

# 分区加权 Voronoi 图的性质及其面积计算

马立玲<sup>1</sup> 张有会<sup>2</sup>

(中央民族大学预科教育学院 北京 100081)<sup>1</sup> (河北师范大学数学与信息科学学院 石家庄 050016)<sup>2</sup>

**摘要** 分区加权 Voronoi 图是 Voronoi 图和加权 Voronoi 图的推广,可以用来模拟移动通信中基站发射天线分扇区以不同功率向周围发射时所覆盖区域的形状。首先,给出了分区加权 Voronoi 图的性质、定理及相关证明;其次,分析了分区加权 Voronoi 图中的各种区域,并给出了一种计算相应区域面积的算法;最后,利用分区加权 Voronoi 图模拟石家庄市部分城区中的基站建设情况,并对模拟产生的重复覆盖、服务区和盲区面积进行了计算。

**关键词** 移动通信,基站,计算几何,加权 Voronoi 图,分区加权 Voronoi 图,面积

中图分类号 TN92 文献标识码 A

## Property of Divisional Weighted Voronoi Diagram and Area Calculation

MA Li-ling<sup>1</sup> ZHANG You-hui<sup>2</sup>

(The Pre-college, Minzu University of China, Beijing 100081, China)<sup>1</sup>

(Mathematics of Information Science College, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016, China)<sup>2</sup>

**Abstract** Divisional weighted Voronoi diagram is based on Voronoi diagram and weighted Voronoi diagram. It can be applied to simulate base station coverage with different sector transmission power in mobile cellular communication. Firstly, this paper defined divisional weighted Voronoi diagram based on weighted Voronoi diagram. It also analyzed property and theorem of divisional weighted Voronoi diagram. Secondly, it analyzed all kinds of area for divisional weighted Voronoi diagram and provided a discrete algorithm to calculate area. Finally, it gave an example of using divisional weighted Voronoi diagrams to simulate the condition of base stations in part of Shijiazhuang city.

**Keywords** Mobile communication, Base station, Computational geometry, Weighted Voronoi diagram, Divisional weighted Voronoi diagram, Area

## 1 引言

计算几何是随着计算机的发展而发展起来的一门学科,主要研究几何计算中的算法及其效率问题。计算几何在计算机辅助设计、地理信息处理、计算机图形学以及机器人等领域都有着重要的应用。Voronoi 图<sup>[1]</sup>是计算几何的一个重要分支。在计算几何中, Voronoi 图理论成功地解决了寻找最近点、求最大空圆、求  $n$  个点的凸包以及求最小树等问题。另外,其在考古学、生态学、城市规划、移动通信等许多领域都有重要应用。

加权 Voronoi 图是对 Voronoi 图(即以点为生成元的普通 Voronoi 图)的生成元赋以权重值而形成的 Voronoi 图<sup>[2]</sup>,而分区加权 Voronoi 图是对加权 Voronoi 图的扩展。所谓分区加权 Voronoi 图,就是将各生成元周围划分为不同的扇区,并给每个扇区赋以自己的权重值,由此构造出来的一种新的 Voronoi 图,这种 Voronoi 图可用于处理蜂窝制移动通信系统中的基站优化问题。为便于该应用,本文还给出了分区加权 Voronoi 图生成过程中形成的不同类型区域面积的计算方法。

## 2 基本概念及性质

### 2.1 Voronoi 图

Voronoi 图是根据已知点集对平面施行的一种分割。其数学定义<sup>[3]</sup>如下。

**定义 1** 给定平面上  $n$  个点构成的集合  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , 由

$$V(p_i) = \bigcap_{j \neq i} \{p \mid d(p, p_i) < d(p, p_j)\} \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

所给出的对平面的分割,称为以  $p_i (i=1, 2, \dots, n)$  为生成元(或母点)的 Voronoi 图,其中  $d(p, p_i)$  为  $p$  和  $p_i$  间的 Euclid 距离;区域  $V(p_i)$  称为  $p_i$  的 Voronoi 区域,显然,其是由平面上所有到  $p_i$  的距离比到  $S$  中其它点的距离都小的点组成的集合。

