

# P-集合与 F-外嵌入信息辨识-发现

于秀清

(德州学院数学系 德州 253000) (山东大学数学与系统科学学院 济南 250100)

**摘要** 利用外 P-集合  $X^F$ , 给出信息  $(x)$  的 F-外嵌入信息  $(x)^F$  与 F-外嵌入信息依赖概念, 给出 F-外嵌入信息存在性定理、F-外嵌入信息依赖性定理。给出 F-外嵌入系数  $\rho^F$  与 F-外嵌入度  $\eta^F$  概念, 并利用这些概念, 给出 F-外嵌入信息关系定理与 F-外嵌入辨识定理。利用这些概念与结果, 给出 F-外嵌入信息在信息系统中的应用。

**关键词** P-集合, F-外嵌入, 外嵌入依赖, 外嵌入辨识, 应用

中图法分类号 O144 文献标识码 A

## P-sets and the Identification-recovery of F-outer Embedding Information

YU Xiu-qing

(Department of Mathematics Sciences, Dezhou University, Dezhou 253000, China)

(School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan 250100, China)

**Abstract** By using outer P-sets  $X^F$ , the concepts of F-outer embedding information  $(x)^F$  and F-outer embedding information dependence, F-outer embedding coefficient and F-outer embedding degree to information  $(x)$  were proposed. Moreover, based on these concepts, existing theorems, dependence theorems and identification theorems about F-outer embedding information were presented. The application of F-outer embedding information in information system was discussed.

**Keywords** P-sets, F-outer embedding, Outer embedding dependence, Outer embedding identification, Application

### 1 引言

P-集合<sup>[1,2]</sup>是由内 P-集合  $X^F$  (internal packet sets  $X^F$ ) 与外 P-集合  $X^F$  (outer packet sets  $X^F$ ) 构成的集合对; 或者  $(X^F, X^F)$  是 P-集合。它是把动态特性引入到有限普通集合  $X$  中, 改进普通集合  $X$  而提出来的。P-集合  $(X^F, X^F)$  具有动态特性。如果 P-集合丢失了动态特性, 则 P-集合  $(X^F, X^F)$  回到了有限普通集合  $X$  的“原点”。文献[3-15]给出 P-集合在多个领域中的应用。因为 P-集合  $(X^F, X^F)$  具有动态特性, 若集合  $X$  的属性集  $\alpha$  内的属性不断地被补充, 则内 P-集合  $X^F$  构成一个内 P-集合串; 或者  $X_n^F \subseteq X_{n-1}^F \subseteq \dots \subseteq X_1^F \subseteq X^F$ ; 若  $X$  的属性集  $\alpha$  内的属性不断地被删除, 则外 P-集合  $X^F$  构成一个外 P-集合串  $X^F \subseteq X_1^F \subseteq \dots \subseteq X_{n-1}^F \subseteq X_n^F$ 。内 P-集合串与外 P-集合串是 P-集合的动态特性。

对外 P-集合串  $X^F \subseteq X_1^F \subseteq \dots \subseteq X_{n-1}^F \subseteq X_n^F$  给出再认识: 给定外 P-集合  $X_i^F, X_j^F, i < j; X_i^F$  与  $X_j^F$  满足  $X_i^F \subseteq X_j^F; X_i^F \subseteq X_j^F$  可以等价地看作  $X_i^F$  嵌入(镶入)在  $X_j^F$  之外, 或者  $X_j^F$  外嵌入在  $X_i^F$  中。显然  $X_n^F$  嵌入在  $X_{n-1}^F$  之外,  $X_{n-1}^F$  嵌入在  $X_{n-2}^F$  之外, 如此等等。  $X_j^F$  嵌入在  $X_i^F (i < j)$  之外是由  $X_i^F$  的属性集合  $\alpha_i^F$  内的属性被删除得到的。外 P-集合的外嵌入是 P-集合的应用前景被看好的重要特性之一, 这个特性在文献[1-15]中没有给出讨论。“嵌入”是计算机科学与工程中一个常见的概念。如果把外 P-集合的外嵌入特性交叉渗透到信息科学中

的“嵌入技术”研究中, 则人们能得到一些什么样的新启迪、新结果? 这是人们希望知道的。

本文利用 P-集合的结构, 给出 F-外嵌入信息概念、F-外嵌入信息依赖概念, 利用这些概念, 得到 F-外嵌入信息定理、F-外嵌入信息发现-辨识准则、信息 F-外嵌入原理与信息发现准则, 并给出它们在信息发现中的应用。

为了使读者容易接受本文给出的结果, 把 P-集合的结构引入到本文的第 2 节中, 作为本文讨论的预备知识。

### 2 P-集合与它的动态特性<sup>[1,2]</sup>

**约定** 在本文第 2—5 节中,  $U$  是有限元素论域,  $V$  是有限属性论域。

2008 年, 文献[1, 2]给出: 给定有限非空普通集合  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset U, \alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subset V$  是  $X$  的属性集合, 称  $X^F$  是  $X$  生成的内 P-集合(internal packet sets), 简称  $X^F$  是内 P-集合, 而且

$$X^F = X - X^- \quad (1)$$

$X^-$  称作  $X$  的  $\bar{F}$ -元素删除集合, 而且

$$X^- = \{x | x \in X, \bar{f}(x) = u \in X, \bar{f} \in \bar{F}\} \quad (2)$$

如果  $X^F$  的属性集合  $\alpha^F$  满足

$$\alpha^F = \alpha \cup \{\alpha' | f(\beta) = \alpha' \in \alpha, f \in F\} \quad (3)$$

