集值信息系统中的模糊优势关系粗糙集

杨习贝 张再跃 张 明
(江苏科技大学计算机科学与工程学院 镇江 212003)

摘 要 以集值信息系统为研究对象,考虑对象之间的优势程度,提出了模糊优势关系的概念;将模糊的方法引入优势关系粗糙集理论,给出了基于模糊优势关系的粗糙集模型并讨论了其相关性质,为从集值决策系统中获取决策规则提供了新的理论基础与操作手段。通过实例验证了所提方法的可行性和有效性。

关键词 集值信息系统,模糊优势关系,优势关系粗糙集,决策规则

中图法分类号 TP18 **文献标识码** A

Fuzzy Dominance-based Rough Set in Set-valued Information System

YANG Xi-bei ZHANG Zai-yue ZHANG Ming
(School of Computer Science and Engineering, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212003, China)

Abstract The set-valued information system was analyzed by dominance-based rough set approach. By considering the dominance degree in terms of pair of objects, the concept of fuzzy dominance relation was proposed, the fuzzy technique was then employed in the dominance-based rough set theory. The fuzzy dominance-based rough set model was presented, then corresponding properties were discussed, from which we obtained new theory and practical approach to derive decision rules from the set-valued decision system. Some numerical examples were employed to substantiate the conceptual arguments.

Keywords Set-valued information system, Fuzzy dominance relation, Dominance-based rough set, Decision rule

1 引言

粗糙集理论[1]是由波兰学者 Pawlak 提出的一种数据分析工具,可用于处理含糊和不确定信息。然而值得注意的是,经典粗糙集理论是建立在等价关系的基础上的,并未考虑信息系统中属性值之间的顺序关系。为了解决这个问题,Greco 提出了基于优势关系的粗糙集模型[2,3]。在该模型中,分类是建立在优势关系的基础上的,并且被近似的集合不再是单纯的等价类,而是等价类的上并集和下并集。

近年来,随着研究的不断深入,优势关系粗糙集的应用越来越广泛。例如,文献[4]将优势关系粗糙集引入具有遗漏型未知属性值[5]的不完备系统中;文献[6]则将优势关系粗糙集引入具有缺席型未知属性值[7]的不完备系统中,并提出了4种近似分布约简。值得注意的是,不完备信息系统除了可能出现以上两种未知属性值以外,还有另外一种表现形式,即属性值为集合,本文称这种系统为集值信息系统[8,9]。

文献[10]已将优势关系粗糙集模型引入到集值信息系统中,但给出的优势关系只代表了一种可能优于的概念,并且不能用来衡量对象之间优于的可能性程度。为了解决这个问题,本文在集值信息系统中提出了优于程度的概念,将模糊的方法引入到优势关系粗糙集模型中,给出了基于模糊优势关系的粗糙集模型,并讨论了其相关性质。再者,本文在集值信息系统中给出了"at least"和"at most"决策规则,并讨论了决策规则可信度与模糊优势粗糙隶属度之间的关系。

2 集值信息系统

一个集值信息系统为一个四元组:$\Theta=\langle U,AT,V,F\rangle$。其中,$U$ 是一个被称为论域的非空有限的对象集合;AT 是非空有限的属性集合;V_a 是属性 a 的值域,所有属性值域的集合记为 $V=\bigcup_{a\in AT}V_a$;$F=\{f_a:a\in AT\}$ 为对象属性值映射,也称为信息函数,即有

$$f_a:U\rightarrow P(V_a)$$

式中,$P(V_a)$ 表示 V_a 的非空子集全体。

若 $f_a(x)=V_a$,则表示对象 x 关于属性 a 的取值是缺省或遗漏的,可以用来表示遗漏型未知属性值;若 $f_a(x)=V_a'$ 且 $V_a'\subset V_a$,则表示对象 x 关于属性 a 的取值可能是 V_a' 中的任意一个值。集值信息系统是 Pawlak 所处理的完备信息系统的推广形式,若对于 $\forall x\in U$, $\forall a\in AT$,有 $f_a(x)\in V_a$,此时集值信息系统就退化为完备信息系统的形式。

集值决策系统是用来进行决策分析的一种特殊的集值信息系统 $\Theta=\langle U,AT\cup d,V,F\rangle$,其中 AT 是所有条件属性的集合,d 是决策属性且 $AT\cap d=\emptyset$。为简便起见,本文所讨论的集值决策系统中的决策属性是完备的,即对于 $\forall x\in U$,有 $f_d(x)\in V_d$,因而根据决策属性可以构成论域上的划分。

