Rough 集理论中知识与运算的矩阵表示

陈泽华[1,2] 谢 刚[1] 谢 珺[1] 谢克明[1]
(太原理工大学信息工程学院 太原 030024)[1]
(Department of Computer Science, San Jose State University, CA, 95112)[2]

摘 要 同一问题在不同知识表示下算法难度不同。Rough 集理论把知识定义为对对象的分类能力,并提供了一套基于代数系统的知识表达和处理方法。然而在代数表示下,知识的本质以及运算直观性较差,不易于理解。同济大学苗夺谦教授建立了知识与信息之间的关系,在此基础上给出了 Rough 集理论中概念和运算的信息表示,并给出了知识约简在代数和信息两种表示下的等价性证明。现进一步将知识及其运算表示成粒矩阵形式,继而给出了知识约简在代数、信息和粒矩阵3种表示下的等价性证明。

关键词 粒计算,Rough 集理论,粒矩阵,粒关系矩阵

中图法分类号 TP182 **文献标识码** A

GrM-based Representation of the Concepts and Operations in Rough Set Theory

CHEN Ze-hua[1,2] XIE Gang[1] XIE Jun[1] XIE Ke-ming[1]
(College of Information Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)[1]
(Department of Computer Science, San Jose State University, CA 95112, USA)[2]

Abstract Different representation for knowledge brings different difficulties in comprehension and programming. Knowledge is regarded as the classification ability according to available knowledge in Rough Set Theory, based on which, a set of algebraic definition for knowledge representation and operation was systematically proposed. However, it is relative difficult to help understand the essence of knowledge in view of algebraic description. Professor Miao in Tongji University built up relations between knowledge and information, he redefined Rough Set algebraic system by information concepts. Furthermore, he also provided equivalent proof for both definitions. In this paper, knowledge and its operation were expressed in form of granular matrix. The equivalent proofs for all three definitions mentioned above were given in this paper.

Keywords *Granular computing(GrC), Rough set theory(RST), Granular matrix(GrM), Granular relation matrix*

同一问题在不同知识表示下算法难度不同[1]。在经典 Rough 集理论中[2],知识是对对象分类的能力。对象用属性集合表示,分类产生概念,概念构成知识的模块。经典 Rough 集理论的知识发现算法主要依赖于知识的代数表示。同济大学苗夺谦教授建立了知识与信息之间的关系,在此基础上给出了 Rough 集理论中概念和运算的信息表示,并给出了知识约简在代数和信息两种表示下的等价性证明[3]。Lin 教授在 Zadeh 小组做学问时提出了粒计算概念[4]。这种学术思想和数学方法很快引起国内外学者的广泛关注[5]。刘清教授在文献[6,7]中用二进制粒表示 Rough 集概念,获取关联规则。在此基础上,文献[8]建立了基于粒计算的 Rough 集模型,利用粒矩阵重新定义了经典 Rough 集的代数定义系统。文献[9]阐述了基于粒矩阵的知识发现方法,将传统知识发现的属性和属性值约简转化为粒矩阵的数值运算。本文进一步给出知识及其运算的粒矩阵表示,并给出知识约简在代数、信息和粒矩阵3种表示下的等价性证明。

1 Rough 集知识与约简的代数定义

为了便于后面的证明,本节首先给出 Rough 集理论中有关知识的定义[2]。

定义1 设 $K=(U,R)$ 为一个知识库。U 为论域,R 为等价关系族,$P\subseteq R$ 且 $P\neq\Phi$,则 P 中所有等价关系的交集称为 P 上的不可分辨关系,记作 $IND(P)$。$IND(P)$ 也是等价关系。

不可分辨关系是经典 Rough 集理论中最基本、最重要的概念,它深刻揭示出论域知识的粒状结构。

定义2 设 $K=(U,R)$ 为一个知识库。U 为论域,R 为等价关系族,$P\subseteq R$ 且 $P\neq\Phi$,则不可分辨关系 $IND(P)$ 的所有等价类的集合 $U/IND(P)$ 称为 U 的 P 基本知识。特别地,对于等价关系 $Q\subseteq R$,如果 $IND(P)=IND(Q)$,则称知识 P 和