式中,  $\beta \in V, \bar{\beta} \in \alpha; f \in F$  把  $\beta$  变成  $f(\beta) = \alpha' \in \alpha; X^F \neq \phi$ 。

给定有限非空普通集合  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset U, \alpha =$

$\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset V$  是  $X$  的属性集, 称  $X^F$  是  $X$  生成的外  $P$ -集合(outer packet sets), 简称  $X^F$  是外  $P$ -集合, 而且

$$X^F = X \cup X^+ \quad (4)$$

$X^+$  称作  $X$  的  $F$ -元素补充集合, 而且

$$X^+ = \{x' \mid u \in U, u \bar{\in} X, f(u) = x' \in X, f \in F\} \quad (5)$$

如果  $X^F$  的属性集  $a^F$  满足

$$a^F = a - \{a_i \mid \bar{f}(a_i) = \beta_i \bar{\in} a, \bar{f} \in \bar{F}\} \quad (6)$$

式中,  $a_i \in a, \bar{f} \in \bar{F}$  把  $a_i$  变成  $\bar{f}(a_i) = \beta_i \bar{\in} a; a^F \neq \phi$ .

由内  $P$ -集合  $X^F$  与外  $P$ -集合  $X^F$  构成的集合对, 称作普通集合  $X$  生成的  $P$ -集合(packet sets,  $P$ =packet), 简称  $P$ -集合。

如果

$$(X^F, X^F) \quad (7)$$

普通集合  $X$  称作  $(X^F, X^F)$  的基集合(基础集合, ground sets)。

因为  $P$ -集合具有动态特性,  $P$ -集合的一般表示形式是

$$\{(X_i^F, X_j^F) \mid i \in I, j \in J\} \quad (8)$$

式中,  $I, J$  是指标集(index sets), 式(8)是  $P$ -集合的集合对族的表示形式。

因为  $X$  的属性集  $a$  内, 不断有部分属性被删除, 由外  $P$ -集合  $X^F$ , 得到

$$X_1^F \subseteq X_2^F \subseteq \dots \subseteq X_{n-1}^F \subseteq X_n^F \quad (9)$$

$P$ -集合结构与概念的说明

1°. 为了简单, 又不引起误解, 式(7)只用若干个集合对中的一个集合对表示  $P$ -集合。

2°.  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}, \bar{F} = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$  是元素迁移族;  $f \in F, \bar{f} \in \bar{F}$  是元素迁移。 $f \in F$  的特征是: 元素  $u \in U, u \bar{\in} X, f$  把  $u$  变成  $f(u) = x' \in X$ , 或者属性  $\beta \in V, \beta \bar{\in} a, f \in F$  把  $\beta$  变成  $f(\beta) = a' \in a$ 。 $\bar{f} \in \bar{F}$  的特征是: 元素  $x \in X, \bar{f} \in \bar{F}$  把  $x$  变成  $\bar{f}(x) = u \bar{\in} X$ , 或者属性  $a_i \in a, \bar{f} \in \bar{F}$  把  $a_i$  变成  $\bar{f}(a_i) = \beta_i \bar{\in} a$ 。

3°. 式(3)的特征与计算机的内存储器  $T = T + 1$  相似,  $T = T + 1$  具有动态特性, 式(3)也具有动态特性。式(3)中  $\{a' \mid f(\beta) = a' \in a, f \in F\}$  是表示被补充到  $a$  内的新属性构成的集合,  $\{a' \mid f(\beta) = a' \in a, f \in F\}$  与被补充新属性之前的  $a$  满足  $\{a' \mid f(\beta) = a' \in a, f \in F\} \cap a = \phi$ 。

4°. 式(4)的动态特性是: 式(4)、式(5)可以用一个式子表示为

$$X^F = X \cup \{x' \mid u \in U, u \bar{\in} X, f(u) = x' \in X, f \in F\} \quad (10)$$

式(10)的动态特征与式(3)相同。

5°. 在式(1)~式(3)中,  $X$  内被删除部分元素,  $X$  生成内  $P$ -集合  $X^F$ , 等价于对  $X$  的属性集  $a$  内补充新属性,  $a$  生成  $a^F, a \subseteq a^F$ 。或者, 若  $a_1^F, a_2^F$  分别是  $X_1^F, X_2^F$  的属性集, 而且  $a_1^F \subseteq a_2^F$ , 则有  $X_2^F \subseteq X_1^F$ 。式(3)中的  $\{a' \mid f(\beta) = a' \in a, f \in F\}$  不是从  $X$  内被删除的元素构成的集合  $X^-$  的属性集,  $X^-$  是式(2)。