图 1 给出了一个 Voronoi 图的实例。图中黑点为生成元,折线为 Voronoi 边。为方便,也有人将“Voronoi 图”简称为  $V$  图,类似地将“Voronoi 边(点,区域)”简称为“ $V$  边(点,区域)”等。

到稿日期:2010-03-03 返修日期:2010-07-03

马立玲(1978—),女,硕士,讲师,主要研究方向为计算几何与优化设计、图像处理、移动通信, E-mail: melinda3721@163.com; 张有会(1955—),男,教授,硕士生导师,主要研究方向为计算几何、计算机图形学、图像处理、分形、数据库原理与应用。

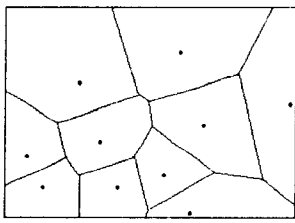


图 1

Voronoi 图的基本性质<sup>[4]</sup>如下。

**性质 1** 生成元  $p_i$  的 Voronoi 区域  $V(p_i)$  无界的充分必要条件是  $p_i \in \text{BCH}(P)$ , 其中  $\text{BCH}(P)$  表示生成元集合  $S$  的凸壳边界。

**性质 2**  $n$  个点的点集  $S$  的 Voronoi 图至多有  $2n-5$  个顶点和  $3n-6$  条边。

**性质 3** 每个 Voronoi 点恰好是 3 条 Voronoi 边的交点。

**性质 4** 点集  $S$  中的点  $p_i$  的每一个最近临近点确定  $V(p_i)$  的一条边。

## 2.2 加权 Voronoi 图

**定义 2** 给定平面上  $n$  个点的集合  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , 对每个生成元  $p_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 赋以非负实数权重  $v_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 称  $D(p, p_i) = d(p - p_i) / v_i$  为  $p$  和  $p_i$  间的加权距离, 称  $V(p_i, v_i) = \bigcap_{j \neq i} \{p \mid D(p, p_i) < D(p, p_j)\}$  为点  $p_i$  的权重为  $v_i$  的 Voronoi 区域。将  $V(p_i, v_i) (i=1, 2, \dots, n)$  及其边界称为以  $p_i (i=1, 2, \dots, n)$  为生成元(或母点)、 $v_i (i=1, 2, \dots, n)$  为权重的点上加权的 V 图, 通常简称为加权 Voronoi 图<sup>[5]</sup>。

图 2 给出了一个加权 Voronoi 图的实例。由定义可见, Voronoi 图是加权 Voronoi 图当所有生成元的权重均相等时的特例。

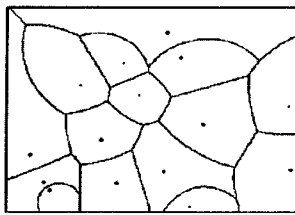


图 2

加权 Voronoi 图的基本性质<sup>[6]</sup>如下。

**性质 5**

$$V_n(P_i, \lambda_i) \cap V_n(P_j, \lambda_j) = \Phi (i \neq j) \quad (1)$$

**性质 6** 设平面上两生成元  $P_i$  和  $P_j$  的权重分别为  $\lambda_i$  和  $\lambda_j$ , 并且  $(\lambda_i \neq \lambda_j)$ , 则  $P_i$  和  $P_j$  间的 Voronoi 边为圆弧, 且当圆心在  $O$  点, 半径为  $R$  时, 有以下关系成立:

$$R = \frac{\lambda_i \lambda_j}{|\lambda_i^2 - \lambda_j^2|} d(P_i, P_j) \quad (2)$$

$$d(O, P_i) = \frac{\lambda_i^2}{|\lambda_i^2 - \lambda_j^2|} d(P_i, P_j) \quad (3)$$

$$d(O, P_j) = \frac{\lambda_j^2}{|\lambda_i^2 - \lambda_j^2|} d(P_i, P_j) \quad (4)$$

## 2.3 分区加权 Voronoi 图

分区加权 Voronoi 图是在加权 Voronoi 图的基础上扩展而成的。加权 Voronoi 图是给每个生成元赋以一个权重值, 而分区加权 Voronoi 图则是把每个生成元的周围分为若干个扇区, 并给每个扇区赋以实数权重值(同一生成元的不同扇区的权重值可以相同, 也可以不同)。该图可用来模拟定向天线