到稿日期:2010-02-03 返修日期:2010-05-02 本文受国家自然科学基金项目(60975032),山西省青年自然科学基金项目(2010021016-1)资助。
陈泽华(1974-),女,博士,副教授,CCF 会员,主要研究方向为智能信息处理,E-mail:chenzehua@tyut.edu.cn;**谢 刚**(1972-),男,博士,教授,CCF 会员,主要研究方向为智能信息处理;**谢 珺**(1978-),女,博士,讲师,CCF 会员,主要研究方向为智能信息处理;**谢克明**(1944-),硕士,教授,CCF 会员,主要研究方向为智能信息处理。

知识 Q 是等价的，具有相同的表达能力。如果 $IND(P) \subseteq IND(Q)$，则称知识 Q 完全依赖于知识 P，记为 $P \Rightarrow Q$。此时，Q 的基本等价类可以表示为 P 的基本等价类的组合。

通常情况下，知识 Q 以程度 $k(0 \leqslant k \leqslant 1)$ 依赖于知识 P。极端地，如果不存在 $P \Rightarrow Q$，且不存在 $Q \Rightarrow P$，知识 P,Q 为独立的。

定义 3 设 $K=(U,R)$ 为一个知识库，$P \subseteq R$ 且 $P \neq \Phi$，对于 $r \in P$，如果有 $IND(P)=IND(P-\{r\})$，则称 r 为 P 中不必要的，否则 r 为 P 中必需的。

定义 4 设 $K=(U,R)$ 为一个知识库，$P \subseteq R$ 且 $P \neq \Phi$，对于 $r \in P$，如果 P 中每个 r 都是必要的，则称 P 是独立的，否则称 P 是依赖的。

定义 5 设 U 为一个论域，P 为定义在 U 上的一个等价关系族，P 中所有不可省略的关系组成的集合称为关系族 P 的核，记作 $CORE(P)$。

定义 6 设 U 为一个论域，P 和 Q 为 U 上的两个等价关系族，且 $Q \subseteq P$，如果 $IND(P)= IND(Q)$ 且 Q 是独立的，则称 Q 是 P 的一个约简。

知识约简的代数定义是 Rough 集理论中重要概念之一。

2 知识与信息熵的关系[3]

设 P,Q 为论域 U 上的两个等价关系（即知识），U 上任一等价关系都可以被看作是定义在 U 的子集组成的 σ-代数上的一个随机变量。其概率分布定义如下。为和本文作者系列文章标识统一，对文献[3]的符号做了部分修改。

假设 P,Q 在论域 U 上导出的分类分别为 Y 和 X：

$$U/IND(P)=\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_i,\cdots,Y_m\},1 \leqslant i \leqslant m \tag{1}$$

$$U/IND(Q)=\{X_1,X_2,\cdots,X_j,\cdots,X_n\},1 \leqslant j \leqslant n \tag{2}$$

则 P,Q 在 U 上的子集组成的代数上的定义的概率分布为：

$$[Y;p]=\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_m \\ p(Y_1) & p(Y_2) & \cdots & p(Y_m) \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$[X;p]=\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \\ p(X_1) & p(X_2) & \cdots & p(X_n) \end{bmatrix} \tag{4}$$

其中，

$$p(Y_i)=|Y_i|/|U| \tag{5}$$

$$p(X_j)=|X_j|/|U| \tag{6}$$

知识 P,Q 的信息熵 $H(P)$，$H(Q)$ 分别定义如下：

$$H(P)=-\sum_{i=1}^{m} p(Y_i)\log p(Y_i) \tag{7}$$

$$H(Q)=-\sum_{j=1}^{n} p(X_j)\log p(X_j) \tag{8}$$

知识 Q 相对于知识 P 的条件信息熵 $H(Q/P)$ 定义为：

$$H(Q/P)=-\sum_{i=1}^{m} p(Y_i)\sum_{j=1}^{n} p(X_j/Y_i)\log p(X_j/Y_i) \tag{9}$$

其中，

$$p(X_j/Y_i)=|Y_i \cap X_j|/|Y_i| \tag{10}$$

Rough 集合的信息定义可重新表示 Rough 集合中的概念与运算，条件信息熵可以描述知识的依赖性。

3 知识与运算的信息表示[3]

定理 1 设 U 是一个论域，P 和 Q 是 U 上的两个等价关系族。若 $IND(P)= IND(Q)$，则 $H(P)=H(Q)$。定理 1 的逆未必成立。

定理 2 设 U 是一个论域，P 和 Q 是 U 上的两个等价关系族，$P \subseteq Q$。若 $H(P)=H(Q)$，则 $IND(P)= IND(Q)$。说明两个知识库存在包含关系时，知识的信息量相等。

