SAT问题可多项式归结到MSP问题

樊 硕 姜新文
(国防科技大学计算机学院 长沙 410073)

摘 要 针对文献[1]中提出的MSP问题(定义见正文),从SAT问题出发,给出SAT问题到MSP问题的多项式归结,进而给出MSP问题NP完全性质的另一种证明。

关键词 MSP问题,SAT问题,多项式归结,NP完全性
中图法分类号 TP301.5 **文献标识码** J

Proving NP-completeness of Polynomial Reduction from the SAT Problem to the MSP Problem

FAN Shuo JIANG Xin-wen
(School of Computer Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract According to the MSP problem (defined in the body) raised in paper[1], this paper started from the SAT problem and gave the polynomial reduction algorithm from the SAT problem to the MSP problem. Thus we provided another proof to the NP-completeness of the MSP problem.

Keywords MSP problem, SAT problem, Polynomially reduction, NP-completeness

1 引言

自从1971年S. A. COOK关于SAT∈NPC的工作发表后[2],很多学者对NP完全问题进行了研究。20世纪70年代到80年代,"NP完全"一词极为迅速地传播,许多相关的工作相继被发表。人们对于NP完全问题的关注和期望解决的热情,导致了介绍NP完全问题研究进展的专栏的产生[3,4]。1981年,J. Algorithms杂志开设了第一期NP完全问题研究进展专栏。该专栏起初的目的是为了丰富NP完全问题的集合,其后也收录了许多与NP完全理论相关的研究成果。这些成果包括随机NP理论、零知识证明、PCP理论等。然而NP完全问题求解的困难性使征服这个问题变得旷日持久,抑制了人类求解这个问题的急切心情。90年代以后,关于NP完全问题的研究,进入相对低潮的时期。NP完全问题研究进展专栏也由最初每期一文到零星刊文,最后基本停顿。1992年后,J. Algorithms停开了NP完全问题研究进展专栏。直到2005年,ACM TRANSACTIONS ON ALGORITHMS在时隔13年后又重新开设了NP问题研究进展专栏[5]。在NP完全问题领域中,一些一直困扰着人们的问题已经在这13年间得到了解决,例如判断整数的合数性问题已经划分在了P类问题的范畴[6]。

随着人们对NP完全问题的不断研究,NP完全理论也逐渐丰富并且日趋成熟。然而在NP完全理论中仍然遗留着一个尚未解决的难题,即NP是否等于P的问题。为了解决NP是否等于P的问题,人们提出过不同的方法,做出过有意义的尝试。这些工作促进了其他相关领域的发展,但遗憾的是都没有解决问题本身。2010年8月Vinay Deolalikar关于P≠NP的证明轰动一时,然而在一个月后也找出了证明中的漏洞[7,8]。目前,解决这个问题仍然是对人们的一个挑战。

在目前证明P=NP的工作当中,有一个是关于MSP问题的[1,9,10]。在文献[1]中,作者提出了一个新的NP完全问题,即MSP问题,并且找出了求解MSP问题的多项式算法。抛开算法正确性的证明不谈(关于算法正确性的证明在ACM TRANSACTIONS ON ALGORITHMS杂志第二轮审稿当中),单就MSP问题本身而言,足以给我们提供研究的素材。MSP问题具有良好的结构特征,为进一步的研究与SAT问题的联系提供了可能。

SAT问题作为第一个被证明的NP完全问题,对计算机科学的理论研究和实际应用都有非常重要的意义,一直以来都是人们研究的热点。目前对SAT问题的研究有关于SAT问题求解复杂性的研究、寻找快速的求解SAT问题的新算法[11,12]以及应用SAT求解器求解其他问题等[13]。

文献[1]通过将哈密顿回路判定问题归结为MSP问题,证明了MSP问题的NP完全性。本文通过深入研究MSP问题与SAT问题结构的相似性,给出了SAT问题到MSP问题的多项式归结,进而给出了一种更为直观的MSP问题NP完全性的证明方法。该研究的意义主要有:1. 丰富了NP完全问题的范畴。2. 给出了MSP问题NP完全性的另一种证明方法。3. 为求解SAT问题提供了一条新思路,即通过将SAT问题转化为MSP问题,进而利用求解MSP问题的算法

到稿日期:2012-04-15 返修日期:2012-06-01 本文受国防科技大学校预研基金资助。
樊 硕(1988-),男,硕士生,E-mail:fanshuo_ben@sina.com;姜新文(1962-),男,硕士,教授,主要研究方向为算法复杂性、计算复杂性、信息安全。