6°. 由 1°~5° 知,  $P$ -集合  $(X^F, X^F)$  是由内  $P$ -集合  $X^F$  与外  $P$ -集合  $X^F$  构成的集合对,  $X^F, X, X^F$  的属性集  $a^F, a, a^F$  满足  $a^F \subseteq a \subseteq a^F$ 。若集合  $X$  的属性集  $a$  内的属性不断得到补充, 则得到内  $P$ -集合串; 若  $a$  内的属性不断被删除, 得到外  $P$ -集合串。在这样的条件下  $P$ -集合  $(X^F, X^F)$  是由一串内  $P$ -集合  $X_i^F, i=1, 2, \dots, m$  与一串外  $P$ -集合  $X_j^F, j=1, 2, \dots, n$  构成的集合对族, 其中  $X_i^F, i=1, 2, \dots, m$  是在元素迁移  $f \in F$  的作

用下, 集合  $X$  的属性集  $a$  之外的属性不断被迁入  $a$  内生成的集合串;  $X_j^F, j=1, 2, \dots, n$  是在元素迁移  $\bar{f} \in \bar{F}$  的作用下, 属性集  $a$  之内的属性不断被迁出  $a$  生成的集合串, 所以有集合串:  $X_m^F \subseteq X_{m-1}^F \subseteq \dots \subseteq X_1^F$  与  $X_1^F \subseteq X_2^F \subseteq \dots \subseteq X_n^F$ 。或者说  $X^F$  是  $X_i^F, i=1, 2, \dots, m$  的代表,  $X^F$  是  $X_j^F, j=1, 2, \dots, n$  的代表。本文是在这个条件下进行讨论的。

7°. 式(8)给出的  $P$ -集合  $\{(X_i^F, X_j^F) \mid i \in I, j \in J\}$  表示由有限个集合对构成的集合。

利用式(1)~式(7)、式(8)给出的结构, 容易得到  $P$ -集合  $(X^F, X^F)$  与普通集合  $X$  之间的关系:

**定理 1** 若  $\bar{F} = F = \phi$ , 则  $P$ -集合  $(X^F, X^F)$  与普通集合  $X$  满足

$$(X^F, X^F)_{\bar{F}=F=\phi} = X \quad (11)$$

事实上, 若  $\bar{F} = \phi$ , 式(2)  $\{x \mid x \in X, \bar{f}(x) = u \bar{\in} X, \bar{f} \in \bar{F}\} = \phi$ , 式(1)成为  $X^F = X - X^- = X$ ; 若  $F = \phi$ , 式(5)  $\{x' \mid u \in U, u \bar{\in} X, f(u) = x' \in X, f \in F\} = \phi$ , 式(4)成为  $X^F = X \cup X^+ = X$ ; 若  $\bar{F} = F = \phi$ , 则有式(11)。

**定理 2** 若  $\bar{F} = F = \phi$ , 则  $P$ -集合  $\{(X_i^F, X_j^F) \mid i \in I, j \in J\}$  与普通集合  $X$  满足

$$\{(X_i^F, X_j^F) \mid i \in I, j \in J\}_{\bar{F}=F=\phi} = X \quad (12)$$

式(12)指出: 在  $\bar{F} = F = \phi$  的条件下, 每一个  $X_i^F$ 、每一个  $X_j^F$  都回到了有限普通集合  $X$  的“原点”; 或者  $\{(X_i^F, X_j^F) \mid i \in I, j \in J\}$  回到了普通集合  $X$  的“原点”。

**定理 3** 若  $(X^F, X^F)$  是  $X$  生成的  $P$ -集合, 则

$$X^F \subseteq X \subseteq X^F \quad (13)$$

式(13)指出: 内  $P$ -集合  $X^F$  被有限普通集合  $X$  包含, 或者  $X^F$  包在  $X$  内; 有限普通集合  $X$  被  $X^F$  外包含, 或者  $X^F$  包在  $X$  外;  $P$ -集合的名称由此得到。

利用外  $P$ -集合特性式(9), 给出如下结果。

### 3 $F$ -外嵌入与 $F$ -外嵌入依赖

**约定** 本文第 2 节中的  $X, X^F, X^F$  分别记作  $(x), (x)^F, (x)^F$ , 或者  $X = (x), X^F = (x)^F, X^F = (x)^F$ , 不引起误解。

**定义 1** 称  $(x)$  是  $U$  上的一个信息, 而且

$$(x) = \{x_1, x_2, \dots, x_q\} \quad (14)$$

$x_i \in (x), i=1, 2, \dots, q$  称作信息  $(x)$  的一个信息元。如果  $(x)$  具有属性集  $a$ ,

$$a = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \quad (15)$$

式(14)、式(15)中的  $q, k \in N^+, U$  是有限信息论域。

**定义 2** 称  $(x)^F$  是信息  $(x)$  生成的一个  $F$ -外嵌入信息, 简称  $(x)^F$  是一个  $F$ -外嵌入信息, 而且

$$(x)^F = \{x_1, x_2, \dots, x_p\} \quad (16)$$

如果  $(x)^F$  的属性集  $a^F$  满足

$$a^F = a - \{a_i \mid a_i \in a, \bar{f}(a_i) = \beta_i \bar{\in} a, \bar{f} \in \bar{F}\} \quad (17)$$