定理 3 设 U 是一个论域，P 是 U 上的一个等价关系族。一个关系 $r \in P$ 在 P 中是不必要的（多余的），其充分必要条件为 $H(r/P-\{r\})=0$。

推论 1 $r \in P$ 在 P 中是必要的，其充分必要条件为 $H(r/P-\{r\})>0$。

定理 4 设 U 是一个论域，P 是 U 上的一个等价关系族。P 是独立的充分必要条件为：对任意 $r \in P$，都有 $H(r/P-\{r\})>0$。

定理 5 设 U 是一个论域，P 是 U 上的一个等价关系族。$Q \subseteq P$ 是 P 的一个约简的充分必要条件为下列两个条件成立：

(1) $H(P)=H(Q)$；

(2) 对任意的 $q \in Q$，有 $H(q/Q-\{q\})>0$。

4 知识与粒矩阵的关系

本节给出 Rough 集知识发现的粒矩阵表示及其相关定理和证明。

定义 7 设 $K=(U,R)$ 是一个知识库，其中论域 $U=\{u_1,\cdots u_k,\cdots,u_l\}$ 包含了 l 个个体，R 是等价关系族。任意子集 $P \subseteq R$ 且 $P \neq \Phi$ 均可将 U 划分成互不相交的等价类。$U/IND(P)=\{Y_1,\cdots,Y_i,\cdots,Y_m\}$，$1 \leqslant i \leqslant m$，等价类被定义成粒。$Y_i$ 可用一个长度为 l 的二进制数定义，如果 $u_k \in Y_i$，对应的二进制数的第 i 位为 1，否则为 0，其中 l 为 U 的势。取值为 1 的元素具有不可分辨关系[6,7]。

假设 P,Q 在论域 U 上导出的分类分别为 Y 和 X，如式(1)、式(2)所示：

$$Y=\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_i,\cdots,Y_m\} \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

$$X=\{X_1,X_2,\cdots,X_j,\cdots,X_n\} \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

令：

$$Y_i=\{a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ik},\cdots,a_{il}\} \tag{11}$$

$$X_j=\{b_{j1},b_{j2},\cdots,b_{jk},\cdots,b_{jl}\} \tag{12}$$

其中，

$$a_{ik}=\begin{cases} 1, & \text{if } x_k \in Y_i \\ 0, & \text{if } x_k \notin Y_i \end{cases} \quad 1 \leqslant k \leqslant l \tag{13}$$

$$b_{jk}=\begin{cases} 1, & \text{if } x_k \in X_j \\ 0, & \text{if } x_k \notin X_j \end{cases} \quad 1 \leqslant k \leqslant l \tag{14}$$

将等价类定义为粒，实现了论域子集到长度为 l 的二进制空间的映射 $f:Y_i \to \{0,1\}^l$。每一个等价类对应一个长度为 l 的二进制串，所有的等价类则构成一个矩阵。

定义 8 定义二进制粒矩阵（Bit Granular Matrix，BGrM）为 $\{Y_{m\times l},X_{n\times l},C_{m\times n}\}$，其中[8]，

$$Y_{m\times l} \triangleq Y=\begin{pmatrix} Y_1 \\ \cdots \\ Y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$X_{n\times l} \triangleq X=\begin{pmatrix} X_1 \\ \cdots \\ X_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$C_{m\times n}=C_{YX} \triangleq Y \times X'=[c_{ij}]_{m\times n} \tag{17}$$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{l}(a_{ik}b_{kj})=\text{card}(Y_i \cap X_j)=|Y_i \cap X_j| \tag{18}$$

矩阵Y,X表示了知识P和知识Q导出的等价类,矩阵$C_{m\times n}$反映了所有等价类Y_i与X_j之间的包含关系。定义$C_{m\times n}$为知识P,Q的粒关系矩阵,元素c_{ij}反映了Y_i包含于X_j中元素的个数。$NE(i)$表示每行非零元素的个数,当$NE(i)=1$时,说明Y_i能被正确分类到X_j中。其中card(·),|·|均表示集合的势。令:

$$|Y|=\begin{pmatrix}|Y_1|\\|Y_2|\\\cdots\\|Y_m|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{l}a_{1k}\\\sum_{k=1}^{l}a_{2k}\\\cdots\\\sum_{k=1}^{l}a_{mk}\end{pmatrix} \tag{19}$$