在集值信息系统中,若 $f_a(x)\subseteq V_a$,则表示对象 x 关于属性 a 的取值可能是 $f_a(x)$ 中的任意一个值,但具体取哪个值

到稿日期:2010-03-23 返修日期:2010-06-02 本文受中科院计算机技术研究所国家重点实验室,国家自然科学基金(60632050)资助。
杨习贝(1980-),男,博士,讲师,主要研究方向为粒计算、智能信息处理,E-mail:yangxibei@163.com;张再跃(1961-),男,博士,教授,主要研究方向为模态逻辑、粒计算;张 明(1978-),男,博士生,讲师,主要研究方向为粗糙集理论。

并不确定。根据这样的语义解释,文献[10]定义了如下的优势关系。

定义1 令 Θ 为一集值信息系统,$A\subseteq AT$,则由 A 决定的优势关系记为 $DOM(A)$,且

$$DOM(A)=\{(x,y)\in U^2:\forall a\in A,\exists v_x\in f_a(x)\wedge v_y\in f_a(y),\text{such that } v_x\geqslant v_y\} \tag{1}$$

为简便起见,优势关系 $DOM(A)$ 实际上也可以写成如下的形式:

$$DOM(A)=\{(x,y)\in U^2:\forall a\in A,\max(f_a(x))\geqslant\min(f_a(y))\} \tag{2}$$

式中,$\max(f_a(x))$ 表示 $f_a(x)$ 中的最大值,$\min(f_a(y))$ 表示 $f_a(y)$ 中的最小值。

根据定义1所示的优势关系,对于 $(x,y)\in DOM(A)$,对象 x 应当被认为在条件属性集合 A 上是优于对象 y 的。然而,由于集值信息系统中属性值的语义解释,对象 x 关于属性 a 的取值并不确定,这就会带来一个问题,使得某些 $(x,y)\in DOM(A)$,对象 x 在属性集合上仅仅是可能而并非一定优于 y 的。

例如,若设 $f_a(x)=\{1,4\}$,$f_a(y)=\{4,5\}$,$f_a(z)=\{2,4\}$,根据定义1,有 $(x,z)\in DOM(a)$,$(y,z)\in DOM(a)$。然而很明显,这里出现的优势关系是可能而非确定的。若 x 在 a 上实际取值为1,而 z 在 a 上实际取值为2,此时 x 就不优于 y 了。再者,无论 y 在属性 a 上的实际取值是多少,y 必定是优于 z 的,这主要是因为 $\min(f_a(y))\geqslant\max(f_a(z))$。根据上述的讨论,可以得出的结论是:$y$ 优于 z 的程度要高于 x 优于 z 的程度。如何反映这种不同强弱的优势关系呢?这就是本文将要讨论的内容。

3 集值信息系统中的模糊优势关系粗糙集

3.1 模糊优势关系

为了衡量集值信息系统中对象之间的优势强弱关系,需要定义新的二元关系。在本文中,笔者采用的是模糊的方法。由于在集值信息系统中,没有集合属性值的分布信息,因而对于 $\forall v_x\in f_a(x)$,可以假设 x 在属性 a 上取值为 v_x 的可能性为 $1/|f_a(x)|$,记为 $p(v_x)$,此处 $|f_a(x)|$ 表示集合 $f_a(x)$ 的基数。因而,集合 $f_a(x)$ 可以表示成如下的模糊集:

$$f_a(x)=\{(v_1,p(v_1)),(v_2,p(v_2)),\cdots,(v_m,p(v_m))\}$$

式中,$v_1,v_2,\cdots,v_m\in f_a(x)$,$p(v_1)=p(v_2)=\cdots=p(v_m)=1/|f_a(x)|$。据此,可定义如下的模糊优势关系。

定义2 令 Θ 为一集值信息系统,对于 $\forall a\in AT$,$\forall x,y\in U$,x 在属性 a 上优于 y 的程度记为 $F_a(x,y)$,且

$$F_a(x,y)=\begin{cases}1:x=y\\ \sum\limits_{v_x\in f_a(x),v_y\in f_a(y),v_x\geqslant v_y}p(v_x)\cdot p(v_y):x\neq y\end{cases}$$

对于 $\forall A\subseteq AT$,x 在属性集合 A 上优于 y 的程度记为 $F_A(x,y)$,且

$$F_A(x,y)=\min_{a\in A}F_a(x,y) \tag{3}$$

根据定义2,可以得到如下的二元模糊关系:

$$F_A=\{((x,y),F_A(x,y)):x,y\in U\} \tag{4}$$

命题1 令 Θ 为一集值信息系统,对于 $\forall a\in AT$,$x,y\in U$,有

1) $0\leqslant F_a(x,y)\leqslant 1$;