情况下的基站覆盖区域的分割<sup>[7]</sup>。下面给出它的定义。

**定义 3** 给定平面上  $n$  个点的集合  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , 对每个生成元  $p_i$ , 以  $p_i$  为原点、水平向右为坐标轴的正向, 建立极坐标系, 将生成元  $p_i$  周围区域分为  $m_i$  个扇区, 以  $\theta = \alpha_{ij} (j=1, 2, \dots, m_i)$  为扇区分界线, 其中,  $0 < \alpha_{i1} < \alpha_{i2} < \dots < \alpha_{im_i} \leq 2\pi$ , 并给每个扇区赋以权重  $v_{ij} (j=1, 2, \dots, m_i)$  (见图 3)。

$$V(p_i, \alpha_{ij}, v_{ij}) = \bigcap_{j \neq i} \{p \mid D(p, p_i) < D(p, p_j)\},$$

当  $j \neq m_i$  时,  $p$  在射线  $\theta = \alpha_{ij}$  与  $\theta = \alpha_{i(j+1)}$  之间

当  $j = m_i$  时,  $p$  在射线  $\theta = \alpha_{i1}$  与  $\theta = \alpha_{im_i}$  之间

为点  $p_i$  在第  $j$  扇区的权重为  $v_{ij}$  的 Voronoi 区域(或称为  $p_i$  的第  $j$  加权扇区)。将  $V(p_i, \alpha_{ij}, v_{ij}) (j=1, 2, \dots, m_i) (i=1, 2, \dots, n)$  及其边界称为以  $p_i (i=1, 2, \dots, n)$  为生成元(或母点)、以  $(v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{im_i}) (i=1, 2, \dots, n)$  为相关联扇区权重的分扇区加权 Voronoi 图, 简称分区加权 Voronoi 图, 如图 4 所示。

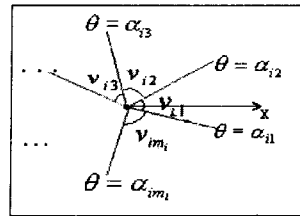


图 3

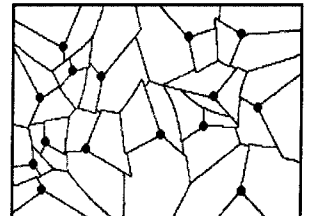


图 4

将生成元周围扇区的范围控制在  $\left[ \frac{2\pi}{3} - 0.5, \frac{2\pi}{3} + 0.5 \right]$  内, 扇区权重控制在  $[0.6, 1.0]$  范围内, 其中生成元个数为 15, 图像大小为  $240 \times 150$  (以像素为单位)。

分区加权 Voronoi 图的基本性质如下。

**性质 7** 加权 Voronoi 图是分区加权 Voronoi 图当各扇区权重都相等时的特例。

**引理 1** (1) 当  $i \neq j$  时, 有

$$V_n(P_i, \alpha_{im}, \lambda_{im}) \cap V_n(P_j, \alpha_{jm}, \lambda_{jm}) = \Phi (i, j, m, n \text{ 为正整数}) \quad (5)$$

成立;

(2) 当  $m \neq n$  时, 有

$$V_n(P_i, \alpha_{im}, \lambda_{im}) \cap V_n(P_j, \alpha_{jn}, \lambda_{jn}) = \Phi (i, j, m, n \text{ 为正整数}) \quad (6)$$

成立。

**证明:** (1) 假设存在点  $P_0 \in V_n(P_i, \alpha_{im}, \lambda_{im}) \cap V_n(P_j, \alpha_{jm}, \lambda_{jm})$ , 由  $P_0 \in V_n(P_i, \alpha_{im}, \lambda_{im})$  和定义 3 知, 对任意的  $k \neq i, 1 \leq k \leq n$ , 有  $D(P_0, P_i) < D(P_0, P_k)$  成立, 所以  $D(P_0, P_i) < D(P_0, P_j)$ ; 同理, 由  $P_0 \in V_n(P_j, \alpha_{jm}, \lambda_{jm})$  可得  $D(P_0, P_j) < D(P_0, P_i)$ 。矛盾, 所以  $V_n(P_i, \alpha_{im}, \lambda_{im}) \cap V_n(P_j, \alpha_{jm}, \lambda_{jm}) = \Phi$ 。