求解 SAT 问题。

2 MSP 问题的定义

为了本文的完整性，这里首先转述文献[1,9,10]对 MSP 问题的定义。

定义 1 称 $G=\langle V,E,S,D,L\rangle$ 是多级图（multistage-graph），如果满足以下条件：

V 为顶点集合，$V=V_0\cup V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_L$，$V_i\cap V_j=\phi$，$0\leqslant i,j\leqslant L,i\neq j$。如果 $u\in V_i$，称 u 所在的级为 i 级，也称 u 是 i 级的顶点。L 称为 G 的级。

E 为边级，E 中的边均为有向边，它用三元组 $\langle u,v,l\rangle$ 表示。如果 $\langle u,v,l\rangle\in E$，则 $u\in V_{l-1}$，$v\in V_l$。称 $\langle u,v,l\rangle$ 为 G 的第 l 级的边，$1\leqslant l\leqslant L$。

V_0 和 V_L 都只包含唯一顶点。称 V_0 中的顶点为源点，记为 S，称 V_L 中的顶点为汇点，记为 D。

对 G 中的每个顶点 v，都有一个边集 $E(v)$ 作为标记，$E(v)\subseteq E$。

定义 2 设 $G=\langle V,E,S,D,L\rangle$ 是一个多级图，$S-v_1-v_2-\cdots-v_k-\cdots-v_L$ 是 G 中的一条路径，$V_L=D$。如果对任意的 v_k，$1\leqslant k\leqslant L$，$S-\cdots-v_k\in E(v_k)$，称 G 中的这条路径为简单路径。

把判定给定的多级图 G 中是否存在简单路径的问题称之为 MSP 问题，即多级图简单路径（MultiStage-graph Simple Path）问题。

下面给出一个多级图的例子。图 1 所示的是一个多级图。多级图中的数字 1 到 8 以及 S 和 D 代表顶点，S 是源点，D 是汇点。e_i，$1\leqslant i\leqslant 13$ 代表多级图中的边。该多级图共有 6 级，第 0 级的顶点是 S，第 1 级的顶点是 1 和 2，第 2 级的顶点是 3，第 3 级的顶点是 4 和 5，第 4 级的顶点是 6、7 和 8，第 5 级的顶点是 D。各个顶点的边集取值定义如下。$E(1)=\{e_1\}$，$E(2)=\{e_2\}$，$E(3)=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$，$E(4)=\{e_1,e_3,e_5\}$，$E(5)=\{e_2,e_4,e_6\}$，$E(6)=\{e_1,e_3,e_5,e_{10}\}$，$E(7)=\{e_{12}\}$，$E(8)=\{e_1,e_3,e_6,e_8\}$，$E(D)=\{e_1,e_3,e_5,e_{10},e_{12}\}$。容易看出，$S-1-3-4-6-D$ 为 G 中的一条简单路径。

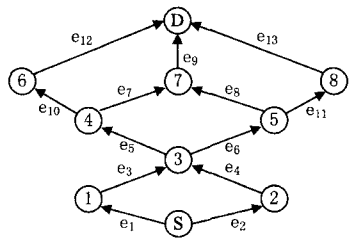

图 1 多级图实例

显然，不是所有多级图都存在简单路径，例如将上面多级图中的 $E(D)$ 定义为空集，则图中不存在简单路径。

3 MSP 问题的 NP 完全性证明

在 MSP 问题当中，边集的定义是一个核心。对于一个给定的多级图，其是否存在简单路径与它的边集定义有直接的关系。通过为某一个顶点指定边集，可以让它仅接纳某一些顶点，换句话说，使其排斥其他的一些顶点。所以如果存在一条从源点到汇点的简单路径，那么首先它是从每一级中都选取了一个顶点连接而成的。同时它必须满足路径中每一个点的边集约束条件。也就是说，多级图中级与级之间存在着约束关系。

通过研究，我们发现 SAT 问题也有类似的结构特征。为了方便说明，首先简要描述一下 SAT 问题。

设 $M=\{p_1,p_2,p_3,\cdots,p_m\}$ 是 m 个不同命题变元组成的集合。M 上的文字 l 是 M 中的命题变元或命题变元的非。一个命题变元和它的非所构成的两个文字称为一对互补文字。形如 $C=l_1\vee l_2\vee\cdots\vee l_n$ 的命题形式称为 M 上的子句。其中 l_i，$1\leqslant i\leqslant n$，是 M 上的文字。公式 $\phi=C_1\wedge C_2\wedge\cdots\wedge C_n$ 称为 M 上的合取范式（CNF）。其中 C_i，$1\leqslant i\leqslant n$，为 M 上的子句。SAT 问题是指：对于给定 M 上的一个合取范式 ϕ，是否存在对 M 中命题变元的一组 TURE 或 FALSE 的指派，使 ϕ 的真值为真。

