情形 2　若 $a\geqslant\inf_w b_w$，则对一些 w_0，$a\geqslant b_{w_0}$，因此 $z\leqslant a$ 且 $z\leqslant a\vee\inf_w b_w$。

从而命题得证。

引理 5(推理规则的可靠性)

(1) 对任一公式 φ,ψ，M 是安全的 L-解释，v 是一赋值，则 $\|\psi\|^L_{M,v}\geqslant\|\varphi\|^L_{M,v}*\|\varphi\to\psi\|^L_{M,v}$。特别地，如果 $\|\varphi\|^L_{M,v}=\|\varphi\to\psi\|^L_{M,v}=1_L$，则 $\|\psi\|^L_{M,v}=1_L$。

(2) 进而有 $\|\psi\|^L_M\geqslant\|\varphi\|^L_M*\|\varphi\to\psi\|^L_M$，因此如果 φ，$\varphi\to\psi$ 在 M 中是 1_L-真，则 ψ 在 M 中是 1_L-真。

(3) $\|\varphi\|^L_M=\|\Delta\varphi\|^L_M$，因此如果 φ 在 M 中是 1_L-真，则 $\Delta\varphi$ 在 M 中是 1_L-真。

(4) $\|\varphi\|^L_M=\|(\forall x)\varphi\|^L_M$，因此如果 φ 在 M 中是 1_L-真，则 $(\forall x)\varphi$ 在 M 中是 1_L-真。

证明：(1)没有涉及量词，仅在命题情形，所以由命题演算知其成立。

(2) 设 $\|\varphi\|_w=a_w$，$\|\psi\|_w=b_w$，$\inf_w a_w=a$。我们需要证明 $\inf_w(a_w\Rightarrow b_w)\leqslant\inf_w a_w\Rightarrow\inf_w b_w$。观察下式，$\inf(a_w\Rightarrow b_w)\leqslant(a_w\Rightarrow b_w)\leqslant(a\Rightarrow b_w)$，因此 $\inf_w(a_w\Rightarrow b_w)\leqslant\inf_w(a\Rightarrow b_w)$。只需证明 $\inf_w(a\Rightarrow b_w)\leqslant a\Rightarrow\inf_w b_w$。这由引理 4 知道正确。

(3) 由 $\|\varphi\|^L_M$ 及 $\|\Delta\varphi\|^L_{M,v}$ 的定义，$\|\Delta\varphi\|^L_M=1_L$，$\|\Delta\varphi\|^L_M=\Delta\|\varphi\|^L_M=1_L$，其成立。

(4) 由 $\|\varphi\|^L_M$ 的定义可知其成立。实际上，如果 x 是 φ 中的自由变元，则

$$\begin{aligned}\|\varphi\|^L_M&=\inf\{\|\varphi\|^L_{M,v'}\mid v'\in\Omega(M)\}\\&\leqslant\inf\{\|\varphi\|^L_{M,v'}\mid v'\equiv_x v\}=\|(\forall x)\varphi\|^L_{M,v}\end{aligned}$$

因此 $\|\varphi\|^L_M\leqslant\|(\forall x)\varphi\|^L_M$。

由此可以得到如下的可靠性定理。

定理 2(可靠性定理)　设 L 是全序 ΠG^--代数，设 φ 是 J

(下转第 223 页)