式(14)、式(16)中的  $p, q$  满足  $q \leq p, p, q \in N^+$ 。

**定义 3** 称信息  $(x)^F$  单依赖于信息  $(x)$ , 记作

$$(x) \Rightarrow (x)^F \quad (18)$$

如果信息  $(x), (x)^F$  的属性集  $a, a^F$  满足  $a^F \Rightarrow a$ 。

**定义 4** 称信息  $(x)^F$  双依赖于信息  $(x)$ , 记作

$$(x) \Leftrightarrow (x)^F \quad (19)$$

如果信息  $(x), (x)^F$  的属性集  $a, a^F$  满足  $a^F \Leftrightarrow a$ 。

其中, “ $\Rightarrow$ ”, “ $\Leftrightarrow$ ”取自逻辑推理, “ $\Rightarrow$ ”与“ $\subseteq$ ”等价, “ $\Leftrightarrow$ ”与

“=”等价。

利用定义1—定义4得到：

**定理4**( $F$ -外嵌入信息存在性定理) 若 $\alpha$ 是信息 $(x)$ 的属性集,则 $\exists \alpha_i \in \alpha, f \in F$ 把 $\alpha_i$ 变成 $\bar{f}(\alpha_i) = \beta_i \in \alpha$ ,具有属性集 $\alpha^F$ 的信息 $(x)^*$ 存在, $(x)^*$ 是 $(x)$ 的一个 $F$ -外嵌入信息,而且

$$(x)^* = (x)^F \quad (20)$$

式中, $\alpha^F = \alpha - \{\alpha_i | f(\alpha_i) = \beta_i\}$ 。

证明:因 $\alpha^F = \alpha - \{\alpha_i | f(\alpha_i) = \beta_i\}$ ,由属性集与信息之间的相互依赖关系<sup>[1-3]</sup>可知:存在信息 $(x)^*$ 具有属性集 $\alpha^F$ ,而且由于 $\alpha^F = \alpha - \{\alpha_i | f(\alpha_i) = \beta_i\} \subseteq \alpha$ ,由文献[1,2]与定义1—定义3得到:分别具有属性集 $\alpha^F, \alpha$ 的信息 $(x)^*, (x)$ ,满足 $(x) \subseteq (x)^*, (x)^*$ 是 $(x)$ 的一个 $F$ -外嵌入信息,则有式(20)。

**定理5**( $F$ -外嵌入信息单依赖定理) 若信息 $(x)^F$ 单依赖于信息 $(x)$ ,而且

$$(x) \Rightarrow (x)^F \quad (21)$$

则 $(x)$ 的属性集 $\alpha$ 与 $(x)^F$ 的属性集 $\alpha^F$ ,满足

$$\alpha - \alpha^F \neq \phi \quad (22)$$

证明:因为 $(x) \Rightarrow (x)^F$ ,或者 $(x) \subseteq (x)^F$ ;由本文第2节中的式(4)一式(6),定义1—定义3得到 $\alpha^F \subseteq \alpha$ ,则存在属性集合 $\alpha' = \{\alpha_i | \alpha_i \in \alpha, \bar{f}(\alpha_i) = \beta_i \in \alpha, \bar{f} \in F\}$ ,使得 $\alpha^F = \alpha - \{\alpha_i | \alpha_i \in \alpha, \bar{f}(\alpha_i) = \beta_i \in \alpha, \bar{f} \in F\}$ 或者 $\alpha - \alpha^F = \{\alpha_i | \alpha_i \in \alpha, \bar{f}(\alpha_i) = \beta_i \in \alpha, \bar{f} \in F\}$ 。显然, $\{\alpha_i | \alpha_i \in \alpha, \bar{f}(\alpha_i) = \beta_i \in \alpha, \bar{f} \in F\} \neq \phi$ ,则有式(22)。

**定理6**( $F$ -外嵌入信息双依赖定理) 信息 $(x)^F$ 与 $(x)$ 满足

$$(x)^F \Leftrightarrow (x) \quad (23)$$

的充分必要条件是

$$(\alpha^F \cup \{\alpha' | \beta \in V, \beta \in \alpha^F, f(\beta) = \alpha' \in \alpha^F, f \in F\}) - \alpha = \phi \quad (24)$$

证明:1°.由式(4)一式(6)得到 $(x)^F, (x)$ 的属性集合 $\alpha^F, \alpha$ 满足 $\alpha^F \subseteq \alpha$ ;或者由定义3得到 $\alpha^F \Rightarrow \alpha$ 。显然, $(x)^F$ 比 $(x)$ 具有较少的属性。若从 $\alpha^F$ 之外补充部分属性,或者 $\alpha^F \cup \{\alpha' | \beta \in V, \beta \in \alpha^F, f(\beta) = \alpha' \in \alpha^F, f \in F\}$ 与 $\alpha$ 满足 $(\alpha^F \cup \{\alpha' | \beta \in V, \beta \in \alpha^F, f(\beta) = \alpha' \in \alpha^F, f \in F\}) - \alpha = \phi$ ,则 $(x)^F$ 与 $(x)$ 具有相同的属性集,或者由定义4 $\alpha^F \Leftrightarrow \alpha$ ,则有式(23)。

2°.若 $(x)^F \Leftrightarrow (x)$ ,则 $(x)^F$ 与 $(x)$ 具有相同的属性集。由式(4)一式(6)知, $\alpha^F \subseteq \alpha$ ,或者 $\alpha^F \Rightarrow \alpha$ ,若 $(\alpha^F \cup \{\alpha' | \beta \in V, \beta \in \alpha^F, f(\beta) = \alpha' \in \alpha^F, f \in F\}) - \alpha = \phi$ ,则有式(24)。

