一种基于线性代数的图像处理算法研究

马 洁
(重庆第二师范学院 重庆 400067)

摘 要 将线性代数中的马尔可夫链蒙特卡洛算法与贝叶斯网络引入图像处理中,提出一种基于线性代数的图像处理算法,并对图像进行处理。仿真结果表明,所提算法只需要Gibbs抽样法10%的迭代次数以及比较简单的跳转核。实验结果表明该方法有较好的效率和较低的实现复杂度。

关键词 贝叶斯,马尔可夫链,蒙特卡洛,图像处理

中图法分类号 TP31 **文献标识码** A

Image Processing Algorithms Based on Linear Algebra

MA Jie
(Chongqing University of Education, Chongqing 400067, China)

Abstract Upon the theory of Bayesian algorithm and image processing technique, this paper put forward Markov Chain Monte Carlo Methods, to process the images. The simulation results show that the Bayesian-Markov Chain Monte Carlo Method fusion algorithm needs only Gibbs sampling 10% iterations and relatively simple jump nuclear. This method has high efficiency and low implementation complexity.

Keywords Bayesian algorithm, Markov chain, Monte carlo methods, Image processing technique

1 数字图像的线性代数处理过程

数字图像处理技术在计算机中的具体过程就是在CPU中生成矩阵并运用各种算法对矩阵进行运算[1]。这个过程可以分为数据遍历、数据采集和数据处理3个步骤。数据遍历是依据事前规定的次序对数字图像进行全方位遍历的过程[2]。它的基本原理包括:行是每次遍历扫描最优先的部分。计算机进行遍历采用的寻址单元是像素。因此上述网格又可以称为矩阵网络扫描。这个过程通常是利用光敏传感器来完成的,它是指在扫描的全过程中存在于单元内像素的灰度值,量化通过A/D转换等元件为工具来转换像素灰度值和便于计算机处理的二进制数。根据上面所提可以看出,依据矩阵网络对一幅图像进行扫描的结果是会产生一个与图像相对应的二维证书矩阵。扫描的顺序决定了矩阵中每一个元素的位置,采样生成所有像素的灰度值,最后一步就是量化以整数的形式来表达所有的像素灰度值[3]。因此对一幅图像数字化所得到的最终结果是一个二维整数矩阵,即数字图像。

将连续的图像函数必须转化为离散的数据集的过程叫做图像采集。图像采集由图像采集系统完成,如图1所示。

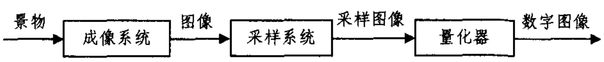


图1 图像采集系统

离散化连续图像,采集样点,并用逼近的方法来近似表示:

$$\begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \cdots & f(0,M-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \cdots & f(1,M-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(N-1,0) & f(N-1,1) & \cdots & f(N-1,M-1) \end{bmatrix}$$

矩阵中每个采样点叫做一个像素,M,N分别表示数字图像在横、纵方向上的像素数。这就是图像处理的基本原理。

2 贝叶斯公式及理论

假定A和B是两个随机变量,A为某一假设,B为某一证据。在考虑B之前,对事件A的概率估计$P(A)$成为先验概率。而在考虑证据之后,对A的概率估计$P(A/B)$成为后验概率。贝叶斯定理描述了先验概率和后验概率之间的关系。

贝叶斯理论最简单的表达式是:

$$P(A/B)=\frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)P(A)+P(B/\overline{A})P(\overline{A})}=\frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$$