(2) 假设存在一点  $P_0 \in V_n(P_i, \alpha_{im}, \lambda_{im}) \cap V_n(P_j, \alpha_{jn}, \lambda_{jn})$ , 由  $P_0 \in V_n(P_i, \alpha_{im}, \lambda_{im})$  和定义 3 知,  $P_0$  在以  $P_i$  为圆心的射线  $\theta = \alpha_{im}$  与  $\theta = \alpha_{i((m+1) \bmod (m))}$  之间; 同理由  $P_0 \in V_n(P_j, \alpha_{jn}, \lambda_{jn})$  知,  $P_0$  在以  $P_j$  为圆心的射线  $\theta = \alpha_{jn}$  与  $\theta = \alpha_{j((n+1) \bmod (n))}$  之间。又已知  $m \neq n$ , 所以  $V_n(P_i, \alpha_{im}, \lambda_{im}) \cap V_n(P_j, \alpha_{jn}, \lambda_{jn}) = \Phi$ 。

证毕。

**定理 1**  $V_n(P_i, \alpha_{ij}, v_{ij}) (j=1, 2, \dots, m_i) (i=1, 2, \dots, n)$  是平面的一个分割。

**证明:** 设  $P$  为平面上的任意一点, 不失一般性, 假定  $D(P, P_1) \leq D(P, P_2) \leq \dots \leq D(P, P_n)$ , 如果  $D(P, P_1) < D(P, P_2)$ , 由上式  $D(P, P_1) \leq D(P, P_2) \leq \dots \leq D(P, P_n)$  和定义 3 知,  $P \in V_n(P_1, \alpha_{1j}, \lambda_{1j})$ 。如果  $D(P, P_1) = D(P, P_2) < D(P,$

$P_3$ ), 则  $P \in \overline{V}_n(P_1, \alpha_{1j}, \lambda_{1j}) \cap \overline{V}_n(P_2, \alpha_{2j}, \lambda_{2j})$ , 即  $P$  在  $V_n(P_1, \alpha_{1j}, \lambda_{1j})$  和  $V_n(P_2, \alpha_{2j}, \lambda_{2j})$  之间的 Voronoi 边上。

依次类推。如果  $D(P, P_1) = D(P, P_2) = \dots = D(P, P_n)$ , 则  $P$  在任两个 Voronoi 多边形之间的 Voronoi 边上, 即  $P$  在上述 Voronoi 边的交点。

再由引理知, 平面上任一点, 或属于某个 Voronoi 多边形, 或在某 Voronoi 边上, 或为若干  $V_n(P_1, \alpha_{1j}, \lambda_{1j}), V_n(P_2, \alpha_{2j}, \lambda_{2j}), \dots, V_n(P_n, \alpha_{nj}, \lambda_{nj})$  条 Voronoi 边的交点, 即  $\overline{V}_n(P_i, \alpha_{ij}, \lambda_{ij}) (i=1, 2, \dots, n) (j=1, 2, \dots, m_i)$  将平面分成至多仅有公共交点的  $(m_1 + m_2 + \dots + m_n)$  部分。证毕。

### 3 分区加权 Voronoi 图中的面积计算

在移动通信系统中, 基站天线发射的信号, 由于建筑物的遮挡和在传播过程中的衰减等多种因素的影响<sup>[8-10]</sup>, 产生了信号盲区。增加区域内的基站数目无疑可以有效地减少盲区的范围, 但这样会导致大量的重复覆盖, 造成资源浪费。为便于分析, 我们往往需要研究区域内盲区、重复覆盖区和服务区的面积, 这就引出了本文的另一个主要内容: 分区加权 Voronoi 图的面积问题。首先, 我们来看算法的基本思想。