**定理7**( $F$ -外嵌入信息不可辨识定理) 若信息 $(x)^F$ 与 $(x)$ 满足

$$\text{UNI}\{(x)^F, (x)\} \quad (25)$$

则

$$\alpha^F - \alpha = \phi \quad (26)$$

式中,UNI=unidentification, $\alpha^F, \alpha$ 分别是信息 $(x)^F$ 与 $(x)$ 的属性集。

#### 4 $F$ -外嵌入定理与 $F$ -外嵌入信息辨识-发现

**定义5** 称 $\rho^F$ 是信息 $(x)^F$ 关于 $(x)$ 的 $F$ -外嵌入系数,若 $\rho^F = \text{card}((x)^F) / \text{card}((x))$  (27)

式中, $\text{card} = \text{cardinal number}$ 。

**定义6** 称 $(y)$ 是 $(x) = \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ 的信息值,而且

$$(y) = \{y_1, y_2, \dots, y_q\} \quad (28)$$

如果 $y_i \in R^+$ 是 $x_i \in (x)$ 的信息值( $y_i$ 是 $x_i$ 的值), $i=1, 2, \dots, q$ 。其中, $x_i$ 是 $(x)$ 的信息元, $R^+$ 是正实数集。

**定义7** 称 $\eta^F$ 是 $F$ -外嵌入信息 $(x)^F$ 关于 $(x)$ 的 $F$ -外嵌入度,如果

$$\eta^F = ||(y)^F|| / ||(y)|| \quad (29)$$

式中, $(y)^F, (y)$ 分别是 $(x)^F, (x)$ 的信息值; $||(y)^F||, ||(y)||$ 分别是信息值 $(y)^F, (y)$ 构成的向量 $(y)^F = (y_1, y_2, \dots, y_p)^T, (y) = (y_1, y_2, \dots, y_q)^T$ 的2-范数, $||y^F|| = (\sum_{i=1}^p y_i^2)^{1/2}, ||y|| = (\sum_{i=1}^q y_i^2)^{1/2}; (x)^F = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ 。

由本文第2节中的式(4)一式(6)与定义5—定义7得到:

**命题1**  $F$ -外嵌入信息 $(x)^F$ 的 $F$ -外嵌入系数 $\rho^F$ 与信息 $(x)$ 的嵌入系数 $\rho$ 满足

$$\rho^F - \rho > 0 \quad (30)$$

式中, $\rho = \text{card}((x)) / \text{card}((x))$ 是 $(x)$ 的自嵌入系数; $(x) = \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ 。

**命题2**  $F$ -外嵌入信息 $(x)^F$ 的 $F$ -外嵌入度 $\eta^F$ 与 $(x)$ 的嵌入度 $\eta$ 满足

$$\eta - \eta^F < 0 \quad (31)$$

式中, $\eta = ||(y)|| / ||(y)||$ 是 $(x)$ 的自嵌入度, $(y)$ 是 $(x)$ 的信息值; $||(y)||$ 是信息值 $(y)$ 构成的向量 $(y) = (y_1, y_2, \dots, y_q)^T$ 的2-范数, $||y|| = (\sum_{i=1}^q y_i^2)^{1/2}; (x) = \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ 。

利用定义5—定义7,命题1,命题2与本文第2节中的式(4)一式(6)得到:

**定理8**( $F$ -外嵌入第一关系定理) 若 $\rho_i^F, \rho_j^F, \rho_k^F$ 分别是 $F$ -外嵌入信息 $(x)_i^F, (x)_j^F, (x)_k^F$ 的 $F$ -外嵌入系数,而且

$$\rho_i^F \leq \rho_j^F \leq \rho_k^F \quad (32)$$

则 $(x)_i^F, (x)_j^F, (x)_k^F$ 满足

$$(x)_i^F \subseteq (x)_j^F \subseteq (x)_k^F \quad (33)$$

**推论1** 若 $\rho_i^F, \rho_j^F, \rho_k^F$ 分别是 $F$ -外嵌入信息 $(x)_i^F, (x)_j^F, (x)_k^F$ 的 $F$ -外嵌入系数,而且

$$\rho_i^F \leq \rho_j^F \leq \rho_k^F \quad (34)$$

则 $(x)_i^F, (x)_j^F, (x)_k^F$ 的属性集 $\alpha_i^F, \alpha_j^F, \alpha_k^F$ 构成一个有限单依赖链,而且