式中,$\overline{A}$是A的补。上式又称为贝叶斯规则或贝叶斯公式。图2所示是贝叶斯公式的示意图。

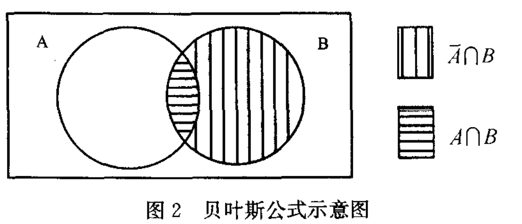


图2 贝叶斯公式示意图

到稿日期:2012-03-01 返修日期:2012-06-11

马 洁(1979—),女,硕士,讲师,主要研究方向为计算机应用技术,E-mail:172787469@qq.com。

有向分隔(directed separate)是在贝叶斯网中判别变量间条件独立关系的图论准则。在贝叶斯网中,两个变量 X 和 Y 如果直接相连,则表示它们之间有直接依赖关系,对 X 的了解会影响关于 Y 的信度,反之亦然。在这种情况下,称信息能够在两个直接相连的节点之间传递。另一方面,如果 X 和 Y 不直接相连,那么信息需要通过其它变量才能在两者之间传递。如果 X 和 Y 之间的所有信息通道都被阻塞,那么信息就无法在它们之间传递。这时,对其中一个变量的了解不会影响对另一个变量的信度,因此 X 和 Y 相互条件独立[4]。

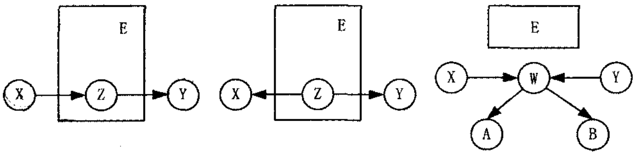
设 Z 为某通路上的一个节点。如果 Z 与它前后两个节点形成一个顺连结构,则称它为一个顺连节点;如果 Z 与它前后两个节点形成一个分连结构,则称它为一个分连节点;如果 Z 与它前后两个节点形成一个汇连结构,则称它为一个汇连节点。设 E 为包含 Z 的一节点集合,X 和 Y 是不在 E 中的两个节点。考虑 X 和 Y 之间的一条通路 α,如果满足下面条件之一,则称 α 被 D 所阻塞:

(1)α 上有一个在 E 中的顺连节点;

(2)α 上有一个在 E 中的分连节点;

(3)α 上有一个汇连节点 W,它和它的后代节点均不在 E 中。

上述 3 种情况如图 3 所示。



(a) 顺连节点Z∈E　(b) 分连节点Z∈E　(c) 汇连节点W及其后代均不在E内

图 3　X 和 Y 之间的通路被 E 堵塞的 3 种情况

如果 X 和 Y 之间的所有通路都被 E 堵塞,那么就说 E 有向分隔 X 和 Y,简称 d-分隔。如果 Ed-分隔 X 和 Y,那么当 E 中的变量全部被观测到时,信息就不能在 X 和 Y 之间传递,故 X 和 Y 相互独立。换句话说,如果 Ed-分隔 X 和 Y,那么 X 和 Y 在给定 D 时条件独立。

3　贝叶斯分类法

(1)贝叶斯分类的判别原理

贝叶斯分类是建立在古典概率中的贝叶斯定理基础上的,由概率论知识可知,贝叶斯公式为:

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)} \tag{1}$$

数字图像能近似为某一符合规律的随机分布,定义每个像素一个随机变量,且这个变量仅属于某一个类别,从 n 个互斥事件类别可以看出,贝叶斯公式可以应用到图像的每个像素的分类中。则将式(1)改为:

$$P(\omega_i|X)=\frac{P(\omega_i)P(X|\omega_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(\omega_j)P(X|\omega_j)} \tag{2}$$

式中,$\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$表示分类目标,即所有类别,X 代表持有分类特征提取后的灰度值(一般的多维图像特征向量的特征值构成一个特征值)。这样,从模式识别的角度来看,式(2)的物理意义就显而易见了,$P(\omega_i)$表示类别 i 在数字图像中表现出的先验概率,推广到普遍的情况,相加全部类别的先验概率后得到 1。$P(X|\omega_i)$表示 X 在类别 i 中表现出的条件概率。若已知先验概率和条件概率,可以计算出像元 X 归属于每一类别的概率 $P(\omega_i|X)$。显然,$P(\omega_i|X)$越大,像元 X 属于类别 ω_i 的概率就越大,因此 $P(\omega_i|X)$也称归属概率。

从上面可以得出图像分类的判别规则,贝叶斯网络可用下式表示,如果

$$P(\omega_i|X)=\max_{1\leqslant j\leqslant n}(P(\omega_j|X))$$

则有 $X\in\omega_i$。上式表明,由式(2)获得像元素 X 属于每个类别 ω_i 的概率归属后,需采用所有权像素 X 类别的最大类别的概率。

4　MCMC 稳态模拟方法

4.1　蒙特卡洛(MC)积分

蒙特卡洛(Monte Carlo,MC)方法也称随机模拟法或统计试验法,首先假设一个较为复杂的函数 $f(x)$的高维数值积分需要得到计算:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