2) 若 $x\neq y$,则 $\max(f_a(x))<\min(f_a(y))\Leftrightarrow F_a(x,y)=0$;

3) 若 $x\neq y$,则 $\min(f_a(x))\geqslant\max(f_a(y))\Leftrightarrow F_a(x,y)=1$。

证明:1)根据定义2,式(1)显然成立。

2)由于 $x\neq y$,根据定义2则有

$$\max(f_a(x))<\min(f_a(y))\Leftrightarrow v_x<v_y\ (v_x\in f_a(x),v_y\in f_a(y))\Leftrightarrow F_a(x,y)=0$$

3)由于 $x\neq y$,根据定义2则有

$$\min(f_a(x))\geqslant\max(f_a(y))\Leftrightarrow v_x\geqslant v_y\cdot(v_x\in f_a(x),v_y\in f_a(y))\Leftrightarrow F_a(x,y)=\sum_{v_x\in f_a(x),v_y\in f_a(y)}p(v_x)\cdot p(v_y)\Leftrightarrow F_a(x,y)=1$$

例1 在表1所列的集值决策系统中,$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_{10}\}$ 为论域,$AT=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 为条件属性集合,d 为决策属性。

表1 一个集值决策系统

U	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	d
x_1	{1}	{0,1}	{0}	{1,2}	{2}	1
x_2	{0,1}	{2}	{1,2}	{0}	{0}	2
x_3	{0}	{1,2}	{1}	{0,1}	{0}	1
x_4	{0}	{1}	{1}	{1}	{0,2}	1
x_5	{2}	{1}	{0,1}	{0}	{1}	1
x_6	{0,2}	{1}	{0,1}	{0}	{1}	2
x_7	{1}	{0,2}	{0,1}	{1}	{2}	2
x_8	{0}	{2}	{1}	{0}	{0,1}	1
x_9	{1}	{0,1}	{0,2}	{1}	{2}	2
x_{10}	{1}	{1}	{2}	{0,1}	{2}	2

根据定义2,可以得到表1中的模糊优势关系,如表2所列。

表2 表1中的模糊优势关系

x\y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.50	0.50	0.00	0.50	0.00
x_2	0.00	1.00	0.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.50	0.00	0.00
x_3	0.00	0.50	1.00	0.50	0.00	0.00	0.00	0.50	0.00	0.00
x_4	0.00	0.00	0.50	1.00	0.00	0.50	0.00	0.00	0.00	0.00
x_5	0.00	0.00	0.50	0.00	1.00	0.75	0.00	0.00	0.00	0.00
x_6	0.00	0.00	0.50	0.00	0.50	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
x_7	0.50	0.25	0.50	0.50	0.00	0.50	1.00	0.50	0.50	0.00
x_8	0.00	0.50	0.50	0.00	0.00	0.50	0.00	1.00	0.00	0.00
x_9	0.50	0.00	0.25	0.50	0.00	0.50	0.50	0.00	1.00	0.50
x_{10}	0.25	0.00	0.50	0.55	0.00	0.50	0.50	0.00	0.50	1.00

3.2 模糊优势关系粗糙集

在集值决策系统中,由于所有对象的目标属性值都是单值的,因而目标属性集合 d 构成了论域上的划分 $CL=\{CL_t:t\in T\}$,其中 $T=1,2,\cdots,n$。本文依然沿袭 Greco 提出的优势关系粗糙集模型,被近似的集合不再是单纯的决策类,而是决策类的并。对于 $\forall r,s\in T$,若 $r>s$,则认为 CL_r 中的对象要优于 CL_s 中的对象。令 $CL_t^{\geqslant}=\bigcup_{s\geqslant t}CL_s$,$CL_t^{\leqslant}=\bigcup_{s\leqslant t}CL_s$,$t=1,\cdots,n$,$x\in CL_t^{\geqslant}$ 表示 x 至少属于决策类 CL_t,$x\in CL_t^{\leqslant}$ 表示 x 至多属于决策类 CL_t。

定义3 令 Θ 为一集值信息系统,对于 $\forall t\in T$,$CL_t^{\geqslant}$ 的下、上近似集分别记为 $\underline{AT}(CL_t^{\geqslant})$ 和 $\overline{AT}(CL_t^{\geqslant})$,对于 $\forall x\in U$,x 属于 $\underline{AT}(CL_t^{\geqslant})$ 和 $\overline{AT}(CL_t^{\geqslant})$ 的隶属度定义如下:

$$\mu_{\underline{AT}(CL_t^{\geqslant})}(x)=\bigwedge_{y\in U}\{\mu_{CL_t^{\geqslant}}(y)\vee(1-F_{AT}(y,x))\}=\bigwedge\{1-F_{AT}(y,x),y\notin CL_t^{\geqslant}\}$$

$$\mu_{\overline{AT}(CL_t^{\geqslant})}(x)=\bigvee_{y\in U}\{\mu_{CL_t^{\geqslant}}(y\wedge((1-F_{AT}(x,y))\}$$
$$=\vee\ \{F_{AT}(x,y),y\in CL_t^{\geqslant}\}$$