我们知道，要让一个合取范式的真值为真，就必须使其中的每个子句的真值为真，而要让每个子句的真值为真，就必须让每个子句中都有一个文字的真值为真。问题在于，不同的子句当中可能存在互补的文字，为其中一个子句中的某个文字赋值为真，将导致其他子句中的互补文字不能为真。换句话说，合取范式中含有互补文字的子句之间存在着约束。然而这种约束是广泛的，由于子句中含有多个文字，因此每一个子句都可能和许多子句存在着约束关系。这与多级图当中的级与级的约束关系极为相似，让我们联想到将子句转化为多级图中的级，将子句中的文字转化为级中的顶点。这为构造 SAT 问题到 MSP 问题的归结提供了契机。

根据上述思想，构造了 SAT 问题到 MSP 问题的归结方法，将合取范式中的子句转化为多级图中的级，进而将子句中的文字转化为级中的顶点。下面给出 SAT 问题到 MSP 问题的多项式归结，并证明它的正确性。

设 $M=\{x_1,x_2,\cdots x_m\}$ 是 m 个命题变元的集合，ϕ 是 M 上的合取范式，$C_1,C_2,\cdots,C_k$ 是 ϕ 的 k 个字句。$\phi=(a_1^1\vee a_2^1\vee\cdots\vee a_{t_1}^1)\wedge(a_1^2\vee a_2^2\vee\cdots\vee a_{t_2}^2)\wedge\cdots\wedge(a_1^k\vee a_2^k\vee\cdots\vee a_{t_k}^k)$，其中 $C_1=a_1^1\vee a_2^1\vee\cdots\vee a_{t_1}^1$，$C_2=a_1^2\vee a_2^2\vee\cdots\vee a_{t_2}^2$，$\cdots$，$C_k=a_1^k\vee a_2^k\vee\cdots\vee a_{t_k}^k$，$t_1,t_2,\cdots t_k$ 均为常数。ϕ 中每个 a_j^i 代表一个文字 x_r 或 $\overline{x_r}$，$1\leqslant r\leqslant m$。

将 ϕ 转化为 $G=\langle V,E,S,D,L\rangle$。图 2 描述了多级图的构造过程：

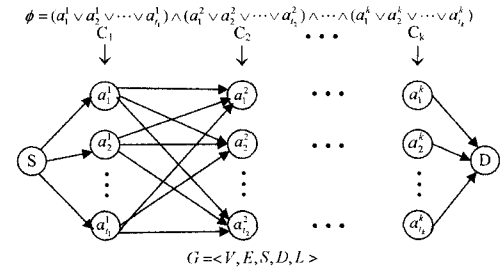

图 2 合取范式到多级图的转换

1）点的构造规则

首先，对于 ϕ 中的子句 $C_h=a_1^h\vee a_2^h\vee\cdots\vee a_{t_h}^h$，$1\leqslant h\leqslant k$，归结算法生成多级图中的第 h 级，并将子句 C_h 中的每一个文

字都一一对应地转化为多级图的第 h 级中的顶点。这样就将 ϕ 中的子句 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 转化为 G 中的级 $V_1,V_2,\cdots,V_k$。然后，将源点 S 和汇点 D 手动地加入图中，构成图中的第 0 级 V_0 和第 $k+1$ 级 V_{k+1}。

上面的转化可以用映射 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 来表示，其中 $f_i:L_i\to V_i$，$L_i=\{l|l$ 是 C_i 中的文字$\}$，$1\leqslant i\leqslant k$。映射 f_i，$1\leqslant i\leqslant k$，将子句 C_i 中的文字一一对应到 V_i 中的点。若 $l\in L_i$，则 $f_i(l)\in V_i$。$f_1,f_2,\cdots,f_k$ 均为一一映射。

