

二层 SA/GA 算法解决时间依赖中国邮路问题

孙景昊 吴 雄 谭国真 闫 超

(大连理工大学计算机科学与技术学院 大连 116023)

摘 要 中国邮路问题是图论中的经典问题,得到了深入研究和广泛应用。近年来,由于计算机网络与通信、智能交通系统等复杂应用领域的需求,研究时间依赖网络中的问题具有更为重要的现实应用意义。首先给出了时间依赖中国邮路问题的定义,然后证明了传统中国邮路问题的定理在时间依赖中国邮路问题中不成立,最后设计了二层 SA/GA 算法(模拟退火/遗传算法)来解决该问题,对随机产生的实例进行了测试,并根据问题下界对算法结果进行了分析。

关键词 时间依赖,中国邮路问题,模拟退火,遗传算法

中图分类号 TP393 **文献标识码** A

Time-dependent Chinese Postman Problem Solved by Two Layers SA/GA Algorithm

SUN Jing-hao WU Xiong TAN Guo-zhen YAN Chao

(School of Computer Science and Technology, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract The Chinese postman problem is one of the classical problems in graph theory and has been widely and deeply researched since it was proposed. It is applicable in a wide range of fields. With the rapid development of computer networks, computer communication and intelligent transportation system, problems in time-dependent networks become more realistic than the classical problems. First, we presented the definition of time-dependent Chinese postman problem (TDCPP) and the property of TDCPP. Then we showed that the classical algorithms of Chinese postman problem (CPP) can't work in the time-dependent circumstances. Finally, two layers SA/GA algorithm(simulated annealing/genetic algorithm) was proposed, this approach was tested on some randomly generated data, the computational results were analyzed by comparing with lower bound of the problem.

Keywords Time-dependent, Chinese postman problem, Simulated annealing, Genetic algorithm

1 引言

中国邮路问题(Chinese Postman Problem)是 1962 年由管梅谷教授首次提出的^[1],成为图论中的经典问题。该问题是在一个连通无向图中,从给定源结点出发,遍历图中每条边至少一次,并回到源结点,使得总的耗费最小。该问题又被称为无向中国邮路问题(UCPP),Edmonds 和 Johnson^[2]给出了 UCPP 最小完美匹配算法。该问题有众多的应用领域,如垃圾收集路线、扫雪车路线、邮件投递路线、软件测试等,因此许多学者对该问题进行了深入的研究并提出了许多新的分类:有向中国邮路问题、混合中国邮路问题、风向邮路问题、乡村邮路问题、层次邮路问题和多邮递员问题。有向中国邮路问题的代表性工作是 Edmonds 和 Johnson^[2];混合中国邮路问题的代表性工作是 Edmonds 和 Johnson^[2],Papadimitriou^[3],Frederickson^[4];风向邮路问题的代表性工作是 Minieka^[5],Win^[6],Raghavachari^[7];乡村邮路问题的代表性工作是 Orloff^[8]和 Ghiani^[9];层次邮路问题的代表性工作是 Dror^[10],

Cabral^[11],Korteweg 和 Volgenant^[12];多邮递员问题的代表性工作是 Frederickson^[4]和 Dino Ahr^[13]。

近年来,计算机网络与通信、分布式处理和智能交通系统(ITS)的兴起给一些传统的研究课题带来了新的转折:时间依赖,即网络中弧的走行时间是时间的函数。它在时间依赖旅行商问题(TDTSP)和时间依赖车路由问题(TDVRP)领域得到了深入的研究。Malandraki^[14,15],Yang-Byung^[16],Soumia^[17]和 Alberto V. D^[18]等人给出了许多整数规划模型和算法,几乎所有计算智能算法都被用于求解 TDVRP。

同样,时间依赖网络中的中国邮路问题也有着重要的实际应用价值。比如在邮递员投递邮件过程中,由于交通事故、天气变化、上下班高峰期以及其它众多随机因素的影响所带来的交通密度的变化,会影响到旅行时间的变化。这样两点之间的旅行时间往往不仅仅是距离的函数,还跟进入这两点之间的链路的时刻有关。据作者所知,目前国内外还没有相关的工作,本文重点研究时间依赖无向中国邮路问题,也简称为时间依赖中国邮路问题(Time-dependent Chinese Postman

