

拟陷阱同步自动机的最短同步字的长度

肖芬芳¹ 何 勇¹ 胡斌梁² 王志喜¹

(湖南科技大学计算机科学与工程学院 湘潭 411201)¹ (湖南科技大学机电工程学院 湘潭 411201)²

摘 要 既非陷阱也非强连通的同步自动机称为拟陷阱同步自动机。对于任意的拟陷阱同步自动机 A , 利用其强连通子自动机的状态数给出了 A 的最短同步字的长度的一个上界, 进而获得了 A 满足Černý猜想的一个充分条件。

关键词 拟陷阱同步自动机, 陷阱同步自动机, 最短同步字, 强连通子自动机, Černý猜想

中图法分类号 TP301.1 文献标识码 A

Length of the Shortest Synchronizing Words for Quasi-trapped Synchronizing Automata

XIAO Fen-fang¹ HE Yong¹ HU Bin-liang² WANG Zhi-xi¹

(School of Computer Science and Engineering, Hunan University of Science & Technology, Xiangtan 411201, China)¹

(College of Electromechanical Engineering, Hunan University of Science & Technology, Xiangtan 411201, China)²

Abstract A synchronizing automaton is said to be quasi-trapped if it is neither trapped nor strongly connected. Let A be a quasi-trapped synchronizing automaton. By using the number of the states of the strongly connected sub-automaton of A , a upper bound of the length of the shortest synchronizing word of A was given, and then a sufficient condition for A to satisfy the Černý Conjecture was obtained.

Keywords Quasi-trapped synchronizing automaton, Trapped synchronizing automaton, Shortest synchronizing word, Strongly connected sub-automaton, Černý conjecture

1 引言

有限状态自动机是最简单、最基本的计算模型, 可分为确定型和非确定型两种类型, 也可分为完全的和不完全的两种类型^[1]。同步自动机是一类具有如下特性的有限状态自动机: 当检测到某个输入失误后, 不管它当时处于哪个状态, 都可以通过输入某个特殊指令(即同步字)使其重回初始状态。同步自动机的研究可追溯到1956年^[2], 研究成果已广泛应用于重启装置的设计、系统测试、机器人学和工业自动化等^[3], 且有可能应用于生物计算^[4]。

同步自动机研究的核心问题是确定完全确定型同步自动机的最短同步字。对于任意正整数 n , J. Černý 于1964年构造了一个最短同步字长度为 $(n-1)^2$ 的 n 状态完全确定型同步自动机^[5], 并提出了著名的“Černý猜想”: 所有 n 状态完全 Q 确定型同步自动机的最短同步字的长度的上确界为 $(n-1)^2$ 。Černý猜想是自动机理论领域存留时间最长的公开问题, 至今没有解决。许多研究人员对Černý猜想进行了深入研究, 所用方法涵盖代数理论、图论、多值逻辑和符号动力系统^[5-15]。1971年, J. Černý 等给出了强连通的完全确定型 n 状态同步自动机($n > 2$)的最短同步字的长度的一个上界^[6]:

$$n^3/3 - 3n^2/2 + 25n^2/6 - 4$$

1983年, J. E. Pin 将该上界改进为^[7]:

$$(n^3 - n)/6$$

直到2011年, 这个上界才被 A. N. Thraman 改进为^[8]:

$$n(7n^2 + 6n - 16)/48$$

本文将讨论一类完全确定型同步自动机的最短同步字的上界。文中未说明的术语和记号可参见文献^[1]。

2 预备知识

一个完全确定型有限状态自动机(下文简称为自动机)是一个三元组 $A = (Q, \Sigma, \delta)$, 其中:

Q 是一个有限集, 称为状态集;

Σ 是一个非空有限集, 称为输入字母表;