$$\alpha_k^F \Rightarrow \alpha_j^F \Rightarrow \alpha_i^F \quad (35)$$

**定理9**( $F$ -外嵌入第二关系定理) 若 $\eta_i^F, \eta_j^F, \eta_k^F$ 分别是 $F$ -外嵌入信息 $(x)_i^F, (x)_j^F, (x)_k^F$ 的 $F$ -外嵌入度,而且

$$\eta_i^F \leq \eta_j^F \leq \eta_k^F \quad (36)$$

则 $(x)_i^F, (x)_j^F, (x)_k^F$ 满足

$$(x)_i^F \subseteq (x)_j^F \subseteq (x)_k^F \quad (37)$$

**推论2** 若 $\eta_i^F, \eta_j^F, \eta_k^F$ 分别是 $F$ -外嵌入信息 $(x)_i^F, (x)_j^F, (x)_k^F$ 的 $F$ -外嵌入度,而且

$$\eta_i^F \leq \eta_j^F \leq \eta_k^F \quad (38)$$

则 $\alpha_i^F, \alpha_j^F, \alpha_k^F$ 构成一个有限单依赖链,而且

$$\alpha_k^F \Rightarrow \alpha_j^F \Rightarrow \alpha_i^F \quad (39)$$

式中, $\alpha_i^F, \alpha_j^F, \alpha_k^F$ 分别是 $(x)_i^F, (x)_j^F, (x)_k^F$ 的属性集。

**定理10**( $F$ -外嵌入信息双依赖定理) 若 $\rho_i^F = \rho_j^F = \rho_k^F$ ,则

$$(x)_i^F \Leftrightarrow (x)_j^F \Leftrightarrow (x)_k^F \quad (40)$$

**推论 3** 若  $\eta_i^F = \eta_j^F = \eta_k^F$ , 则

$$(x)_i^F \Leftrightarrow (x)_j^F \Leftrightarrow (x)_k^F \quad (41)$$

**定理 11**(F-外嵌入信息可辨识定理) 若  $\rho_j^F - \rho_k^F \neq 0$ , 则

$$\text{IDE}\{(x)_j^F, (x)_k^F\} \quad (42)$$

式中, IDE=identification.

证明: 若  $\rho_j^F - \rho_k^F \neq 0$ , 即  $\rho_j^F \neq \rho_k^F$ , 由式(27)知  $\rho_j^F = \text{card}((x)_j^F) / \text{card}((x)) \neq \rho_k^F = \text{card}((x)_k^F) / \text{card}((x))$ , 或者  $\text{card}((x)_j^F) \neq \text{card}((x)_k^F)$ , 则有式(42).

利用本文第 3、第 4 节中给出的讨论与结果得到:

F-外嵌入信息生成的属性准则

如果  $(x)$  的属性集  $\alpha$  内被删除部分属性,  $(x)$  生成  $(x)^*$ ,  $(x)^*$  是  $(x)$  的一个 F-外嵌入信息, 且  $(x)^* = (x)^F$ .

F-外嵌入信息发现-辨识的单位离散区间外点准则

设  $(0, 1)$  是由数值 0 与数值  $\rho=1$  构成的单位离散区间, 若存在数  $\rho_i^*$ ,  $\rho_i^*$  是  $(0, 1)$  的一个外点, 或者

$$\rho_i^* \in (0, 1) \quad (43)$$

具有  $\rho_i^*$  的信息  $(x)_i^*$  是信息  $(x)$  的一个 F-外嵌入信息,  $(x)_i^* = (x)_i^F$ ;  $(x)_i^*$  在  $(x)$  外被发现-辨识, 而且

$$\text{IDE}((x)_i^*, (x)) \quad (44)$$

式中,  $\rho = \text{card}((x)) / \text{card}((x)) = 1$  是  $(x)$  的自嵌入系数;  $\rho_i^*$  是  $(x)_i^*$  的 F-外嵌入系数.

## 5 信息 F-外嵌入在信息搜索中的应用

利用 P-集合的外 P-集合、本文第 3、第 4 节给出信息的 F-外嵌入的讨论, 得到了 F-外嵌入的一些基本理论结果, 概括本文第 3、第 4 节给出的讨论, 能够获得简单的认识: 给定信息  $(x) = \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ ,  $x_i \in (x)$  是  $(x)$  的信息元;  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$  是  $(x)$  的属性集, 如果对  $\alpha$  内的属性给予部分删除,  $\alpha$  变成  $\alpha^F = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} - \{\alpha_i \mid \alpha_i \in \alpha, f(\alpha_i) = \beta_i \in \alpha, f \in F\}$ , 则由  $(x)$  得到  $(x)^F \supseteq (x)$ ,  $(x)^F = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ ,  $p \geq q$ ;  $(x)^F$  是  $(x)$  的一个外嵌入信息,  $\alpha^F$  是  $(x)^F$  的属性集. 这个简单的认识告诉我们一个信息搜索方法: 若对  $(x)$  的属性集  $\alpha$  给予属性部分删除, 则从  $(x)$  外搜索到信息  $(x)^F$ , 信息  $(x)^F$  是人们在这之前不曾知道的. 例如  $(x) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  是一个案件部分罪犯构成的信息, 它们的疑似罪证集合  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  (属性集); 根据进一步的排查与对嫌疑犯审问得到的口供, 获知  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  内的疑似罪证  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$  是铁证,  $\alpha_2$  是伪证, 则  $(x) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  之外搜索到罪犯  $x_6, x_7, x_8$ , 得到该案件犯罪团伙的全部成员集合  $(x)^F = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ . 这个例子是一个典型的信息搜索例子; 显然, 在伪证  $\alpha_2$  排除之前, 漏网的犯罪分子  $x_6, x_7, x_8 \in (x)^F$  是不被人们事先知道的. 利用这个简单的认识, 在这一节中给出 F-外嵌入在信息搜索中的应用.