bio-sensors: First steps towards an automatic system[C] // Proceedings of the Kloster Irsee Tutorial and Research Workshop on Affective Dialogue Systems. Springer-Verlag, 2004: 36-48
[7] Kim K H, Bang S W, Kim S R. Emotion recognition system using short-term monitoring of physiological signals[J]. Medical and Biological Engineering and Computing, 2004, 42(3): 419-427
[8] Wagner J, Kim J, André E. From physiological signals to emotions: Implementing and comparing selected methods for feature extraction and classification[C] // Proceedings of IEEE International Conference on Multimedia & Expo. 2005: 940-943
[9] Kapoor A, Burleson W, Picard R W. Automatic prediction of frustration[J]. International Journal of Human-Computer Studies, 2007, 65(8): 724-736
[10] Nasoz F, Lisetti C L, Alvarez K, et al. Emotion recognition from physiological signals for presence technologies[J]. International Journal of Cognition, Technology and Work, 2003, 6(1): 4-14
[11] Cheng D F, Liu G Y, Qiu Y H. Applications of particle swarm optimization and K-nearest neighbors to emotion recognition from physiological signals[C] // Proceedings of Computational Intelligence and Security (CIS'08). 2008, 2: 52-56
[12] Glover F, Laguna M. Tabu Search [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1997
[13] Wen W H, Qiu Y H, Liu G Y. Electrocardiography Recording, Feature Extraction and Classification for Emotion Recognition [C] // Proceedings of the 2009 World Congress on Computer Science and Information Engineering. 2009: 168-172

（上接第 180 页）

中的公式。如果 $\vdash\varphi$，则 φ 是 L-逻辑有效的，即 $\|\varphi\|_M^L=1_L$。

类似的有下列强可靠性。

定义 8 设 L 是全序 ΠG^--代数，T 是理论，M 是安全的 L-解释。如果 T 中的每个公式在 M 中都是真的，也就是对每一 $\varphi\in T$，$\|\varphi\|_M^L=1$，则称 M 是 T 的 L-模型。

定理 3 设 L 是全序 ΠG^--代数，T 是理论，设 φ 是 J 中的公式。如果 $T\vdash\varphi$，则对于 T 的任何 L-模型 M，φ 在 L 中真，即 $\|\varphi\|_M^L=1_L$。

证明：由可靠性定理知，在 T 的任何 L-模型 M 中，公理都是真的，而且 T 中的公式也是真的。又 MP 规则、必然推理规则和概括规则都保真，因此结论成立。

定理 4（演绎定理） 设 T 是理论，φ,ψ 是闭公式，则 $(T\cup\{\varphi\})\vdash\psi$ 当且仅当 $T\vdash\Delta\varphi\to\psi$。

证明（充分性）：设 $T\vdash\Delta\varphi\to\psi$，因为 φ，$(\varphi\in(T\cup\{\varphi\}))$，所以 $\Delta\varphi$（必然推理规则），从而有 ψ（MP 规则），得证。下面证明必要性。

对从 $T\cup\{\varphi\}$ 到 ψ 的长度 m 作归纳证明。

当 $m=1$ 时，$\psi\in T\cup\{\varphi\}\cup Axm(\forall UL_{\bar{h}\in[0.75,1]})$，若 $\psi=\varphi$，结论成立。若 $\psi\in T$ 或 ψ 为公理，由引理 2(2) 有 $\psi\to(\Delta\varphi\to\psi)$，则由 $\psi,\psi\to(\Delta\varphi\to\psi)$ 和 MP 规则可得 $\Delta\varphi\to\psi$，即 $T\vdash\Delta\varphi\to\psi$。

假设 $m\leqslant k$ 时结论成立，即 m 步得到 γ，则有 $T\vdash\Delta\varphi\to\gamma$。现令 $m=k+1$。

如果 $\psi\in T\cup\{\varphi\}\cup Axm(\forall UL_{\bar{h}\in[0.75,1]})$，仍可取 $n=1$ 使结论成立。

如果 ψ 是该证明序列中的前两项 $\gamma,\gamma\to\psi$ 通过 MP 规则得到，则由归纳假设，使得 $T\vdash\Delta\varphi\to\gamma$，$T\vdash\Delta\varphi\to(\gamma\to\psi)$，则由引理 3 可得 $T\vdash(\Delta\varphi\&\Delta\varphi)\to(\gamma\&(\gamma\to\psi))$。又因为 $T\vdash(\Delta\varphi)\&(\Delta\varphi)\equiv\Delta\varphi$，所以 $T\vdash\Delta\varphi\to(\gamma\&(\gamma\to\psi))$，又由引理 2(4) $(\gamma\&(\gamma\to\psi)\to\psi$，所以由三段论有 $T\vdash\Delta\varphi\to\psi$。结论成立。