到稿日期:2010-06-19 返修日期:2010-09-29 本文受国家 973 项目(2005CB321904),国家自然科学基金项目(60873256)资助。

孙景昊(1986-),男,博士生,主要研究方向为网络优化、数学规划理论,E-mail:jhsun@mail.dlut.edu.cn;吴 雄(1986-),男,硕士生,主要研究方向为网络最优化理论;谭国真(1960-),男,博士,教授,主要研究方向为时变网络优化、智能交通和城市交通;闫 超(1986-),男,硕士,主要研究方向为智能算法。

Problem, TDCPP)。

第2节给出了TDCPP问题的定义和性质;第3节针对时间依赖网络中国邮路问题的新性质,提出了二层SA/GA算法(模拟退火/遗传算法);第4节是算法测试和分析;最后是结束语。

2 TDCPP问题的定义和性质

2.1 TDCPP问题的定义

给定一个连通无向图 $G=(V, E, T)$,其中 V 是一个非空有限结点集; $E \subseteq V \times V$ 是有限边集; $T = \{c_{ij}(t) | \forall (v_i, v_j) \in E\}$,对于每条边 $(v_i, v_j) \in E$, $c_{ij}(t)$ 表示遍历边 (v_i, v_j) 的时间函数,并且 $c_{ij}(t) = c_{ji}(t)$ 。TDCPP(Time Dependent Chinese Postman Problem)问题就是对于给定的源结点 $v_0 \in V$,在 G 中求一条回路,该回路从 v_0 出发,经过 E 中的每条边至少一次,最终回到 v_0 ,且满足总的行走时间最短。

考虑边上的旅行时间函数 $c_{ij}(t_i)$ 为分段函数的情况。在这种情况下,一天被划分为若干个时间段,这在现实生活中很普遍,例如在城市交通网络中,每天上下班高峰期会比较拥挤,其余时间相对比较通畅,这样一天就可以划分为3个时间段。如此以来,一旦知道了邮递员开始遍历某条边 (i, j) 所处的时间段,遍历该边所需的时间就是确定值。

这样,就可以对原网络进行扩展。每条边 (i, j) 都可以用 M_{ij} 条并行的从 i 到 j 的边来取代,其中 M_{ij} 为分段函数 $c_{ij}(t_i)$ 所具有的时间段数,每条并行边对应着一个时间段 m 。对于不同的边, M_{ij} 的值可能会不同。为叙述方便起见,用 M 代替 M_{ij} 来表示时间间隔的数目,这意味着原网络中所有的边具有相同的时间段数。图1给出了边 (i, j) 上的旅行时间函数的例子,该分段函数具有3个时间段。

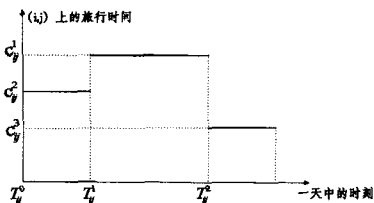


图1 边 (i, j) 上的旅行时间函数($M=3$)

2.2 TDCPP问题的性质

CPP满足如下定理:

定理1 C 是带正权无向连通图 $G=(V, E, W)$ 中的最优投递路线当且仅当对应的欧拉图 G^* 应满足:

- (1) G 的每条边在 G^* 中至多重复出现一次;
- (2) G 的每个圈上在 G^* 中重复出现的边的权之和不超过该圈权的一半。

TDCPP的性质:在TDCPP中,定理1不成立。

证明:在CPP问题中,边的重复次数不超过1,而在TDCPP中,无论是FIFO还是非FIFO网络,都不易得出边的重复次数的上限。构造反例,如图2所示。

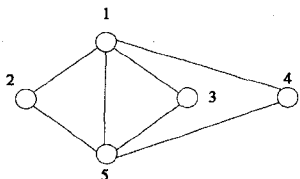


图2 不满足传统CPP边重复至多1次的例子

对于FIFO网络,以图2为例,假设各个边的权值函数为:

$$g_{15}(t) = 1, \forall t \geq 0;$$

$$g_{35}(t) = \begin{cases} 2 & t \leq 1 \\ 50 & t > 1 \end{cases} \quad g_{13}(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 1 \\ 100 & t > 1 \end{cases} \quad g_{255}(t) = \begin{cases} 4 & t \leq 5 \\ 6 & t > 5 \end{cases}$$

$$g_{12}(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 4 \\ 100 & t > 4 \end{cases} \quad g_{45}(t) = \begin{cases} 4 & t \leq 12 \\ 5 & t > 12 \end{cases} \quad g_{14}(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 11 \\ 100 & t > 11 \end{cases}$$