#### 3.1 算法的基本思想

我们给每个生成元都加上限制条件, 使之不能无限地向周围发射信号。给定平面上的  $n$  个生成元, 分别以这  $n$  个生成元为圆心, 在各自的扇区以指定的速率向外逐点扩展画弧。在程序的具体执行过程中, 将每一生成元的  $m_i$  个扇区赋以不同的颜色值  $\{color_{i1}, color_{i2}, \dots, color_{im_i}\} (i=1, 2, \dots, n)$ , 且使不同生成元各个扇区的颜色也互不相同。这样, 以每个生成元  $p_i$  为圆心, 按自己各个扇区不同的权重(即速率)以指定颜色向外扩展逐点画弧。在逐点画弧过程中, 每画一个点前要进行检查。若该点已有颜色(即已被涂过), 则用指定的颜色(重复覆盖区颜色)进行填涂; 否则, 便以指定的颜色画点。当满足给定的限制条件后, 结束填涂。最后横向(或纵向)扫描全屏幕, 将屏幕上重复覆盖区颜色的像素数目记录下来, 作为重复覆盖区面积; 将没有被填涂过的白色像素数目记录下来, 作为盲区面积; 将其他颜色像素数目记录下来, 作为服务区面积。

#### 3.2 算法描述

输入: 生成元(母点)集合  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , 各生成元扇区方向参数的集合  $A = \{(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{im_i})\} (i=1, 2, \dots, n)$ , 生成元各扇区权重的集合  $V = \{(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{im_i})\} (i=1, 2, \dots, n)$ 。其中  $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{im_i})$  用来标记  $p_i$  的  $m_i$  个不同扇区的分界线,  $(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{im_i})$  是  $p_i$  的  $m_i$  个不同扇区的权重。

输出: 以  $S$  为生成元集,  $A$  为扇区分界线参数,  $V$  为权重的分区加权 Voronoi 图。

步骤 1 建立链表  $lian$ , 用来存放生成元  $p_i (i=1, 2, \dots, n)$  的数据, 包括生成元的横坐标、纵坐标、扇区分界线参数  $\alpha_i$  以及生成元的权重值  $(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{im_i})$ 。

步骤 2 将屏幕初始化为白色(背景色)。

步骤 3 对每一生成元  $p_i$  生成各自的加权扇区, 并对生成元的  $m_i$  个扇区赋以不同的颜色值  $(color_{i1}, color_{i2}, \dots, color_{im_i})$ , 使所有生成元的各个扇区颜色互不相同。

步骤 4 当  $r < R$  时, 循环执行下面的操作:

//R 为循环控制条件

{使指针变量  $p$  指向  $lian$  的头结点;

当  $p$  不为空指针时, 执行如下循环:

{ for( $m_0 = 1; m_0 \leq m_i; m_0++$ )

// $m_0$  为整形变量

{在第  $m_0$  个扇区内, 以半径  $r = r \times p - > v_{im_0}$  画弧, 若该点没有颜色, 则以颜色值  $p - > color_{im_0}$  画弧, 若已有颜色, 则用指定的重复覆盖区颜色重新进行填涂;

} 令指针指向下一个结点;

}  $r = r + 1; //r$  为半径

步骤 5 横向(或纵向)扫描全屏幕, 若某一像素为重复覆盖区颜色, 则将其记入重复覆盖区面积; 若为白色, 则将其记入盲区面积, 同时将盲区置为盲区色; 否则将其记入服务区面积, 并将服务区置为服务区色。

在本例中我们将盲区置为黑色, 服务区置为白色, 重复覆盖置为灰色。

结束。

#### 3.3 算法分析

在本算法中是以屏幕上的像素为单位来计算分区加权 Voronoi 图的面积的。在计算过程中可能会由于显示设备的问题而产生不同程度的误差, 但基本上可以反映区域内盲区、重复覆盖以及服务区之间的对比关系。下面给出一些具体的试验结果(在程序中将生成元个数置为 28, 图像大小为  $400 \times 250$ (以像素为单位))。

(1) 当扇区角度和权重变化范围较大时 Voronoi 图中的面积计算(见图 5, 其中扇区角度范围为  $[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$ , 权重范围为  $[0.2, 0.9]$ )。

(2) 当扇区角度和权重变化范围较小时 Voronoi 图中的面积计算(见图 6, 其中扇区角度范围为  $[\frac{2\pi}{3} - 0.5, \frac{2\pi}{3} + 0.5]$ , 权重范围为  $[0.6, 1.0]$ )。