$$|X|=(|X_1|,|X_2|,\cdots|X_n|)=(\sum_{k=1}^{l}b_{1k},\sum_{k=1}^{l}b_{2k},\cdots\sum_{k=1}^{l}b_{nk}) \tag{20}$$

$$|U|=l \tag{21}$$

定义 9(Rough 关系矩阵) 定义:

$$R_{m\times n}=C_{m\times n}/|Y_i|=\begin{pmatrix}r_{11}&\cdots&r_{1j}&\cdots&r_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\r_{i1}&\cdots&r_{ij}&\cdots&r_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\r_{m1}&\cdots&r_{mj}&\cdots&r_{mn}\end{pmatrix} \tag{22}$$

$R_{m\times n}=[r_{ij}]_{m\times n}$,其中,

$$r_{ij}=\mu_{X_j}^{R}(x)=\mu_{X_j}^{R}(Y_i)=\frac{c_{ij}}{|Y_i|}=\frac{|Y_i\cap X_j|}{|Y_i|}\quad 0\leqslant r_{ij}\leqslant 1 \tag{23}$$

$R_{m\times n}$定义为具有知识P和知识Q的粒Y和X的Rough关系矩阵,简写为R。Rough关系矩阵是对粒矩阵信息的凝练,在形式和内容上与Crisp集合和Fuzzy集合的关系矩阵统一起来。另$N(i)=1$表示矩阵每行只有一个非零元素,$r_{N(i)=1}=1$表示R中每行有且只有一个元素为1。

特殊地,通过不可分辨关系定义元素x对任一集合X的Rough函数隶属度为:

$$\mu_X^R(x)=\mu_X^R(Y_i)=\frac{|X\cap Y_i|}{|Y_i|} \tag{24}$$

元素x在知识库中被划分为等价类且$x\in Y_i$,等价类中的元素具有不可分辨关系。对同一个集合$X\subseteq U$而言,如果$x\in Y_i$且$y\in Y_i$,则有$\mu_X^R(x)=\mu_X^R(y)$。因此,任一元素的Rough隶属函数等于包含这一元素在内的等价类的Rough隶属函数。当个体的性质转变为集合的性质时,个体的Rough隶属函数就变成等价类的隶属度函数r_{ij}。所有等价类之间的隶属度都可以通过Rough关系矩阵R表示。

以上定义说明:给定知识库$K=(U,R)$,$|U|=l$。在粒矩阵定义下,知识转变为以二进制粒形式表示的矩阵,一个知识库$K=(U,R)$对应着一族二进制粒矩阵。划分产生不可分辨关系,具有不可分辨关系的元素凝聚成一个知识粒子。粒子长度为l,其中取值为1的元素具有不可分辨关系。

由此,式(5)、式(6)、式(10)可以由粒矩阵表示为:

$$p(Y_i)=|Y_i|/|U|=\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}a_{ik} \tag{25}$$

$$p(X_j)=|X_j|/|U|=\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}b_{jk} \tag{26}$$

$$p(Y_i/X_j)=|Y_i\cap X_j|/|X_j|=r_{ij} \tag{27}$$

这样,基于信息的Rough集知识的基本定义都可以由粒矩阵简单表示。

5 知识与知识运算的粒矩阵表示

定理 6 设U是一个论域,P和Q是U上的两个等价关系族。若$IND(P)=IND(Q)$,则$m=n$,且$Y=X$。

证明:若$IND(P)=IND(Q)$,显然$m=n$,$Y=X$成立。

从粒矩阵角度证明定理1:若$IND(P)=IND(Q)$,则$H(P)=H(Q)$。

由定理,若$IND(P)=IND(Q)$,则$m=n$,且$Y=X$。

当$i=j$时,必有$|Y_i|=|X_j|$成立。因此定有$H(P)=H(Q)$。反之则不然,因为$|Y_i|=|X_j|$并不能保证$Y=X$。

定理 7 设U是一个论域,P和Q是U上的两个等价关系族,且$P\subseteq Q$,则粒关系矩阵C每行只有一个非零元素,即$N(i)=1$。或者,在Rough关系矩阵中,$r_{N(i)=1}=1$。

由本文第4节定义可知,$NE(i)$表示关系矩阵C中第i行非零元素的个数。当$NE(i)=1$时,说明Y_i能被正确分类到X_j中。当$P\subseteq Q$时,P中所有的分类都可以被正确地分到Q的分类中。因此粒关系矩阵C的每一行都只有一个非零元素,转换到Rough关系矩阵中则$r_{N(i)=1}=1$成立。