这样，对于多级图中的点集，则有

$V_h=\{f_h(a_1^h),f_h(a_2^h),\cdots,f_h(a_{t_h}^h)\}$，$1\leqslant h\leqslant k$

$V_0=\{S\}$，$V_{k+1}=\{D\}$

$V=V_0\cup V_1\cup\cdots\cup V_{k+1}$。$L=k+1$

2)边的构造规则

图中的边均为有向边。对于图中的任意两个顶点，如果它们处在相邻的两级中，则产生一条连接这两个点的有向边，边的方向是所在级数较低的顶点指向所在级数较高的顶点。即 $E=\{\langle u,v,h\rangle|u\in V_{h-1},v\in V_h,1\leqslant h\leqslant k+1\}$。

3)边集的定义

定义 $\#:L\to 2^{V^*}$，$L=\{l|l$ 是 ϕ 中的文字$\}$，$V^*=\{v|v$ 是 G 中除 S 和 D 的顶点$\}$。由于 ϕ 中的不同子句可能含有相同的文字，因此就某个文字而言，它可能转化成为多个 G 中的顶点。对于 ϕ 中每一个文字 l，设含有文字 l 的子句分别是 $C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_w}$，$1\leqslant s_1,s_2,\cdots,s_w\leqslant k$。那么有 $\#(l)=\bigcup_{u=1}^{w}\{f_{s_u}(l)\}$。容易看出，$\#$ 是单射但不是满射。

对于图中除 S 和 D 之外的任意点 v，定义边集如下：

设 $v\in\#(l)$，l 是 ϕ 中的文字。若 ϕ 中不含有 $\bar{l}$，则 $E(v)=E$。若 φ 中含有 $\bar{l}$，则 $E(v)=E-\{e|e\in E$，并且 $\#(\bar{l})$ 中的点是 e 的起点或 e 的终点$\}$。

$E(D)=E$，$E(S)=\varnothing$

下面证明归结的正确性。

引理 1 设 l_a 和 l_b 是 ϕ 中的两个文字，若 $l_a\neq l_b$，则 $\#(l_a)\cap\#(l_b)=\varnothing$。

证明：反证法。若 $\#(l_a)\cap\#(l_b)\neq\varnothing$，则存在点 v 使得 $v\in\#(l_a)\cap\#(l_b)$。设 $v\in V_g$，$1\leqslant g\leqslant k$，则有 $f_g(l_a)=v$ 和 $f_g(l_b)=v$，那么有 $f_g(l_a)=f_g(l_b)$。因为 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 均为一一映射，所以有 $l_a=l_b$，矛盾。证毕。

定理 1 ϕ 可满足，当且仅当 G 有简单路径。

证明：①(⇒)若 ϕ 可满足，则存在对 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的一组赋值使得 ϕ 为真，即使得 ϕ 中每个子句的赋值为真。在这样的赋值下，ϕ 中的每个子句中都至少含有一个赋值为真的文字。设子句 C_1 中赋值为真的文字为 l_1，其所对应的多级图中的点记为 v_1，$v_1=f_1(l_1)$。若有多于一个文字赋值为真，则任取一个。同样设 $C_2,\cdots,C_k$ 中赋值为真的文字为 $l_2,\cdots,l_k$，所对应的多级图中的点记为 $v_2,\cdots,v_k$，$v_2=f_2(l_2),\cdots,v_k=f_k(l_k)$。这里需要注意的是，在 $l_1,l_2,\cdots,l_k$ 中可能存在相同的文字。将 $v_1,v_2,\cdots,v_k$ 连接起来，头尾加入 S 和 D 组成一条 G 中的路径 $S-v_1-\cdots-v_i-\cdots-v_k-D$。由于 $E(D)=E$，有 $S-v_1-\cdots-v_i-\cdots-v_k-D\in E(D)$。对于路径中的点 v_i，$v_i=f_i(l_i)$，$1\leqslant i\leqslant k$，若 ϕ 中不含有 $\bar{l_i}$，则直接有 $S-v_1-\cdots-v_i\in E(v_i)$。若 ϕ 中含有 $\bar{l_i}$，由于 $l_1,\cdots,l_i$ 的赋值都为真，因此在 $l_1,\cdots,l_i$ 中不存在互补文字，那么有 $l_1\neq\bar{l_i},\cdots,l_{i-1}\neq\bar{l_i},l_i\neq\bar{l_i}$。根据引理 1 的结论，有 $\#(l_1)\cap\#(\bar{l_i})=\varnothing,\cdots,\#(l_{i-1})\cap\#(\bar{l_i})=\varnothing,\#(l_i)\cap\#(\bar{l_i})=\varnothing$，又因为 $v_1\in\#(l_1),\cdots,v_{i-1}\in\#(l_{i-1}),v_i\in\#(l_i)$，所以 $v_1\notin\#(\bar{l_i}),\cdots,v_{i-1}\notin\#(\bar{l_i}),v_i\notin\#(\bar{l_i})$。由此可知，在 $S-v_1-\cdots-v_i$ 中没有以 $\#(\bar{l_i})$ 中的点作为起点或终点的边，根据边集的定义可知，$S-v_1-\cdots-v_i\in E(v_i)$。由 v_i 的任意性可得 $S-v_1-\cdots-v_i-\cdots-v_k-D$ 是 G 中的一条简单路径。