δ 是从 $Q \times \Sigma^*$ 到 Q 的一个映射, 称为状态转移函数。

如果 Q 是一个 n -元集, 就称 A 为一个 n -状态自动机。对任意的 $q \in Q$ 和 $\omega \in \Sigma^*$, 通常记 $\delta(p, \omega)$ 为 $p\omega$ 。对任意的 $P \subseteq Q$ 和 $L \subseteq \Sigma^*$, 令

$$PL = \{p\omega \mid p \in P, \omega \in L\}$$

当 $P = \{p\}$ 为一个单元集时, 也记 PL 为 pL 。当 $L = \{\omega\}$ 为一个单元集时, 也记 PL 为 $P\omega$ 。

设 $A = (Q, \Sigma, \delta)$ 是一个 n -状态自动机。如果对任意的 $q \in Q$ 都有 $q\Sigma^* = Q$, 就称 A 是强连通的。如果 Q' 是 Q 的一个

到稿日期: 2012-01-05 返修日期: 2012-06-05 本文受国家自然科学基金(61272196), 湖南省自然科学基金(06A2025), 湖南省普通高校创新平台开放基金(09K084)和湖南省教育厅科学基金(10C0692)资助。

肖芬芳(1986—), 女, 硕士生, 主要研究方向为自动机理论, E-mail: 492708778@qq.com; 何 勇(1970—), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为代数学及其在计算机科学中的应用; 胡斌梁(1965—), 男, 硕士, 教授, 主要研究方向为图像处理; 王志喜(1970—), 男, 硕士, 副教授, 主要研究方向为计算机算法设计与分析。

子集,且 δ 在 $Q' \times \Sigma$ 上的限制 δ' 是严格的,即

$$Q' \Sigma^* \subseteq Q'$$

则三元组 $A' = (Q', \Sigma, \delta')$ 也是一个自动机,称为 A 的一个子自动机。此时,如果 Q' 只含一个状态 q ,就称 q 为 A 的一个陷阱状态,并称 A 为一个陷阱自动机。如果存在字 $\omega \in \Sigma^*$ 使

$$|Q\omega| = 1$$

就称 ω 为 A 的一个同步字,并称 A 为一个同步自动机。记 A 的最短同步字的长度为 d_A 。如果 $d_A \leq (n-1)^2$,就称 A 满足 Černý 猜想。下面是同步自动机的一些重要性质。

引理 1^[9] 如果 A 是一个 n -状态同步自动机,那么 A 有唯一的强连通的子自动机,且该子自动机也是同步的。

引理 2^[6] 如果 A 是一个 n -状态同步自动机且 $n \leq 5$,则 A 满足 Černý 猜想。

引理 3^[10] 如果 A 是一个 n -状态陷阱同步自动机,则

$$d_A \leq n(n-1)/2$$

引理 4^[8] 如果 A 是一个 n -状态强连通同步自动机且 $n > 2$,则

$$d_A \leq n(7n^2 + 6n - 16)/48$$

3 主要结论

既非陷阱也非强连通的同步自动机称为拟陷阱同步自动机。当 A 是一个拟陷阱同步自动机时,由引理 1 可以知道 A 有唯一的强连通的子自动机,记该子自动机的状态数为 c_A 。图 1 是一个拟陷阱同步自动机的状态图。

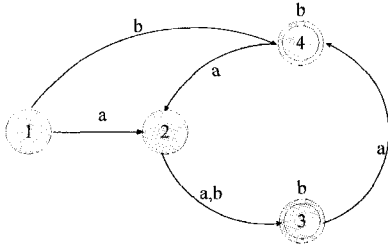


图 1 一个拟陷阱同步自动机的状态图

定理 1 设 A 是一个 n -状态拟陷阱同步自动机。如果 $c_A = 2$,则 A 满足 Černý 猜想且

$$d_A \leq \frac{n^2 - 3n + 4}{2}$$

如果 $c_A \geq 3$,则

$$d_A \leq \frac{24n^2 + (24 - 48c_A)n + 7c_A^3 + 30c_A^2 - 40c_A}{48} \quad (1)$$