定理2在描述知识P,Q的依赖关系时,加上了信息量相等的条件,从而得出P,Q在代数表示下等价。如果参照定理2,则可以得到定理8。

定理 8 设U是一个论域,P和Q是U上的两个等价关系族,且$P\subseteq Q$。若$Y=X$,则$IND(P)=IND(Q)$。

证明:显然,若$Y=X$,则一定有$H(P)=H(Q)$,由定理2,可得$IND(P)=IND(Q)$。

定理 9 设U是一个论域,P和Q是U上的两个等价关系族。一个等价关系$r\in P$在P中是不必要的(多余的),其充分必要条件为$m=n$,$Y=A$。其中

$U|IND(P)=Y=\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_i,\cdots,Y_m\}\quad 1\leqslant i\leqslant m$

$U|IND(P-r)=A=\{A_1,A_2,\cdots,A_j,\cdots,A_n\}\quad 1\leqslant j\leqslant n$

证明:由定义3,关系$r\in P$在P中是不必要的,则有$IND(P)=IND(P-r)$,所以有$m=n$,$Y=A$成立。

反之,若$m=n$,$Y=A$,命题显然成立。

另外,从粒矩阵的角度来看定理3,如果$r\in P$在P中是不必要的,有

$$P-\{r\}\subset P\Leftrightarrow IND(P-\{r\})=IND(P)\Leftrightarrow H(r/P-\{r\})=0$$

根据定理8有:如果$r\in P$在P中是不必要的,则

$$IND(P)=IND(P-r)\Leftrightarrow m=n,Y=A\Leftrightarrow H(P)=H(P-r)\Leftrightarrow H(r|P-r)=0$$

定理 10 设U是一个论域,P是U上的一个等价关系族。P是独立的充分必要条件为:对任意$r\in P$都有$IND(P)\neq IND(P-\{r\})$,即$Y\neq Y_{P-r}$。Y是由P导出的二进制粒矩阵,Y_{P-r}是由等价关系族$P-r$导出的二进制粒矩阵。

有兴趣的读者可以自行论证。

定理 11 设U是一个论域,P是U上的一个等价关系族。$Q\subseteq P$是Q的一个约简的充分必要条件为下列两个条件成立:

(1) $m=n$,$Y=X$;

(下转第 228 页)

基于 AP 算法，设定数据集 Kes2 的类数为 2 类，Kes3 的类数为 3 类，数据集 Kes2 和 Kes3 的聚类结果分别如图 3 和图 4 所示。从中可以看出 AP 算法的聚类效果很好，而在提供正确类数的前提下，采用 K-means 算法或 FCM 算法，对这两个数据集仍然无法正确聚类。

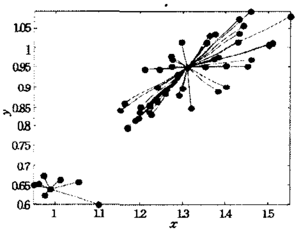

图 3 数据集 Kes2 的聚类结果

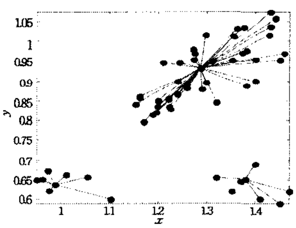

图 4 数据集 Kes3 的聚类结果

结束语 AP 算法能在较短的时间里得到很好的聚类结果，且不需要初始化聚类中心，这使得 AP 算法比较稳定，适合进行聚类分析。本文基于 AP 算法，研究了采用 6 种有效性指标来确定最佳聚类数的方法。通过分析和实验，可以得出这样的结论：与其它有效性指标相比，IGP 指标具有优良的性能，适合对 AP 算法的聚类结果进行评估并可用来确定最佳聚类数。运用聚类有效性指标确定最佳聚类数是一项重要的研究课题，需要我们作深入的研究，对聚类有效性指标的评估机理以及新的具有优良性能的有效性指标的研究，将是我们下一步研究工作的重点。

参 考 文 献

[1] Frey B J, Dueck D. Clustering by Passing Messages Between Data Points[J]. Science, 2007, 315(5814): 972-976