**定义 8** 称  $\gamma$  是信息  $(x)_i^F$  的搜索尺度, 如果

$$\gamma = \max_{i=1}^t (\rho_i^F) \quad (45)$$

式中,  $\rho_i^F$  是  $(x)_i^F$  的 F-外嵌入系数,  $\rho_i^F$  见式(27).

**定义 9** 具有搜索尺度  $\gamma$  的信息  $(x)_\gamma$  称作信息  $(x)$  的目标信息, 而且

$$\text{card}((x)_\gamma) = \max_{i=1}^t (\text{card}((x)_i^F)) \quad (46)$$

式中,  $\alpha_\gamma$  是  $(x)_\gamma$  的属性集,  $\alpha_\gamma \neq \phi$ .

给定信息表 1, 表 1 中  $x_1 - x_6$  构成信息  $(x)$ ,  $\alpha$  是  $(x)$  的属性集.

表 1 信息元  $x_1 - x_6$  构成信息  $(x)$ , 属性  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  构成  $(x)$  的属性集

$(x)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	

表 1 中,  $(x) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ ,  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ .

对表 1 中的属性集  $\alpha$  内的属性进行部分删除, 得到  $\alpha_1^F, \alpha_1^F = \alpha - \{\alpha_1\} = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ , 得到表 2.

表 2 具有属性集  $\alpha_1^F$  的信息  $(x)_1^F$

$(x)_1^F$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7'$	$x_8''$
$\alpha_1^F$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$				

对表 2 中的属性集  $\alpha_1^F$  内的属性进行部分删除, 得到  $\alpha_\gamma^F$ , 具有属性  $\alpha_\gamma^F = \min(\alpha_1^F)$  的信息  $(x)_2^F$  列入表 3.

表 3 具有尺度  $\gamma$  的目标信息  $(x)_\gamma$

$(x)_2^F$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7'$	$x_8''$	$x_9''$	$x_{10}''$
$\alpha_\gamma^F$	$\alpha_2$		$\alpha_5$							

表 3 中,  $(x)_2^F = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7', x_8'', x_9'', x_{10}''\}$ ,  $\alpha_\gamma^F = \{\alpha_2, \alpha_5\}$  是  $(x)_2^F$  的属性集.

利用式(45)、式(46)得到: 信息  $(x)_2^F$  具有搜索尺度  $\gamma = \text{card}((x)_2^F) / \text{card}((x)) \approx 1.67$ ,  $(x)_2^F$  是  $(x)$  的目标信息, 或者  $(x)_2^F = (x)_\gamma$ .

对例子的讨论:

1°.  $(x)_\gamma = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7', x_8'', x_9'', x_{10}''\}$  是对  $(x) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$  的属性集  $\alpha$  内的部分属性进行删除后得到的, 或者目标信息  $(x)_\gamma$  是从  $(x)$  之外搜索得到的.

2°. 本节的例子是把一个实际系统经过抽象、简化得到的.

**结束语** P-集合(packet sets)是把动态特性引入到有限普通集合  $X$  中, 改进  $X$  而得到的一个新的数学模型与数学方法. P-集合具有动态特性. 正因为 P-集合具有动态特性, 把 P-集合引入到动态信息系统, 作为一个新的研究工具应用到动态信息系统研究中, 使得人们对信息系统的特性有了新的认识. 本文利用外 P-集合给出 F-外嵌入信息的特性与应用的讨论, 给出一个简单的应用. 或许读者从本文给出的结果与应用例子中, 得到这样的启迪: P-集合与它生成的 F-外嵌入是信息搜索与应用研究的一个新思路与新方法.

## 参考文献

- [1] Shi Kai-quan. P-sets and its applications[J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2009, 9 (2): 209-219
- [2] 史开泉. P-集合[J]. 山东大学学报: 理学版, 2008, 43(11): 75-84
- [3] 史开泉, 张丽. 外 P-集合与数据外-恢复[J]. 山东大学学报: 理学版, 2009, 44(4): 8-14
- [4] Shi Kai-quan, Li Xiu-hong. Camouflaged information and its on identification and its applications [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10 (2): 208-216

像进行稀疏约束处理,其区域增强模型为<sup>[6]</sup>

$$J(f) = \int_{\Omega} (g - f)^2 d\Omega + \lambda \int_{\Omega} \rho(\nabla f) d\Omega \quad (9)$$

式中,  $g$  为观测图像数据,  $f$  为待估计的增强图像, 分别采用连续函数的表示方式。这里采用的稀疏约束项为

$$\rho(s) = \frac{k^2}{2} \log\left(1 + \frac{s^2}{k^2}\right) \quad (10)$$

由此得到形式为 P-M 扩散的 PDE 增强模型。这种稀疏约束反映了边缘梯度数据柯西分布的稀疏特性。

#### 4 实验与分析

分别利用仿真与实测 SAR 图像验证稀疏约束在特征增强中的应用效果, 见图 4, 其中图像均以功率图像形式显示。利用 GTD 属性散射模型仿真生成了场景(a), 其中设置了两个三面角、一个二面角和一个圆柱体; (b) 为对应的正则化增强结果; (c) 为美国 Sandia 国家实验室的实测 MSTAR 目标图像, 其分辨率约为 0.3m; (d) 为基于 PDE 方法的处理结果。