且当 c_A, n 满足式(2)时 A 满足 Černý 猜想:

$$n \geq \frac{30 - 12c_A + \sqrt{6} \sqrt{102 - 160c_A + 54c_A^2 + 7c_A^3}}{12} \quad (2)$$

证明:设 $A = (Q, \Sigma, \delta)$,并记 A 的唯一的强连通子自动机为 $A' = (Q', \Sigma, \delta')$ 。由引理 1 可知 A' 是一个 c_A -状态强连通同步自动机。因为 A 既非陷阱的也非强连通的,所以

$$2 \leq c_A < n \quad (3)$$

构造一个新的自动机 $A'' = (Q', \Sigma, \delta'')$ 如下:

取定一个不属于 Q 的符号 $\bar{q}$,置

$$Q'' = (Q - Q') \cup \{\bar{q}\}$$

对任意的 $q \in Q'$ 和 $\omega \in \Sigma^*$,置

$$\delta''(q, \omega) = \begin{cases} \delta(q, \omega), & \text{若 } q \neq \bar{q} \text{ 且 } \delta(q, \omega) \notin Q' \\ \bar{q}, & \text{其它情形} \end{cases}$$

显然, A'' 是一个以 $\bar{q}$ 为陷阱状态的 $(n - c_A + 1)$ -状态自动机。任取 A 的一个同步字 ω 并假定 $Q\omega = q_\omega$ 。由 $Q' \subset Q$ 可得 $Q'\omega = q_\omega$;再由 $Q' \Sigma^* \subseteq Q'$ 可以断定 $q_\omega \in Q'$ 。这说明在 A'' 中有 $Q''\omega = \bar{q}$,因而 A'' 是一个陷阱同步自动机。

任取 A' 的一个最短同步字 ω' 和 A'' 的一个最短同步字 ω'' ,并令 $\omega = \omega''\omega'$ 。假定 $Q'\omega' = q_0$,注意到 $Q''\omega'' = \bar{q}$,对任意的 $q \in Q$ 必定有:

$$q\omega = q\omega''\omega' = (q\omega'')\omega' \subseteq Q'\omega' = \{q_0\}$$

因此 ω 是 A 的一个同步字。因而

$$d_A \leq |\omega| = |\omega''| + |\omega'| \quad (4)$$

当 $c_A = 2$ 时,分别由引理 2 和引理 3 可知:

$$|\omega'| = 1, |\omega''| \leq (n-1)(n-2)/2$$

再利用式(4)可得:

$$d_A \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 = \frac{n^2 - 3n + 4}{2}$$

进一步地,因为 $n > c_A = 2$,所以

$$(n-1)^2 - d_A \geq (n-1)^2 - \frac{n^2 - 3n + 4}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} > 0$$

从而 A 一定满足 Černý 猜想。

下面考虑 $c_A \geq 3$ 的情形。由引理 4 和引理 3 可知:

$$|\omega'| \leq c_A(7c_A^2 + 6c_A - 16)/48$$

$$|\omega''| \leq (n - c_A + 1)(n - c_A)/2$$

再利用式(4)可得:

$$\begin{aligned} d_A &\leq \frac{(n - c_A + 1)(n - c_A)}{2} + \frac{c_A(7c_A^2 + 6c_A - 16)}{48} \\ &= \frac{24n^2 + (24 - 48c_A)n + 7c_A^3 + 30c_A^2 - 40c_A}{48} \end{aligned}$$

这就证明了式(1)成立。据此还可以知道,要完成定理的证明,只需证明下列不等式组(5)的解为式(2):

$$f(n) \geq 0, n > c_A \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} f(n) &= (n-1)^2 - \\ &\quad \frac{24n^2 + (24 - 48c_A)n + 7c_A^3 + 30c_A^2 - 40c_A}{48} \end{aligned}$$

首先,将 $f(n)$ 看作一个关于 n 的二次多项式,用韦达定理可以求得它的两个实根为:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{30 - 12c_A + \sqrt{6} \sqrt{102 - 160c_A + 54c_A^2 + 7c_A^3}}{12} \\ n_2 &= \frac{30 - 12c_A - \sqrt{6} \sqrt{102 - 160c_A + 54c_A^2 + 7c_A^3}}{12} \end{aligned}$$