令 $f(x)=h(x)p(x)$,即:将 $f(x)$看作函数 $h(x)$与概率密度函数 $p(x)$的乘积,这个 $p(x)$的定义域为(a,b),则:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b h(x)p(x)\mathrm{d}x=E_{p(x)}[h(x)]$$

也即:转化 $f(x)$的积分成为函数 $h(x)$的数学期望,且取概率密度函数为 $p(x)$。从 $p(x)$中抽取 n 个随机变量,则复杂函数 $f(x)$的 MC 积分为:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=E_{p(x)}[h(x)]\approx\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(x_i)$$

在贝叶斯网络的计算中,MC 积分经常被用来计算常规因素、边际后验密度以及各种功能的时刻,令:

$$I(y)=\int_a^b h(y\mid x)p(x)\mathrm{d}x$$

则:

$$\hat{I}(y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(y|x_i)$$

其中,随机变量 x_i 的概率为随机抽取方式,取其密度函数为 $p(x)$。当 $x_1,\cdots,x_n$ 两两正交时,通过大数定律可知,样本容量 n 越大,计算结果的准确性越高。但是在实际应用中,会遇到较为复杂的数学模型,要想从 $p(x)$中抽取两两正交的样本较为困难,也就是说不能简单地假设 $x_1,\cdots,x_n$ 相互正交,这种情况下就应该采用 MCMC 稳态模拟方法,将样本空间变为稳态分布的 $p(x)$,利用马尔可夫链的计算来抽取样本,则随机变量的概率抽取方式成立[5]。

4.2　马尔可夫链

令 θ_t 表示随机变量 θ 在 t 时刻、状态空间 Θ 上的取值;若 θ 在 Θ 内不同取值之间的转移概率仅仅依赖于 θ 的当前状态,而与 θ 的"过去"取值无关,例如:

$$\Pr(\theta_{t+1}|\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_t)=\Pr(\theta_{t+1}|\theta_t)$$

则称随机序列$\{\theta_t,t\geqslant 0\}$为马尔可夫链;也可以说,在已知 θ_t 时过程所处状态的条件下,时刻 t 以后过程将达到的情况与时刻 t 以前过程所处的状态无关[6]。

设$\{\theta^{(t)}\}_{t\geqslant 0}$为 Θ 上齐次马尔可夫链,即:$p(.,.)$与 t 无关,

其一步转移概率函数为：

$$P(\theta \to \Theta) = \int_{\Theta} p(\theta,\theta^*)\mathrm{d}\theta^*$$

称 $p(\theta,\theta^*)$ 为该马尔可夫链的转移核。对于某个分布 $\pi(\theta)$，若满足：

$$\int p(\theta,\theta^*)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta = \pi(\theta^*)$$

式中，$\forall \theta^* \in \Theta$，则称 $\pi(\theta)$ 为转移核 $p(\theta,\theta^*)$ 的平稳分布。

4.3 贝叶斯-MCMC 融合算法的步骤

贝叶斯-MCMC 融合算法主要分为 3 个步骤：

第 1 步　在 θ 秒上构建适当的马尔可夫链，转移核为 $p(.,.)$，使其对应的平稳分布为 $\pi(\theta)$；

第 2 步　由 θ 中的某一点 $\theta^{(0)}$ 出发，利用第 1 步中的马尔可夫链生成序列 $\theta^{(1)},\cdots,\theta^{(n)}$；

第 3 步　在估计 $E[h(\theta)]$ 时，应将前 m 个预迭代值去掉，即：

$$E[h(\theta)] \approx \frac{1}{n-m}\sum_{t=m+1}^{n} h(\theta^{(t)})$$

综上所述，在贝叶斯分析中 MCMC 的主要任务是设置转移核 $p(.,.)$，从预选分布中抽样；不同的抽样方法体现了不同的 $p(.,.)$。

5 贝叶斯-马尔可夫链蒙特卡洛算法的图像分辨率处理

5.1 贝叶斯图像特征提取

图像特征描绘的对象是区域特色的重要特征，是一个重要的手段，因而形容高层次的视觉特征(如目标对象)，并获取图像语义目标对象就显得极其重要。要将图像低层次的功能和高层次的特点相结合，必须采用高效智能的形状特征提取算法来实现。