对于$\forall t\in T$,$CL_t^{\leqslant}$的下、上近似集分别记为$\underline{AT}(CL_t^{\leqslant})$和$\overline{AT}(CL_t^{\leqslant})$,对于$\forall x\in U$,$x$属于$\underline{AT}(CL_t^{\leqslant})$和$\overline{AT}(CL_t^{\leqslant})$的隶属度定义如下:

$$\mu_{\underline{AT}(CL_t^{\leqslant})}(x)=\bigwedge_{y\in U}\{\mu_{CL_t^{\leqslant}}(y)\vee(1-F_{AT}(x,y))\}$$
$$=\wedge\{1-F_{AT}(x,y),y\notin CL_t^{\leqslant}\}$$
$$\mu_{\overline{AT}(CL_t^{\leqslant})}(x)=\bigvee_{y\in U}\{\mu_{CL_t^{\leqslant}}(y)\wedge(1-F_{AT}(y,x))\}$$
$$=\vee\{F_{AT}(y,x),y\in CL_t^{\leqslant}\}$$

命题 2 令Θ为一集值决策系统,对于$\forall A\in AT$,有

1) $\underline{AT}(CL_t^{\geqslant})\subseteq CL_t^{\geqslant}\subseteq\overline{AT}(CL_t^{\geqslant})$,
$\underline{AT}(CL_t^{\leqslant})\subseteq CL_t^{\leqslant}\subseteq\overline{AT}(CL_t^{\leqslant})$;

2) $\underline{AT}(CL_t^{\geqslant})=U-\overline{AT}(CL_{t-1}^{\leqslant}),t=2,\cdots,n$;
$\underline{AT}(CL_t^{\leqslant})=U-\overline{AT}(CL_{t+1}^{\geqslant}),t=1,\cdots,n-1$;
$\overline{AT}(CL_t^{\geqslant})=U-\underline{AT}(CL_{t-1}^{\leqslant}),t=2,\cdots,n$;
$\overline{AT}(CL_t^{\leqslant})=U-\underline{AT}(CL_{t+1}^{\geqslant}),t=1,\cdots,n-1$;

3) $\underline{A}(CL_t^{\geqslant})\subseteq\underline{AT}(CL_t^{\geqslant}),\overline{A}(CL_t^{\geqslant})\supseteq\overline{AT}(CL_t^{\geqslant})$,
$\underline{A}(CL_t^{\leqslant})\subseteq\underline{AT}(CL_t^{\leqslant}),\overline{A}(CL_t^{\leqslant})\supseteq\overline{AT}(CL_t^{\leqslant})$。

证明:1)对于$\forall x\in U$,若$x\in CL_t^{\geqslant}$,即$\mu_{CL_t^{\geqslant}}(x)=1$,则有

$$\mu_{\underline{AT}(CL_t^{\geqslant})}(x)=\bigwedge_{y\in U}\{\mu_{CL_t^{\geqslant}}(y)\vee(1-F_{AT}(y,x))\}$$
$$\leqslant\mu_{CL_t^{\geqslant}}(x)\vee(1-F_{AT}(x,x))$$
$$=1=\mu_{CL_t^{\geqslant}}(x)$$

否则,即$\mu_{CL_t^{\geqslant}}(x)=0$,此时有

$$\mu_{\overline{AT}(CL_t^{\geqslant})}(x)=\bigwedge_{y\in U}\{\mu_{CL_t^{\geqslant}}(y)\vee(1-F_{AT}(y,x))\}$$
$$\leqslant\mu_{CL_t^{\geqslant}}(x)\vee(1-F_{AT}(x,x))$$
$$=0=\mu_{CL_t^{\geqslant}}(x)$$

综上,$\underline{AT}(CL_t^{\geqslant})\subseteq CL_t^{\geqslant}$,得证。

对于$\forall x\in U$,若$x\in CL_t^{\geqslant}$,即$\mu_{CL_t^{\geqslant}}(x)=1$,则有

$$\mu_{\overline{AT}(CL_t^{\geqslant})}(x)=\bigvee_{y\in U}\{\mu_{CL_t^{\geqslant}}(y)\wedge(1-F_{AT}(x,y))\}$$
$$\geqslant\mu_{CL_t^{\geqslant}}(x)\wedge(1-F_{AT}(x,x))$$
$$=1=\mu_{CL_t^{\geqslant}}(x)$$