如果 ψ 是该序列中前一项 γ 通过必然推理规则得到，即 $\Delta\gamma=\psi$，则由归纳假 $T\vdash\Delta\varphi\to\gamma$，由必然推理规则，$T\vdash\Delta(\Delta\varphi\to\gamma)$，再由(U15)可得 $T\vdash\Delta\Delta\varphi\to\Delta\gamma$，又由公理(U14)，$\Delta\varphi\to\Delta\Delta\varphi$，所以由三段论可得 $T\vdash\Delta\varphi\to\Delta\gamma$，即 $T\vdash\Delta\varphi\to\psi$。结论成立。

如果 ψ 是该序列中前一项 γ 通过概括规则得到，即 $(\forall x)\gamma=\psi$，则由归纳假 $T\vdash\Delta\varphi\to\gamma$，于是由概括规则，$T\vdash(\forall x)(\Delta\varphi\to\gamma)$。但 $\Delta\varphi,\gamma$ 是闭公式，由公理(U18)可知，$T\vdash\Delta\varphi\to(\forall x)\gamma$，即 $T\vdash\Delta\varphi\to\psi$。结论成立。

这就完成了归纳证明。

结束语 泛逻辑学是在解决不确定推理问题中提出的逻辑系统，具有很强的应用背景。本文建立了谓词形式系统 $\forall UL_{\bar{h}\in[0.75,1]}$，从理论上保证了其得出定理都为重言式，为推理的有效性提供了保证。关于逻辑系统 $\forall UL_{\bar{h}\in[0.75,1]}$ 的完备性，我们将在另文中讨论。

参 考 文 献

[1] Hajek P. Metamathematics of Fuzzy Logic[M]. Dordrecht/London: Kluwer Academic Publishers, 1998
[2] Esteva F, Godo L. Monoidal t-normbased logic: towards a logic for left-continous t-norms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124(3): 271-288
[3] Cignoli R, Esteva F, Godo L, et al. Basic fuzzy logic is the logic of continuous t-norms and their residua[J]. Soft Computing, 2000, 4(1): 106-112
[4] Hohle U. Commutative, residuated l-monoids[M] // Hohle U, Klement E P, eds. Non-Classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets. Dordrecht/London: Kluwer Academic Publishers. 1995: 53-106
[5] Esteva F, Godo L, Hajek P, et al. Residuated fuzzy logics with an involutive negation[J]. Archive for Mathmatical Logic, 2000, 39 (1): 103-124
[6] Klement E P, Mesiar R, Pap E. Triangular Norms[M]. Dordrecht/London: Kluwer Academic Publishers, 2000
[7] Wang San-min, Wang Bao-shu, Pei Dao-wu. A fuzzy logic for an ordinal sum t-norm[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 149(3): 297-307
[8] Pei Dao-wu, Wang Guo-jun. The completeness and applications of the formal system L * [J]. Science in China (Series F), 2002, 45(1): 40-50
[9] 王国俊. 非经典逻辑与近似推理[M]. 北京：科学出版社，2000
[10] Wang Guo-jun. On the Logic Foundation of Fuzzy Reasoning [J]. Information Sciences, 1999, 117(1): 47-88
[11] 裴道武. 一阶形式系统 K * 及其完备性[J]. 数学年刊，2002，23A(6): 675-684
[12] 何华灿，王华，等. 泛逻辑学原理[M]. 北京：科学出版社，2001
[13] He Hua-can, Liu Yong-huai, He Da-qing. Generalized Logic in Experience Thinking[J]. Sciences in China (Series E), 1996, 39 (2): 225-234
[14] He Hua-can, Ai Li-rong, Wang Hua. Uncertainties and the flexible logics[C] // Proceedings of the Second International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Xi'an, China, 2003: 72-78
[15] Ma Ying-cang. A Propositional Formal Deductive System $UL_{\bar{h}\in[0.75,1]}$ Of Universal Logic [C] // 2006 IEEE International Conference on Computational Intelligence and Security IEEE Press. Guangzhou, China, November 2006: 109-112