显然,最优路径为 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1$,总权值为16,其中 $(1,5)$ 边重复了2次。

对于非FIFO网络,仍然以图2为例,假设各个边的权值函数为:

$$g_{35}(t) = 1, \forall t \geq 0;$$

$$g_{35}(t) = \begin{cases} 1 & t=1 \\ 100 & \text{其它} \end{cases} \quad g_{13}(t) = \begin{cases} 1 & t=2 \\ 100 & \text{其它} \end{cases} \quad g_{25}(t) = \begin{cases} 1 & t=4 \\ 100 & \text{其它} \end{cases}$$

$$g_{12}(t) = \begin{cases} 1 & t=15 \\ 100 & \text{其它} \end{cases} \quad g_{45}(t) = \begin{cases} 1 & t=7 \\ 100 & \text{其它} \end{cases} \quad g_{14}(t) = \begin{cases} 1 & t=8 \\ 100 & \text{其它} \end{cases}$$

显然,最优路径为 $1 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 1$,总权值为9,其中 $(1,5)$ 边重复了2次。所以在时间依赖网络的中国邮路问题中,边可以重复多次,而不是传统中国邮路问题的至多重复一次。证毕。

因为CPP的算法都是基于定理1的,因此CPP的算法不适合解决TDCPP问题,下一节针对TDCPP的性质,提出了模拟退火和遗传算法相结合的算法。

3 二层SA/GA算法

初始化 $r=0, T=T_r, X^{best} = \phi$

生成 X^0 (3.1.1节), $X^{best} = X^0$

Do(外循环)

$n=0$

Do(内循环)

产生新解: $X^n \rightarrow X^{new}$ (3.1.2节)

$\Delta t = C(X^{new}) - C(X^{best})$,用遗传算法计算 $C(X^n)$ (3.2节)

{

初始化 $m=0$

由 X^0 产生初始种群(3.2.2节)

计算每个染色体的适应度(3.2.1节)

Do

父代选择(3.2.2节)

遗传操作产生新种群(3.2.3节)

$m=m+1$

Loop While ($m <$ 最大进化代数)

}

If $\Delta t < 0$ Then

$X^{best} = X^{new}$ 且 $n=n+1$ 且 $X^n = X^{new}$

Else

随机产生 $y \rightarrow U(0,1)$

令 $z = \exp(-\Delta t/T_r)$

If $y < z$ 且 $n=n+1$ 且 $X^n = X^{new}$

End if

Loop While ($n < L$ || 终止条件不满足) $r=r+1$

$T_r = T_{r-1} - t$

Loop While ($T_r > 0$ || 终止条件不满足)

终止条件为连续 K 次不接受新解

图3 二层SA/GA算法的总体框架

传统CPP算法分为两步:首先用Floyd和最小权完美匹

配算法确定问题的最优添边方案以形成欧拉图,然后利用欧拉寻径算法找一条欧拉回路。然而根据 TDCPP 的性质,不能应用传统算法得到 TDCPP 的最优添边方案,即使能够确定最优添边方案,也要遍历该方案的所有欧拉回路才能确定最优解。因此设计了一种二层 SA/GA 算法,内层采用 GA 算法确定某个添边方案的满意解,外层采用 SA 算法搜索不同的添边方案,最后收敛到全局满意解。而选择 SA 和 GA 的出发点是把 SA 的概率突跳性和 GA 的群体并行搜索能力有机地结合起来,以提高寻优过程的快速性和优化度。二层 SA/GA 算法的总体框架如图 3 所示。