对于仿真场景, 正则化方法的分辨率增强效果是显著的。其中, 由于旁瓣影响而模糊不清的两个三面角已经完全区分开来, 二面角和圆柱体的模糊边缘也得到增强。

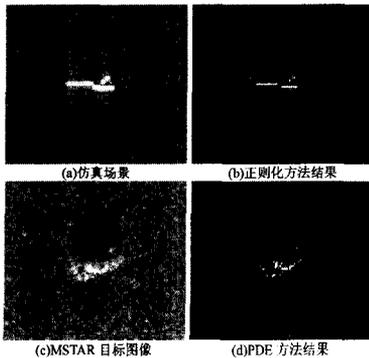


图 4 稀疏约束的分辨率增强效果

MSTAR 实测 SAR 目标图像的处理, 采用了 PDE 方法, 结果表明杂波抑制效果较好, 而且各散射中心区分明显, 旁瓣得到抑制, 分辨率得到增强, 目标和阴影的边缘特征也得到增强。处理效果采用平均 3dB 宽度和目标杂波比 (TCR) 进行评价。平均 3dB 宽度, 是图像有效分辨率的评价指标, 其宽度越小则分辨率越高; TCR 为目标区域与杂波的对比, 数值越大则目标增强与杂波抑制的效果越好。具体数值见表 2。

表 2 MSTAR 图像的增强效果

	3dB 宽度 (m)	TCR (dB)
处理前	0.31	30.23
处理后	0.16	58.65

**结束语** 本文从高频区 SAR 图像目标的后向散射特性出发, 分析了 SAR 图像数据稀疏性的成因。利用基于 GTD 理论的散射中心模型, 仿真分析了强散射中心对一般散射中心的遮蔽作用。总结了 SAR 图像数据统计分布的重尾特性, 并从视觉的稀疏分解与选择性出发, 通过实验分析了 SAR 图像在视觉上不同于一般的光学图像的稀疏性, 即其基元图像族中含有较多的点特征基元。最后, 将稀疏性约束应用于 SAR 图像的特征增强处理, 结果表明了稀疏约束的有效性。由于 SAR 图像的复杂性, 对于 SAR 图像数据稀疏性的分析还需要从其他方面进一步深入研究。

#### 参考文献

- [1] Bronstein M M, Bronstein A M, Zibulevsky M, et al. Blind deconvolution of images using optimal sparse representations[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(6): 726-736
- [2] Cetin M, Karl W C. Feature-enhanced SAR image formation based on nonquadratic regularization[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(4): 623-631
- [3] 周宏潮. 基于稀疏参数模型及参数先验的图像分辨率增强方法研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2005
- [4] 王光新, 王正明, 王卫威. 基于 Cauchy 稀疏分布的 SAR 图像超分辨算法[J]. 宇航学报, 2008, 29(1): 299-303
- [5] 汪雄良, 王正明. 基于  $l_k$  范数正则化的 SAR 图像目标特征增强[J]. 电子与信息学报, 2006, 28(9): 1594-1597
- [6] 谢美华, 王正明. 基于正则化变分模型的 SAR 图像增强方法[J]. 红外与毫米波学报, 2006, 24(6): 467-471
- [7] 杜小勇, 胡卫东, 郁文贤. 基于稀疏成分分析的几何绕射模型参数估计[J]. 电子与信息学报, 2006, 28(2): 362-366
- [8] 黄培康, 殷红成, 许小剑. 雷达目标特性[M]. 北京: 电子工业出版社, 2005
- [9] Gerry M J, Potter L C, Gupta I J, et al. A parametric model for synthetic aperture radar measurements [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1999, 47(7): 1179-1188
- [10] Olshausen B A, Field D J. Emergence of simple-cell receptive field properties by learning a sparse code for natural images [J]. Nature, 1996, 381(13): 607-609
- [11] Zhang Li, Cui Yu-quan. Outer P-sets and data internal-recover [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10(2): 229-236
- [12] Liu Ji-qin. P-probabilities and its application [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10(2): 237-244
- [13] Lin Hong-kang, Li Yu-ying. P-sets and its P-separation theorems [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10(2): 24-5-251
- [14] Hang Shun-liang, Wei Wang, Geng Dian-you. P-Sets and its P-separation theorems[J]. An International Journal Advances in System Science and Application, 2010, 10(2): 245-251
- [15] 于秀清. P-集合的动态特性[J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(18): 45-48

(上接第 253 页)

- [5] 史开泉. P-集合与它的应用特征[J]. 计算机科学, 2010, 37(8): 1-8
- [6] 汤积华, 陈保会, 史开泉. P-集合与  $(F, F)$ -数据生成-辨识[J]. 山东大学学报: 理学版, 2009, 44(11): 19-25
- [7] 于秀清. P-集合的识别与筛选[J]. 山东大学学报: 理学版, 2010, 45(1): 94-98
- [8] 张飞, 陈萍, 张丽. P-集合的 P-分离与应用[J]. 山东大学学报: 理学版, 2010, 45(3): 18-22
- [9] 周玉华, 张冠宇, 张丽. 外-外数据圆与动态数据-恢复[J]. 山东大学学报: 理学版, 2010, 45(8): 27-32
- [10] Zhang Guan-yu, Li En-zhong. Information gene and its information knock-out/knock-in [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10(2): 267-275