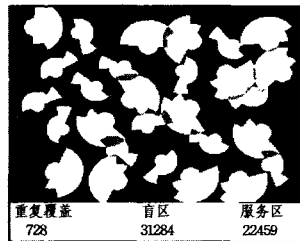


图 5

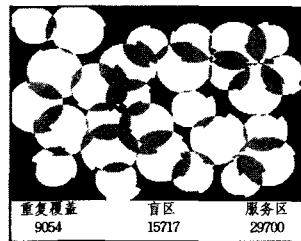


图 6

(3) 等角度扇区划分时 Voronoi 图中的面积计算(见图 7, 在本例中将各个生成元周围平均划分为 3 个扇区, 即每个扇区的圆心角均为  $\frac{2}{3}\pi$ , 扇区权重范围为  $[0.6, 1.0]$ )。

(4) 各个生成元周围的扇区划分方向一致时所产生的 Voronoi 图中的面积计算(见图 8, 扇区的划分和扇区权重的范围与以上(3)同, 但在本例中要求各个生成元周围的 3 个扇区的方向都是一致的)。

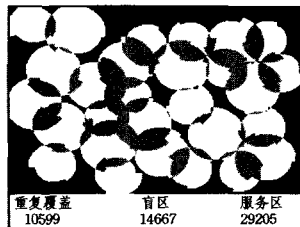


图 7

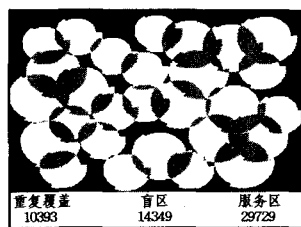


图 8

从以上试验结果可以看出,当生成元周围扇区角度及其权重的变化范围都比较大时,所产生的分区加权 Voronoi 图中的盲区面积比较多;而当扇区角度及其权重都在一个较小的范围内变化或者不变时,所产生的分区加权 Voronoi 图中的盲区面积比较小。还可以看出,生成元的分布也会影响到重复覆盖、服务区和盲区之间面积的比例关系。我们在算法中给出的生成元都是随机产生的,生成元分布比较稀疏的区域中盲区的面积就会大些,而生成元分布比较稠密的区域中重复覆盖的面积就会大些。所以,通过控制生成元生成的条件,使其更加均匀,或者是加大稀疏区域生成元周围各扇区的权重,减少稠密区域生成元周围各扇区的权重,这样产生的 Voronoi 图中重复覆盖和盲区面积就会相对较小。

## 4 实际应用举例

### 4.1 分区加权 Voronoi 图应用举例

我们以石家庄市为例,分析一下基站天线分扇区以不同功率向周围发射信号时(以下均为示意图,不代表基站的实际位置)所产生的区域分割情况(生成元个数为 28,图像大小为  $415 \times 281$ (以像素为单位),比例为 1:600 万)。

图 9 是新石家庄地图局部(2003 年出版),其中黑点为我们假设的基站位置。

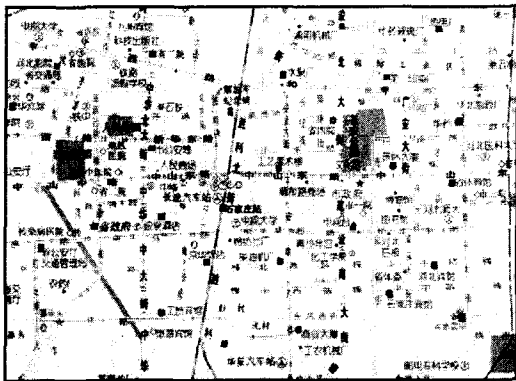


图 9

图 10 是假设基站天线信号可以发射到无穷远的情况下得到的区域分割图,这样得到的区域划分是比较理想的情况。

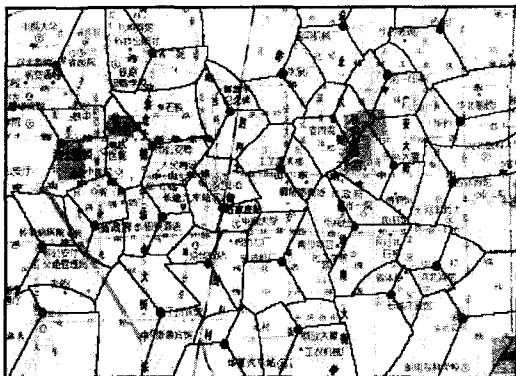


图 10

图 11 给出了模拟实际情况中基站天线分扇区以不同功率向周围发射的情况,考虑了信号在传播过程中的衰减及建筑物的遮挡等各个因素的影响所产生的区域分割中的重复覆盖、服务区和盲区的分布及其面积的大小。其中灰色代表重复覆盖,白色代表服务区,黑色代表盲区。