形状的表达和描述形状特征提取建立在形状分割的基础上。通过获取边界形状特征参数，来直接获得分割或区域。

形状特征参数是：

1) 面积和周长

面积 S 和周长 L 是图形大小的基本特征的描述。计算图像区域和区域的周长，根据它们的比率，可以分析提取的形状特征所代表的地区。粗略地说，图像的面积 S 是目标图像的像素数。周长 L 代表在该地区相邻的边缘点之间的距离和该地区的周长。

2) 圆形度 R

将待分析图形与圆形的近似程度用圆形度 R 来表示，圆形度 R 的计算公式为：

$$R=\frac{4\pi S}{L^2}$$

式中，S 为区域的面积；L 为周长；R 的取值范围为 $0<C\leqslant 1$，C 越大，则区域越接近圆形。

3)形状因子 F

$$F=L/(2*\sqrt{\pi * S})$$

4)等效面积圆半径 R_e

$$R_e=\sqrt{S/\pi}$$

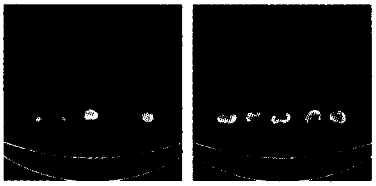
5)内切圆半径 R_i

$$R_i=2*S/L$$

本文提取训练样本图像的面积、周长、圆度、形状因子、离散指数、等效面积圆半径、内切圆半径等 7 个形状特征值进行图像处理仿真。

5.2 仿真结果

采用贝叶斯-马尔可夫链蒙特卡洛算法方法对图像进行处理可以得到图 4 所示的结果。



(a) 原图　　(b) 处理结果

图 4

表 1 是上述实验的一些统计数据(10 次的仿真实验的统计值)，实验结果表明，贝叶斯-MCMC 方法只需要 Gibbs 抽样法 10%的迭代次数以及比较简单的跳转核即可达到同样的效果。

表 1　试验统计数据

统计参数	Gibbs	MCMC
迭代次数	2000000	200000
检测到的目标	283.7(分裂)	290.3(非均匀生灭和随机扩散)
使用的跳转核	6	2

结束语　本文探讨了贝叶斯-MCMC 融合算法的图像处理：首先改进了传统的贝叶斯数据模型，将马尔可夫链蒙特卡洛理论引入贝叶斯算法当中；然后详细探讨了其图像处理的原理和步骤；最后利用贝叶斯 MCMC 法对行图像进行处理。实验结果证明，贝叶斯-MCMC 方法只需要 Gibbs 抽样法 10%的迭代次数以及比较简单的跳转核。该方法有较好的效率和较低的实现复杂度。

参考文献

[1] 关普华. 基于依赖分析的贝叶斯网络结构学习[D]. 吉林：吉林大学，2005

[2] Heckennan D. A Bayesian approach for learning causal networks [C]// Proceedings of Eleventh Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. Montreal, QU: Morgan Kaufinann, 2008: 285-295

[3] Chickering D, Geiger D, Heckerman D. Learning Bayesian networks: Search methods and experimental results[C]// Fifth International Workshop on Artificial Intelligence and Statistics. 2009: 112-128

[4] 徐建平，等. 基于贝叶斯压缩感知的合成孔径雷达高分辨成像[J]. 电子与信息学报，2011，33(12)：2864-2868

[5] 刘天亮，等. 基于韦伯感知和导引滤波分层聚合快速立体图像匹配[J]. 电子与信息学报，2012，34(4)：992-996

[6] 李昕，高东林. 数字图像处理技术在膜图像处理中的应用[J]. 北京理工大学学报，2011，31(12)：1465-1468

[7] 王宁，李炜，沈奇威. 基于贝叶斯理论的工作流任务分配模型的设计[J]. 重庆邮电大学学报：自然科学版，2011，23(14)：483-486