否则,即$\mu_{CL_t^{\geqslant}}(x)=0$,此时有

$$\mu_{\overline{AT}(CL_t^{\geqslant})}(x)=\bigvee_{y\in U}\{\mu_{CL_t^{\geqslant}}(y)\wedge(1-F_{AT}(x,y))\}$$
$$\geqslant\mu_{CL_t^{\geqslant}}(x)\wedge(1-F_{AT}(x,x))$$
$$=0=\mu_{CL_t^{\geqslant}}(x)$$

综上,$CL_t^{\geqslant}\subseteq\overline{AT}(CL_t^{\geqslant})$,得证。

类似地,易证$\underline{AT}(CL_t^{\leqslant})\subseteq CL_t^{\leqslant}\subseteq\overline{AT}(CL_t^{\leqslant})$。

2)对于$\forall x\in U$,因为$1-\mu_{CL_t^{\geqslant}}(x)=\mu_{CL_{t-1}^{\leqslant}}(x)$,其中$t=2,\cdots,n$,此时就有

$$\mu_{\underline{AT}(CL_t^{\geqslant})}(x)=\bigwedge_{y\in U}\{\mu_{CL_t^{\geqslant}}(y)\wedge(1-F_{AT}(y,x))\}$$
$$=1-\bigvee_{y\in U}\{(1-\mu_{CL_t^{\geqslant}}(y)\vee(F_{AT}(y,x)\}$$
$$=1-\bigvee_{y\in U}\{\mu_{CL_{t-1}^{\leqslant}}(y)\wedge F_{AT}(y,x)\}$$
$$=1-\mu_{\overline{AT}(CL_{t-1}^{\leqslant})}(x)$$

因而$\underline{AT}(CL_t^{\geqslant})=U-\overline{AT}(CL_{t-1}^{\leqslant})$,得证。其他公式的证明过程类似。

3)对于$\forall x,y\in U$,根据定义 2 可知$F_A(y,x)\geqslant F_{AT}(y,x)$,所以有

$$\mu_{\underline{A}(CL_{m}^{\geqslant})}(x)=\bigwedge_{y\in U}\{\mu_{CL_t^{\geqslant}}(y)\vee(1-F_A(y,x))\}$$
$$\leqslant\bigwedge_{y\in U}\{\mu_{CL_t^{\geqslant}}(y)\vee(1-F_{AT}(y,x))\}$$
$$=\mu_{\underline{AT}(CL_t^{\geqslant})}(x)$$

因而$\underline{A}(CL_t^{\geqslant})\subseteq\underline{AT}(CL_t^{\geqslant})$,得证。其他公式的证明过程类似。

例 2 对于表 1 所列的集值决策系统,根据决策属性d可得到论域上的划分形如

$$CL=\{CL_1,CL_2\}=\{\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_8\},\{x_2,x_6,x_7,x_9,x_{10}\}\}$$

再根据定义 3,可得到上下近似隶属度的结果,如表 3 所列。

表 3 表 1 中的近似集结果

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
$\mu_{\underline{AT}(CL_1^{\geqslant})}(x)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$\mu_{\underline{AT}(CL_2^{\geqslant})}(x)$	0.00	0.50	0.00	0.00	0.00	0.25	0.50	0.00	0.50	1.00
$\mu_{\underline{AT}(CL_1^{\leqslant})}(x)$	0.50	0.00	0.50	0.50	0.25	0.00	0.00	0.50	0.00	0.00
$\mu_{\underline{AT}(CL_2^{\leqslant})}(x)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$\mu_{\overline{AT}(CL_1^{\geqslant})}(x)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$\mu_{\overline{AT}(CL_2^{\geqslant})}(x)$	0.50	1.00	0.50	0.50	0.75	1.00	1.00	0.50	1.00	1.00
$\mu_{\overline{AT}(CL_1^{\leqslant})}(x)$	1.00	0.50	1.00	1.00	1.00	0.75	0.50	1.00	0.50	0.00
$\mu_{\overline{AT}(CL_2^{\leqslant})}(x)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

4 集值信息系统中的决策规则

在 Pawlak 提出的经典粗糙集模型中,从下近似可以生成确定决策规则,从边界域可以生成可能决策规则(可信度大于1)。而根据优势关系粗糙集模型,Greco 给出了“at least”和“at most”决策规则的概念。实际上,“at least”和“at most”决策规则是 Pawlak 决策规则的一种广义化表现形式。因为 Pawlak 的决策规则表示的是等于的关系,而“at least”和“at most”决策规则则表示的是不等于的关系。在文献[2]中,Greco 已成功地从银行数据中挖掘出“at least”和“at most”决策规则,并与 Pawlak 的决策规则做了对比分析。由于在集值决策系统中,本文采用的是优势关系粗糙集方法,因而可以生成如下所示的“at least”和“at most”规则。