因为 $f(n)$ 对 c_A 的任意实值都是一条开口向上的抛物线,所以不等式 $f(n) \geq 0$ 的一般解为:

$$n \in (-\infty, n_2] \cup [n_1, +\infty) \quad (6)$$

将 n_1 看作 $c_A \in [3, +\infty)$ 的函数,并令:

$$\begin{aligned} g &= n_1 - c_A \\ &= \frac{30 - 24c_A + \sqrt{6} \sqrt{102 - 160c_A + 54c_A^2 + 7c_A^3}}{12} \end{aligned}$$

考虑 g 对 c_A 的导数和二阶导数:

$$g' = \frac{\sqrt{6} g_2'}{24 \sqrt{g_2}} - 2, g'' = \frac{\sqrt{6}}{48} \cdot \frac{g_1}{\sqrt{g_2^3}}$$

其中

$$g_1 = -3568 + 8568c_A - 6720c_A^2 + 1512c_A^3 + 147c_A^4$$

$$g_2 = 102 - 160c_A + 54c_A^2 + 7c_A^3$$

计算可得:

$$g_1' = 8568 - 13440c_A + 4536c_A^2 + 588c_A^3$$

$$g_1'' = -13440 + 9072c_A + 1764c_A^2$$

$$g_1''' = 9072 + 3528c_A$$

以及

$$g_1|_{c_A=3} = 14387 > 0 \quad (7)$$

$$g_1'|_{c_A=3} = 24948 > 0 \quad (8)$$

$$g_1''|_{c_A=3} = 29652 > 0 \quad (9)$$

显然, $g_1''' > 0$, 利用函数的导数与其单调性之间的关系以及式(7)~式(9)可以知道 $g_1 > 0$ 。类似可以说明 $g_2 > 0$, 因而 $g'' > 0$ (10)

又因为

$$g'|_{c_A=3} > \frac{864}{414} - 2 > 0, g|_{c_A=3} > \frac{0.2}{12} > 0 \quad (11)$$

再利用函数的导数与其单调性之间的关系以及式(10)、式(11)又可以知道 $g > 0$, 因此

$$(\forall n \in [n_1, +\infty)), n \geq n_1 > c_A \quad (12)$$

再将 n_2 看作 $c_A \in [3, +\infty)$ 的函数。因为

$$n_2' = -\frac{\sqrt{6}g_2'}{24\sqrt{g_2}} - 1 < 0, n_2|_{c_A=3} < 4$$

所以 $n_2 \leq 3$, 因而

$$(\forall n \in (-\infty, n_2]) \quad n \leq n_2 \leq c_A \quad (13)$$

联合式(6)、式(12)和式(13)可以断定不等式组(5)的解为式(2)。证明完毕。

4 两个注记

注记1 根据定理1, 任意不小于2的整数 c_0 总对应一个正整数 n_0 使下面的命题为真: 如果 A 是一个状态数不少于 n_0 的拟陷阱同步自动机且 $c_A = c_0$, 则 A 满足Černý猜想。换句话说, 如果 A 是一个 n_0 -状态的拟陷阱同步自动机且 $c_A \leq c_0$, 则 A 满足Černý猜想。表1是根据定理1用Matlab计算出的 c_0 与 n_0 在 $c_0 \leq 60$ 时的对应表。

表1 c_0 与 n_0 在 $c_0 \leq 60$ 时的对应表

c_0	n_0	c_0	n_0	c_0	n_0
		21	42	41	116
2	3	22	45	42	120
3	4	23	48	43	125
4	5	24	51	44	129
5	6	25	54	45	134
6	7	26	57	46	138
7	9	27	61	47	143
8	11	28	64	48	148
9	12	29	68	49	152
10	14	30	72	50	157
11	16	31	75	51	162
12	18	32	79	52	167
13	21	33	83	53	172
14	23	34	87	54	177
15	25	35	91	55	182
16	28	36	95	56	188
17	30	37	99	57	193
18	33	38	103	58	198
19	36	39	107	59	204
20	39	40	111	60	209