[2] Mézard M. Where Are the Exemplars? [J]. Science, 2007, 315(5814): 949-951

[3] 肖宇，于剑. 基于近邻传播算法的半监督聚类[J]. 软件学报，2008，19(11)：2803-2813

[4] 王开军，李健，张军英，等. 聚类分析中类数估计方法的实验比较[J]. 计算机工程，2008，34(9)：198-202

[5] Kapp A V, Tibshirani R. Are clusters found in one dataset present in another dataset? [J]. Biostatistics, 2007, 8(1): 9-31

[6] Dudoit S, Fridlyand J. A Prediction-based Resampling Method for Estimating the Number of Clusters in a Dataset[J]. Genome Biology, 2002, 3(7): 1-21

[7] Dembélé D, Kastner P. Fuzzy C-means method for clustering microarray data[J]. Bioinformatics, 2003, 19(8): 973-980

[8] Armstrong S A, Staunton J E, Silverman L B, et al. MLL translocations specify a distinct gene expression profile that distinguishes a unique leukemia[J]. Nature Genetics, 2002, 30: 41-47

(上接第 224 页)

(2)对任意的 $q \in Q$，有 $Y \neq Y_{Q-q}$。

证明：假设 X,Y 是由 P,Q 导出的二进制粒矩阵，Y_{Q-q} 是由等价关系族 $Q-q$ 导出的二进制粒矩阵 $Y \neq Y_{Q-q}$，则

(1)$Q \subseteq P$ 是 P 的一个约简 $\Leftrightarrow IND(P)=IND(Q) \Leftrightarrow H(P)=H(Q) \Leftrightarrow m=n, Y=X$；

(2) Q 独立 $\Leftrightarrow Y \neq Y_{Q-q} \Leftrightarrow H(q/Q-\{q\})>0$。

从以上各定理证明过程可看到 Rough 集的代数定义、信息熵定义以及粒矩阵定义基本等价。

结束语 同一问题在不同知识表示下的算法难度不同。文献[10]探讨了粗糙性和信息熵的概念，文献[11]讨论了粗糙集理论代数观点与信息观点，分析了二者在相容信息系统中的等价关系，并发现二者在不相容信息系统中的不等价关系。文献[12]在粗糙集理论中提出了信息量和信息粒度的定义。本文通过定义粒矩阵和粒矩阵的运算来表示 Rough 集理论中的知识和知识运算，并证明了知识及知识运算在代数表示、信息表示和粒矩阵表示下的等价性。进一步，这种证明还可以推广到粗糙集的信息量、信息熵、包含度[13]的表示方法以及粗糙集的各种扩展模型的研究和计算中。相关研究还在继续。

参 考 文 献

[1] 王珏，袁小红，石纯一. 关于知识表示的讨论[J]. 计算机学报，1995，18(3)：212-224

[2] Pawlak Z. Rough sets: theoretical aspects of reasoning about data[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991

[3] 苗夺谦，王珏. 粗糙集理论中概念与运算的信息表示[J]. 软件学报，1999(2)：113-116

[4] Zadeh L A. Some reflections on soft computing, granular computing and their roles in the conception, design and utilization of information/intelligent systems [J]. Soft Computing, 1998, 2: 23-25

[5] Lin T Y. Data Mining and Machine Oriented Modeling: A Granular Computing Approach[J]. Appl. Intell., 2000, 13(2): 113-124

[6] 刘斓，刘清. 基于粒的二进制运算的关联规则提取方法[J]. 南昌大学学报，2003，27(1)：98-101

[7] 刘清. Rough 集及 Rough 推理[M]. 北京：科学出版社，2001

[8] 陈泽华，谢刚，谢珺，等. 基于粒计算的 Rough 集模型[J]. 计算机科学，2009，36(5)：200-203

[9] 陈泽华，谢刚，谢珺，等. 粒矩阵及其在知识约简中的应用[J]. 计算机科学与探索，2010，4(3)：283-288

[10] 苗夺谦，王珏. 粗糙集理论中知识粗糙性与信息熵关系的讨论[J]. 人工智能与模式识别，1998，11(1)：34-40

[11] 王国胤. Rough 集理论代数与信息论观点的关系研究[J]. 世界科技研究与发展，2002，24(5)：20-26

[12] 梁吉业，钱宇华. 粗糙集理论中的不确定性与知识粒度[M]//张文修，姚一豫，梁怡. 粗糙集与概念格. 西安：西安交通大学出版社，2006

[13] 张文修，吴伟志，梁吉业，等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2001