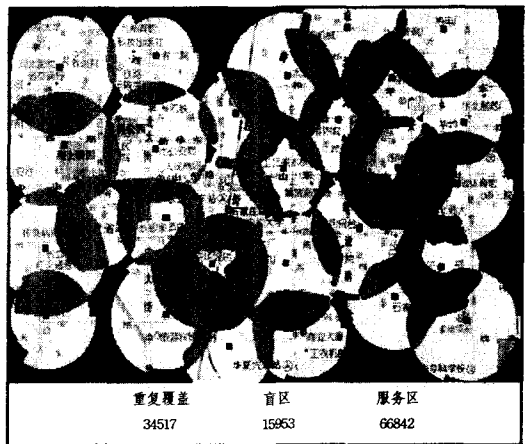


图 11

### 4.2 应用前景展望

在具体应用当中,可以根据实际情况将基站周围合理地划分为若干个扇区,并给每个扇区赋以相应的权重值,用分区加权 Voronoi 图结构来分析基站覆盖区的情况,并根据各个区域的需求变化,进一步调节扇区的角度、方向和权重,使现有资源得到充分利用。

**结束语** 本文在现有的 Voronoi 图理论的基础之上,总结出了分区加权 Voronoi 图的一些性质、定理,并给出了相应的证明。本文还给出了一种计算 Voronoi 区域面积的方法,在模拟基站天线分扇区以不同功率向周围发射信号的同时,得出了重复覆盖、服务区和盲区的面积。由此可见,分区加权 Voronoi 图在基站建设方面有很重要的应用价值。随着科技的高速发展和计算几何应用的不断普及,分区加权 Voronoi 图会逐步走向我们的生活。它作为计算几何的一个重要分支,可研究的问题还有很多。下面给出一些有待于继续研究的问题:

- (1)如何根据实际情况确定基站周围扇区的划分及其权重;
- (2)障碍分区加权 Voronoi 图的研究;
- (3)分区加权 Voronoi 图在其他应用领域的开发研究。

### 参考文献

- [1] Sugihara K. Voronoi Diagrams[M]. Department of Mathematical Engineering and Information Physics University of Tokyo, Hongo, Bunkyo-ku; 113-8656
- [2] Aurenhammer F, Edelsbrunner H. An optimal algorithm for constructing the weighted Voronoi diagram in the plane[J]. Pattern Recognition, 1984, 17: 251-257
- [3] Voronoi G. Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des formes quadratiques; Deuxieme memoire; Recherches sur les paralleloedres primitifs[J]. Math, 1908, 134: 198-287
- [4] Preparata F P, Shamos M I. 计算几何导论[M]. 庄心谷,译. 北京:科学出版社,1990
- [5] 张有会. 线段加权的 Voronoi 图[J]. 计算机学报, 1995(11): 822-829
- [6] 张有会,川口湊. 母点に重みをつけた Voronoi 图[J]. 日本福井大学工学部研究报告, 1991, 39(2): 303-308
- [7] 马立玲. 分区加权 Voronoi 图的生成及其应用[J]. 计算机科学, 2004, 31(B07): 68-72
- [8] Baccelli F, Klein M, Lebourges M, et al. Stochastic geometry and architecture of communication networks[J]. J. Telecommunication Systems, 1997, 7: 209-227
- [9] Baccelli F, Zuyev S. Poisson-Voronoi spanning trees with applications to the optimization of communication networks[J]. Oper. Res, 1999, 47(4)
- [10] Baccelli F, Gloaguen C, Zuyev S. Superposition of planar voronoi tessellations[J]. Comm. Statist. Stoch. Models, 2000, 16(1): 69-98