3.1 外层模拟退火算法

3.1.1 初始解产生

首先由 $G=(V, E, T)$ 产生 M (时间段数)个新图 $G_m=(V_m, E_m, T_m), m=1, 2, \dots, M$, 其中 $V_m=V, E_m=E, T_m$ 中每条边的权值都是常数,且 $\forall (i, j) \in E_m, c_{ij} = c_{ij}(t), T_{ij}^{m-1} \leq t < T_{ij}^m$; 然后随机选择其中一个图 G_m , 用 Floyd 和最小权完美匹配算法找到该图的最优添边方案形成新的欧拉图 G^* 。初始解就是对原图添加重复边形成的欧拉图 G^* 。

3.1.2 新解产生

对当前添边方案形成的欧拉图进行局部调整生成新的欧拉图。随机取一条边,设选中边的各个时间段边权最大值为 w , 整个网络各个时间段边权最大值中最小的为 w_{\min} 。

①如果选中边没有重复,重复该边 2 次;

②如果选中边重复次数为 1,按概率 $p = \exp(w_{\min} - w)$ 重复该边 2 次;按概率 $1 - p$ 删除该边 1 次,然后在该边的两端点间找一条路径,重复该路径上的边 1 次;

③如果选中边重复次数大于等于 2,按概率 $p = \exp(w_{\min} - w)$ 重复该边两次;按概率 $(1 - p)/2$ 删除该边 1 次,然后在该边的两端点间找一条路径,重复该路径上的边 1 次;按概率 $(1 - p)/2$ 删除该边 2 次。

3.2 内层遗传算法

下面根据遗传算法的操作,以图 4 为例介绍求每个添加方案形成的欧拉图的满意解的实现过程。

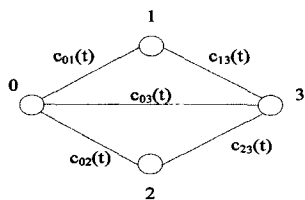


图 4 一个时间依赖网络

设图 4 中节点 0 为初始点,求该时间依赖网络中的中国邮路问题的最优解。这里不妨设其中一种添边方案为 $(0, 3)$ 边重复一次。对该添加方案形成的欧拉图应用遗传算法找到满意解。

3.2.1 编码与适应度函数

以该添加方案的欧拉回路的节点遍历次序作为遗传算法的编码,即 0130230 是一个遗传编码,因为初始点不变,所以针对遗传编码任何操作都不能改变第一位基因。又因为初始点和终止点是同一点,所以该编码可简化为 013023。

如果某个基因前面有和它相同的基因,那么将该基因码重复加上节点数(直到前面没有相同的基因)得到新基因码,因此前面的基因码变为 013427。令遗传编码对应的欧拉回路的遍历时间为 $t(\text{gene})$ 。

由于在可行解群体的初始化、交叉操作中均隐含 TDCPP 问题的合法性约束,故适应度函数取为: $Z - t(\text{gene})$, 其中 Z 为较大的数,且 $Z > t(\text{gene})$ 。

3.2.2 种群初始化和选择机制

开始用 Fleury 算法产生初始种群,种群规模为 N 。保留最优解并保留 M 个较优的个体作为样本群体,以供选择;在每一代运算过程中,个体被选中的概率与其在群体中的相对适应度成正比。

3.2.3 交叉方法

①随机在编码中选择一个交配区域,如两父编码及交配区域选定为:

$A = 013|42|7$

$B = 034|17|2$

②将 B 的交配区域加到 A 的某一位置(如编码末尾), A 的交配区域加到 B 的相同位置得到:

$A' = 013427|17$

$B' = 034172|42$

③在 A' 和 B' 中自交配区域后依次删除与交配区相同的编码,得到的两子编码为:

$A'' = 034217$

$B'' = 031742$

④显然, A'' 和 B'' 都是非法编码(按编码遍历的不是欧拉回路),通过反用 Fleury 算法将编码调整为最终的合法编码:

$A''' = 034271$

$B''' = 031472$

这种方法在两父编码相同的情况下仍能产生一定程度的变异效果,它对维持群体的多样性有一定作用。

4 算法测试与分析

算法用 java 编码并在 Windows XP/AMD3500+ 中实现,通过与问题下界比较对算法进行了分析。

4.1 测试问题产生

表 1 总结了随机产生的 TDCPP 测试问题的属性,总共产生了 20 个测试问题,对于每个问题,给定节点数和边数,边权产生于 $[20, 60]$ 均匀分布。

表 1 TDCPP 测试问题的属性

节点数	10	20	30	40	50
边数	20—200				
每条边的时间段	3 或 4				
每种情况的重复次数	10				
问题总数	20				

4.2 问题下界生成策略

首先由原图 $G=(V, E, T)$ 得到新图 $G'=(V', E', T')$, 其中 V' 与 V 相同, E' 与 E 相同, T' 中每条边的权值都是常数,且 $\forall (i, j) \in E', c_{ij} = \text{Min}(c_{ij}(t))$; 然后对 G' 求中国邮路问题的最优解。最优解即为问题下界。

算法的近似度按如下计算:

$$A_{\text{pro}} = F_{\text{best}} / F^*$$

式中, F^* 为问题下界, F_{best} 是算法找到的最优解。

4.3 计算结果

内层遗传算法的参数如下:种群规模 N 为 500,选择概率为 0.9,进化代数为 128;外层模拟退火算法终止条件为 $K = 15$ 。算法测试结果如表 2 所列。

(下转第 101 页)

puting[C]// First International Conference on Cloud Computing, Lecture Notes in Computer Science, 2009; 589-594

- [18] Zhou Guo-fu, Yuan Chong-yi. Mapping PUNITY to UniNet[J]. Journal of Computer Science and Technology, 2003, 18(3): 378-387
- [19] Chandy K M, Misra J. Parallel program design[M]. MA, USA: Addison-Wesley Pub. Co. Inc, 1989
- [20] GRAPHVIZ[EB/OL]. <http://www.graphviz.org>, May 5, 2010
- [21] GRAPPA[EB/OL]. <http://www2.research.att.com/~john/>

Grappa, May 5, 2010

- [22] JAKARTA-ORO [EB/OL]. <http://jakarta.apache.org/oro/>, May 5, 2010
- [23] Bjorner D, Jones C B, Aircinnigh A, et al. VDM '87 VDM--A Formal Method at Work[M]. Germany: Springer-Verlag, 1987
- [24] Spivey J M. The Z Notation: A Reference Manual[EB/OL]. <http://spivey.oriel.ox.ac.uk/~mike/znm/>, 1998

(上接第 95 页)

表 2 二层 SA/GA 算法的测试结果

时间 段数	节点 数	边数	最大 值	近似 度	最小 值	近似 度	平均 值	近似 度	平均 CPU 时间(s)
3	10	25	1008	1.18	980	1.15	992.9	1.16	10.57
3	10	30	1198	1.22	1123	1.15	1170.2	1.19	17.58
3	20	40	1795	1.32	1636	1.20	1728.8	1.27	36.28
3	20	50	2019	1.26	1874	1.17	1948.4	1.24	53.53
3	30	75	3345	1.33	3081	1.23	3209.4	1.29	180.63
3	30	100	4311	1.34	4107	1.28	4208.1	1.31	249.17
3	40	120	5391	1.38	5033	1.29	5288.3	1.36	376.20
3	40	140	5991	1.35	5749	1.30	5887.6	1.33	418.87
3	50	150	6720	1.39	6492	1.34	6613.4	1.37	705.36
3	50	200	8543	1.31	8249	1.27	8433.9	1.30	998.61
4	10	20	927	1.37	792	1.17	865.3	1.28	12.31
4	10	35	1454	1.34	1311	1.20	1377.1	1.26	21.70
4	20	40	1864	1.41	1678	1.27	1779.5	1.36	41.78
4	20	45	2125	1.45	1970	1.34	2031.1	1.38	61.75
4	30	60	2949	1.47	2778	1.39	2867.1	1.43	136.14
4	30	90	3843	1.43	3644	1.35	3756.0	1.39	236.41
4	40	100	4504	1.46	4240	1.37	4403.6	1.43	311.25
4	40	130	5676	1.45	5356	1.37	5529.5	1.41	538.32
4	50	170	7130	1.41	6787	1.35	6967.4	1.38	761.83
4	50	195	8306	1.42	8075	1.38	8187.9	1.40	1023.37