“at least”决策规则:

$r^{\geqslant}(x)$:$\min(f_{a_1}(y))\geqslant\max(f_{a_1}(x))\wedge\cdots\wedge\min(f_{a_m}(y))\geqslant\max(f_{a_m}(x))\rightarrow f_d(y)\geqslant f_d(x)$(可信度为$c_{AT}^{\geqslant}(x)$)

“at most”决策规则:

$r^{\leqslant}(x)$:$\max(f_{a_1}(y))\leqslant\min(f_{a_1}(x))\wedge\cdots\wedge\max(f_{a_m}(y))\leqslant\min(f_{a_m}(x))\rightarrow f_d(y)\leqslant f_d(x)$(可信度为$c_{AT}^{\leqslant}(x)$)

其中$\{a_1,\cdots,a_m\}=AT$,$x\in U$,可信度$c_{AT}^{\geqslant}(x)$和$c_{AT}^{\leqslant}(x)$的计算为

$$c_{AT}^{\geqslant}(x)=\frac{\sum_{y\in[x]_d^{\geqslant}}F_{AT}(y,x)}{\sum_{y\in U}F_{AT}(y,x)}$$
$$c_{AT}^{\leqslant}(x)=\frac{\sum_{y\in[x]_d^{\leqslant}}F_{AT}(x,y)}{\sum_{y\in U}F_{AT}(x,y)}$$

此时$[x]_d^{\geqslant}=\{y\in U:f_d(y)\geqslant f_d(x)\}$,$[x]_d^{\leqslant}=\{y\in U:f_d(y)\leqslant f_d(x)\}$。

$c_{AT}^{\geqslant}(x)$($c_{AT}^{\leqslant}(x)$)表示的是在x的上并集(下并集)中,y优于(劣于)x的可能性程度之和与论域中所有y优于(劣于)x的可能性程度之和的比值。对于$\forall x\in U$,若$c_{AT}^{\geqslant}(x)=1$($c_{AT}^{\leqslant}(x)=1$),则称$r^{\geqslant}(x)$($r^{\leqslant}(x)$)为确定决策规则;若$0<c_{AT}^{\geqslant}(x)<1$($0<c_{AT}^{\leqslant}(x)<1$),则称$r^{\geqslant}(x)$($r^{\leqslant}(x)$)为可能决策规则。

命题 3 令Θ为一集值决策系统,对于$\forall x\in U$,有

1) $c_{AT}^{\geqslant}(x)=1\Leftrightarrow\mu_{\underline{AT}([x]_d^{\geqslant})}(x)=1$;

2) $c_{AT}^{\leqslant}(x)=1\Leftrightarrow\mu_{\underline{AT}([x]_d^{\leqslant})}(x)=1$;

3) $0 < c_{AT}^{\geqslant}(x) < 1 \Leftrightarrow \mu_{\overline{AT}([x]_d^{\geqslant})}(x)=1$；

4) $0 < c_{AT}^{\leqslant}(x) < 1 \Leftrightarrow \mu_{\overline{AT}([x]_d^{\leqslant})}(x)=1$。

证明：仅证式 1)，其他的证明类似。

$$c_{AT}^{\geqslant}(x)=1 \Leftrightarrow \sum_{y\in[x]_d^{\geqslant}} F_{AT}(y,x)=\sum_{y\in U} F_{AT}(y,x)$$
$$\Leftrightarrow \text{对于} \forall\, y\notin[x]_d^{\geqslant}, F_{AT}(y,x)=0$$
$$\Leftrightarrow \wedge\ \{1-F_{AT}(y,x), y\notin[x]_d^{\geqslant}\}=1$$
$$\Leftrightarrow \mu_{\underline{AT}([x]_d^{\geqslant})}(x)=1$$

例 3 对于表 1 所列的集值决策系统，可以从中生成如下所示的“at least”和“at most”规则。

“at least”决策规则：

$r^{\geqslant}(x_1)$：$\min(f_{a_1}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_2}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_3}(y)\geqslant 0 \wedge \min(f_{a_4}(y))\geqslant 2 \wedge \min(f_{a_5}(y))\geqslant 2 \rightarrow f_d(y)\geqslant 1$(可信度为 1.00)；