②(⇐)若 G 存在一条简单路径，即 $S-v_1-\cdots-v_i-\cdots-v_k-D$，其中 $v_1,\cdots,v_k$ 分别为 $V_1,\cdots,V_k$ 中的顶点，则必存在 $C_1,\cdots,C_k$ 中的文字 $l_1,\cdots,l_k$，使得 $v_1=f_1(l_1),\cdots,v_k=f_k(l_k)$。因为 $S-v_1-\cdots-v_i-\cdots-v_k-D$ 是一条简单路径，所以对于 $\forall v_i$，$1\leqslant i\leqslant k$，有 $S-v_1-\cdots-v_i\in E(v_i)$。按照边集的定义，$S-v_1-\cdots-v_i$ 中不存在以 $\#(\bar{l_i})$ 中的点为起点或终点的边，即 $v_1\notin\#(\bar{l_i}),\cdots,v_{i-1}\notin\#(\bar{l_i}),v_i\notin\#(\bar{l_i})$。又因为 $v_1\in\#(l_1),\cdots,v_{i-1}\in\#(l_{i-1}),v_i\in\#(l_i)$，所以 $\#(l_1)\neq\#(\bar{l_i}),\cdots,\#(l_{i-1})\neq\#(\bar{l_i}),\#(l_i)\neq\#(\bar{l_i})$。根据 $\#$ 是映射可知，$l_1\neq\bar{l_i},\cdots,l_{i-1}\neq\bar{l_i},l_i\neq\bar{l_i}$。这说明 $l_1,\cdots,l_i$ 中不存在与 l_i 互补的文字。由 v_i 的任意性也即 l_i 的任意性，有 $l_1,\cdots,l_k$ 中不存在互补文字。因此，可将文字 $l_1,\cdots,l_k$ 全部赋值为真(可能出现对同一文字多次赋值的情况)，在这样的赋值下，$C_1,\cdots,C_k$ 的真值都为真，进而公式 ϕ 的真值为真，可满足。证毕。

定理 2 上述归结的计算复杂性是关于 ϕ 中文字个数的多项式函数。

证明：设 ϕ 中文字个数为 K，转化成的 G 中的顶点数量为 $|V|$，边的数量为 $|E|$。容易看出 $K=t_1+t_2+\cdots+t_k$。根据转化规则有 $|V|=t_1+t_2+\cdots+t_k+2=K+2$，$|E|=t_1+t_1\times t_2+\cdots+t_{k-1}\times t_k+t_k$。如果设 $t_{\max}$ 为 $t_1,t_2,\cdots,t_k$ 中最大的数，则有 $|E|<t_{\max}+t_1\times t_{\max}+t_2\times t_{\max}+\cdots+t_{k-1}\times t_{\max}+t_{\max}<t_{\max}(K+2)<K(K+2)$。所以绘制多级图的顶点和边可以在 $O(K^2)$ 的复杂度下完成。多级图中每个点的边集 $E(v)$ 均为 E 的子集，为多级图中的点指定边集仅仅需要对图中的每条边进行一次判断即可，所以为图中的每个顶点指定边集的复杂度不会超过 $O(|V|\times|E|)=O(K^3)$。证毕。

由定理 1 和定理 2，给出下面的定理 3。

定理 3 MSP 问题是 NP 完全的。

证明：首先 MSP 问题显然是 NP 问题。任意非确定型图灵机只需要猜想一条从 S 到 D 的路径，并验证该路径是否为简单路径即可。依据 MSP 问题的定义，这种猜想和验证均可以在多级图级别的多项式时间内完成。然后根据定理 1 和定理 2，SAT 问题可以在不超过 $O(K^3)$ 的复杂性下归结到 MSP 问题，其中 K 是合取范式中所含文字的个数。所以 MSP 问题是 NP 完全的。

结束语 本文提出了 SAT 问题到 MSP 问题的多项式归结，给出了 MSP 问题 NP 完全性的另一种证明。同时，这种归结的产生，也为求解 SAT 问题提供给了一个新思路，即通过将 SAT 问题转换为 MSP 问题，再利用求解 MSP 问题的方