从表 2 可以得出,该算法可以在合理的时间给出很好的解。对于测试的实例,该算法的近似度在最坏情况下不大于 1.47,在最好情况下不大于 1.39,平均情况下不大于 1.43。另外,随着网络规模的扩大,算法的执行时间也随之增加;因为该算法是用问题下界衡量近似度,所以该算法的实际近似度要好于统计的结果。

结束语 时间依赖中国邮路问题与传统中国邮路问题相比有更广泛的应用领域,更具有普遍意义。时间依赖中国邮路问题的时变特性,使得传统问题的理论和算法不再适用。在分析时间依赖中国邮路问题的性质的基础上,提出了二层 SA/GA 算法,与已有相关算法相比,该算法能有效地解决大规模时间依赖中国邮路问题。对于具体的测试实例而言,近似度在最坏情况下不大于 1.47,实现了结果与效率平衡的目的。该算法可以应用到网络通信、实时系统测试以及智能交通系统等众多领域。

参 考 文 献

- [1] 管梅谷. 奇偶图上作业法[J]. 数学学报, 1962, 1: 263-275
- [2] Edmonds J, Johnson E L. Matching, Euler tours and the Chinese Postman Problem[J]. Math. Prog, 1973, 5: 88-124
- [3] Papadimitriou C H. On the Complexity of Edge Traversing[J]. Journal of the ACM, 1976, 23, 544-544

- [4] Frederickson G N. Approximation Algorithms for Some Postman Problem[J]. Journal of the ACM, 1979, 26, 538-554
- [5] Minieka E. The Chinese postman problem for mixed networks [J]. Management Science, 1979, 25(3): 643-648
- [6] Wm Z. On the windy postman problem on eulerian graphs[J]. Mathematical Programming, 1989, 44: 97-112
- [7] Raghavachari B, Veerasarnyt J. Approximation algorithm for the asymmetric Postman Problem[C]// Proceedings of 10th Annual ACM-SIAM Symposium on Discret Algorithms, 1999; 734-741
- [8] Orloff C S. A Fundamental Problem in Vehicle Routing[J]. Networks, 1974, 4: 35-64
- [9] Ghiania G, Musmannob R. A heuristic for the periodic rural postman problem[J]. Computers & Operations Research, 2005, 32: 219-228
- [10] Dror M, Stern H, Trudeau P. Postman tour on a graph with precedence relation on arcs[J]. Networks, 1987, 17: 283-294
- [11] Cabral E A, Gendreau M, Ghiani G, et al. Solving the hierarchical Chinese postman problem as a rural postman problem[J]. European Journal of Operational Research, 2004, 155: 44-50
- [12] Korteweg P, Volgenant T. On the Hierarchical Chinese Postman Problem with linear ordered classes[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 169: 41-52
- [13] Ahr D, Reinelt G. A tabu search algorithm for the min-max k-Chinese postman problem [J]. Computers & Operations Research, 2006, 33(12): 3403-3422
- [14] Daskin M C, Mark S. Time dependent vehicle routing problems: Formulations, properties and heuristic algorithms[J]. Transportation Science, 1992, 26: 185-200
- [15] Malandraki C, Robert B D. A restricted dynamic programming heuristic algorithm for the time dependent traveling salesman problem[J]. European Journal of Operational Research, 1996, 90: 45-55
- [16] Yang-Byung P. A solution of the bicriteria vehicle scheduling problems with time and area-dependent travel speeds[J]. Computer & Industrial Engineering, 2000, 38(1): 73-187
- [17] Ichoua S, Gendreau M, Potvin J Y. Vehicle dispatching with time-dependent travel times[J]. European Journal of Operational Research, 2003, 144: 379-396
- [18] Alberto V D, Luca M A, Norman C, et al. Time Dependent Vehicle Routing Problem with an Ant Colony System[A]// Istituto Dalle Molle di Studi sull'Intelligenza Artificiale[C]. Switzerland, IDSIA-02-03, 2003