注记2 I. Babcsányi在文献[15]中也讨论了拟陷阱同步自动机的最短同步字的长度的上界。对于一个 n -状态拟陷阱同步自动机 A , 该文首先证明了

$$d_A \leq \frac{(n-c_A+1)(n-c_A)}{2} + \frac{c_A^3 - c_A}{6}$$

因而断定当 n, c_A 满足式(14)时 A 满足Černý猜想:

$$\frac{(n-c_A+1)(n-c_A)}{2} + \frac{c_A^3 - c_A}{6} \leq (n-1)^2 \quad (14)$$

接下来, 该文断言不等式(14)等价于下面的不等式:

$$\frac{c_A(c_A-1)(c_A+1)}{6} \leq \frac{(n-1)(n+2c_A-4)}{2} \quad (15)$$

进而通过解不等式(15)得到了如下结论: 如果 n, c_A 满足下面的条件式(16), 则 A 满足Černý猜想:

$$c_A \leq \begin{cases} n-1, & \text{若 } n \leq 12 \\ (9 + \sqrt{12n+49})/2, & \text{若 } n \geq 13 \end{cases} \quad (16)$$

因为不能确定Černý猜想是否成立, 所以无法质疑上述结论, 但认为其证明过程存在错误, 例如, 当取 $n=8, c_A=7$ 时, 不等式(15)成立, 但不等式(14)不成立。

参考文献

- [1] Howie J M. Automata and languages [M]. Oxford: Clarendon Press, 1991
- [2] Ashby W R. An introduction to cybernetics [M]. London: Chapman & Hall, 1956
- [3] Boppana V, Rajan S P, Takayama K, et al. Model checking based on sequential ATPG [J]. Lecture Notes in Computer Science, 1999, 683: 418-430
- [4] Benenson Y, Elizur T P, Adar R, et al. Programmable and autonomous computing machine made of biomolecules [J]. Nature, 2001, 414(1): 430-434
- [5] Černý J. Poznamáka k homogénnym experimentom s konečnými automatami [J]. Matematicko-fyzikálny Časopis SAV, 1964, 14(3): 208-215
- [6] Černý J, Pirická A, Rosenauerová B. On directable automata [J]. Kybernetika, 1971, 7: 189-297
- [7] Pin J E. On two combinatorial problems arising from automata theory [J]. Annals of Discrete Mathematics, 1983, 17: 535-548
- [8] Trahtman A N. Modifying the upper bound on the length of minimal synchronizing word [J]. Lecture Notes in Computer Science, 2011, 6914: 173-180
- [9] Petkovic T, Ćirić M, Bogdanovic S. Decompositions of automata and transition semigroups [J]. Acta Cybernetica, 1998, 13: 385-403
- [10] Popovic Z, Bogdanovic S, Petkovic T. Trapped automata [J]. Publication Mathematics Debrecen, 2002, 60: 661-677
- [11] Roman A. New algorithms for finding short reset sequences in synchronizing automata [C]//Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology, 2005, 7: 13-17
- [12] Arnold F, Steinberg B. Synchronising groups and automata [J]. Theoretical Computer Science, 2006, 359: 101-110
- [13] Salomaa A. Composition sequences for functions over a finite domain [J]. Theoretical Computer Science, 2003, 292: 263-281
- [14] Steinberg B. The Černý conjecture for one-cluster automata with prime length cycle [J]. Theoretical Computer Science, 2011, 412(9): 5487-5491
- [15] Babcsányi I. The Černý conjecture for automata with blocking states [M]//Ésik E, ZFülöp Z, eds. Automata, Formal Languages, and Related Topics, Institute of Informatics, University of Szeged, 2009: 17-25