$r^{\geqslant}(x_2)$：$\min(f_{a_1}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_2}(y))\geqslant 2 \wedge \min(f_{a_3}(y))\geqslant 2 \wedge \min(f_{a_4}(y))\geqslant 0 \wedge \min(f_{a_5}(y))\geqslant 0 \rightarrow f_d(y)\geqslant 2$(可信度为 0.56)；

$r^{\geqslant}(x_3)$：$\min(f_{a_1}(y))\geqslant 0 \wedge \min(f_{a_2}(y))\geqslant 2 \wedge \min(f_{a_3}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_4}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_5}(y))\geqslant 0 \rightarrow f_d(y)\geqslant 1$(可信度为 1.00)；

$r^{\geqslant}(x_4)$：$\min(f_{a_1}(y))\geqslant 0 \wedge \min(f_{a_2}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_3}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_4}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_5}(y))\geqslant 2 \rightarrow f_d(y)\geqslant 1$(可信度为 1.00)；

$r^{\geqslant}(x_5)$：$\min(f_{a_1}(y))\geqslant 2 \wedge \min(f_{a_2}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_3}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_4}(y))\geqslant 0 \wedge \min(f_{a_5}(y))\geqslant 1 \rightarrow f_d(y)\geqslant 1$(可信度为 1.00)；

$r^{\geqslant}(x_6)$：$\min(f_{a_1}(y))\geqslant 2 \wedge \min(f_{a_2}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_3}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_4}(y))\geqslant 0 \wedge \min(f_{a_5}(y)) \wedge 1 \rightarrow f_d(y)\geqslant 2$(可信度为 0.53)；

$r^{\geqslant}(x_7)$：$\min(f_{a_1}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_2}(y))\geqslant 2 \wedge \min(f_{a_3}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_4}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_5}(y))\geqslant 2 \rightarrow f_d(y)\geqslant 2$(可信度为 0.80)；

$r^{\geqslant}(x_8)$：$\min(f_{a_1}(y))\geqslant 0 \wedge \min(f_{a_2}(y))\geqslant 2 \wedge \min(f_{a_3}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_4}(y))\geqslant 0 \wedge \min(f_{a_5}(y))\geqslant 1 \rightarrow f_d(y)\geqslant 1$(可信度为 1.00)；

$r^{\geqslant}(x_9)$：$\min(f_{a_1}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_2}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_3}(y))\geqslant 2 \wedge \min(f_{a_4}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_5}(y))\geqslant 2 \rightarrow f_d(y)\geqslant 2$(可信度为 0.80)；

$r^{\geqslant}(x_{10})$：$\min(f_{a_1}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_2}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_3}(y))\geqslant 2 \wedge \min(f_{a_4}(y))\geqslant 1 \wedge \min(f_{a_5}(y))\geqslant 2 \rightarrow f_d(y)\geqslant 2$(可信度为 1.00)。

“at most”决策规则：

$r^{\leqslant}(x_1)$：$\max(f_{a_1}(y))\leqslant 1 \wedge \max(f_{a_2}(y))\leqslant 0 \wedge \max(f_{a_3}(y))\leqslant 0 \wedge \max(f_{a_4}(y))\leqslant 1 \wedge \max(f_{a_5}(y))\leqslant 2 \rightarrow f_d(y)\leqslant 1$(可信度为 0.4)；

$r^{\leqslant}(x_2)$：$\max(f_{a_1}(y))\leqslant 0 \wedge \max(f_{a_2}(y))\leqslant 1 \wedge \max(f_{a_3}(y))\leqslant 1 \wedge \max(f_{a_4}(y))\leqslant 0 \wedge \max(f_{a_5}(y))\leqslant 0 \rightarrow f_d(y)\leqslant 2$(可信度为 1.00)；

$r^{\leqslant}(x_3)$：$\max(f_{a_1}(y))\leqslant 0 \wedge \max(f_{a_2}(y))\leqslant 1 \wedge \max(f_{a_3}(y))\leqslant 1 \wedge \max(f_{a_4}(y))\leqslant 0 \wedge \max(f_{a_5}(y))\leqslant 0 \rightarrow f_d(y)\leqslant 1$(可信度为 0.80)；

$r^{\leqslant}(x_4)$：$\max(f_{a_1}(y))\leqslant 0 \wedge \max(f_{a_2}(y))\leqslant 1 \wedge \max(f_{a_3}(y))\leqslant 1 \wedge \max(f_{a_4}(y))\leqslant 1 \wedge \max(f_{a_5}(y))\leqslant 0 \rightarrow f_d(y)\leqslant 1$(可信度为 0.75)；

$r^{\leqslant}(x_5)$：$\max(f_{a_1}(y))\leqslant 2 \wedge \max(f_{a_2}(y))\leqslant 1 \wedge \max(f_{a_3}(y))\leqslant 0 \wedge \max(f_{a_4}(y))\leqslant 0 \wedge \max(f_{a_5}(y))\leqslant 1 \rightarrow f_d(y)\leqslant 1$(可信度为 0.76)；

$r^{\leqslant}(x_6)$：$\max(f_{a_1}(y))\leqslant 0 \wedge \max(f_{a_2}(y))\leqslant 1 \wedge \max(f_{a_3}(y))\leqslant 0 \wedge \max(f_{a_4}(y))\leqslant 0 \wedge \max(f_{a_5}(y))\leqslant 1 \rightarrow f_d(y)\leqslant 2$(可信度为 1.00)；

$r^{\leqslant}(x_7)$：$\max(f_{a_1}(y))\leqslant 1 \wedge \max(f_{a_2}(y))\leqslant 0 \wedge \max(f_{a_3}(y))\leqslant 0 \wedge \max(f_{a_4}(y))\leqslant 1 \wedge \max(f_{a_5}(y))\leqslant 2 \rightarrow f_d(y)\leqslant 2$(可信度为 1.00)；

$r^{\leqslant}(x_8)$：$\max(f_{a_1}(y))\leqslant 0 \wedge \max(f_{a_2}(y))\leqslant 2 \wedge \max(f_{a_3}(y))\leqslant 1 \wedge \max(f_{a_4}(y))\leqslant 0 \wedge \max(f_{a_5}(y))\leqslant 0 \rightarrow f_d(y)\leqslant 1$(可信度为 0.60)；

$r^{\leqslant}(x_9)$：$\max(f_{a_1}(y))\leqslant 1 \wedge \max(f_{a_2}(y))\leqslant 0 \wedge \max(f_{a_3}(y))\leqslant 0 \wedge \max(f_{a_4}(y))\leqslant 1 \wedge \max(f_{a_5}(y))\leqslant 2 \rightarrow f_d(y)\leqslant 2$(可信度为 1.00)；

$r^{\leqslant}(x_{10})$：$\max(f_{a_1}(y))\leqslant 1 \wedge \max(f_{a_2}(y))\leqslant 1 \wedge \max(f_{a_3}(y))\leqslant 2 \wedge \max(f_{a_4}(y))\leqslant 0 \wedge \max(f_{a_5}(y))\leqslant 2 \rightarrow f_d(y)\leqslant 2$(可信度为 1.00)。

结束语 本文在集值信息系统中，采用模糊的方法构建了基于模糊优势关系的粗糙集模型。文献[10]提出的优势关系只能用来表述对象之间可能具有优于的关系，而笔者提出的模糊优势关系则可以用来表述对象之间的优于程度，因而更符合实际工程应用的需求。

根据模糊优势关系，笔者还讨论了集值决策系统中的两种决策规则，即“at least”和“at most”规则，并且分析了规则可信度与模糊优势粗糙隶属度之间的关系。

在本文工作的基础上，下一步笔者将讨论集值决策系统中的模糊优势关系及基于模糊优势关系粗糙集的约简问题。

参 考 文 献

[1] Pawlak Z. Rough sets—theoretical aspects of reasoning about data[M]. London: Kluwer Academic Publishers, 1991

[2] Greco S, Matarazzo B, Słowiński R. Rough approximation by dominance relations[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2002, 17(2): 153-171

[3] Greco S, Matarazzo B, Słowiński R. Rough sets theory for multicriteria decision analysis[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 129(1): 1-47

[4] Shao Ming-wen, Zhang Wen-xiu. Dominance relation and rules in an incomplete ordered information system[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2005, 20(1): 13-27

[5] Kryszkiewicz M. Rough set approach to incomplete information systems[J]. Information Sciences, 1998, 112(1-4): 39-49

[6] Yang Xi-bei, Yang Jing-yu, Wu Chen, et al. Dominance-based rough set approach and knowledge reductions in incomplete ordered information system[J]. Information Sciences, 2008, 178(4): 1219-1234

[7] Stefanowski J, Tsoukias A. Incomplete information tables and rough classification[J]. Computational Intelligence, 2001, 17(3): 545-566

[8] Guan Yangyong, Wang Hongkai. Set-valued information systems[J]. Information Sciences, 2006, 176(17): 2507-2525

[9] 宋笑雪，李鸿儒，张文修. 集值决策信息系统的知识约简与属性特征[J]. 计算机科学，2006，33(7)：179-181

[10] Qian Yu-hua, Dang Chuang-yin, Liang Ji-ye, et al. Set-valued ordered information systems[J]. Information Sciences, 2009, 179(16): 2809-2832