法求解 SAT 问题。关于这个方面，我们也已经做了初步的工作。利用文献[1]中提出的求解 MSP 问题的算法，编程实现了求解 SAT 问题的新算法，并且进行了一些实例测试。测试结果表明了算法的正确性。更进一步的研究还在进行当中。

参 考 文 献

[1] Jiang Xin-wen, Peng Li-hong, Wang Qi. MSP Problem: Its NP-Completeness and Its Algorithm [C] // The 5th International Conference on Ubiquitous Information Technologies and Applications. 2010: 101-105

[2] Cook S. The Complexity of Theory-proving Procedures [C]// Proceedings of 3rd Ann ACM Symp on Theory of Computing. 1971: 151-158

[3] Johnson D. The NP-completeness Column: An Ongoing Guide [J]. Journal of Algorithms, 1987, 7: 285-300

[4] Johnson D. The NP-completeness Column: An Ongoing Guide [J]. Journal of Algorithms, 1987, 8: 438-448

[5] Johnson D. The NP-completeness Column [J]. ACM transactions on Algorithms, 2005: 160-176

[6] Agrawal M, Kayal N, Saxena N. PRIMES is in P [J]. Annals of Mathematics, 2004, 2: 781-793

[7] Deolalikar V. Vinay Deolalikar explains the proof that P≠NP [EB/OL]. http://www.allvoices.com/contributed-news/6476401-vinay-deolalikar-explains-the-proof-that-p-np, 2010-08-08/2010-09-01

[8] Vardi M Y. On P, NP, and Computational Complexity [J]. Communications of the ACM, 2010, 53(11): 5

[9] 姜新文. MSP 问题及其求解研究[J]. 计算技术与自动化, 2006, 25(4)

[10] 姜新文，王琪，姜子恒. Z-H 算法正确性证明第四次改写[J]. 计算技术与自动化, 2010, 29(3)

[11] 田宗权，付非凡，高赛，等. 基于改进的 DS_BPSO 算法求解 3-SAT 问题[J]. 软件导刊, 2010(7)

[12] 郑黎辉，左万利. 一次性求解多个 SAT 问题[J]. 吉林大学学报, 2010(2)

[13] Horbach A, Bartsch T, Briskorn D. Using a SAT-solver to schedule sports leagues [J]. Journal of Scheduling, 2012, 1: 117-125

(上接第 173 页)

的方法更为优化。基于移动率的模糊辨识方法的误差降低的原因是此方法正确地反映了输入和隶属函数之间的关系，如 SVD、复合形法等的各种方法适当地应用于基于移动率的模糊模型辨识方法。

结束语 本文说明了现行辨识方法的缺点，定义了对 S 型、Z 型和梯形隶属函数的移动率，并通过与现行的方法的比较，得出了新方法的优点。然后，提出了基于移动率的模糊辨识方法。为了解决矩阵的秩、目标函数的微分不可能性的问题等，将 SVD 方法、复合形法等应用于基于移动率的模糊模型辨识。最后，通过降水量和安全态势的预测建模实验证明了基于移动率的方法的有效性。仿真结果表明，预测模型设计中基于移动率的辨识方法比现行方法模型的准确性好，且误差很小，本文提出的方法为模糊推理与模糊模型辨识方法的研究提供了一种新的途径。

参 考 文 献

[1] Zhu Bing, He Chang-zheng, Liatsis P, et al. A GMDH-based fuzzy modeling approach for constructing TS model [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2012, 189(1): 19-29

[2] Du Hai-ping, Zhang Nong. Application of evolving Takagi-Sugeno fuzzy model to nonlinear system identification [J]. Applied Soft Computing, 2008, 8(1): 676-686

[3] Chen J Q, Xi Y G, Zhang Z J. A clustering algorithm for fuzzy model identification [J]. Fuzzy Sets Syst., 1998(98): 319-329

[4] Sun C-T. Rule-base structure identifica-tion in an adaptive-network-based fuzzy inference system [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1994, 2(1): 64-73

[5] Chiu S L. Fuzzy model identification based on cluster estimation [J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 1994, 2(3): 267-278

[6] Pouzols F M, Barros A B. Automatic clustering-based identification of autoregressive fuzzy inference models for time series [J]. Neurocomputing, 2010, 73(10-12): 1937-1949

[7] Jia Li, Chiu Min-sen, Ge Shu-zhi. A noniterative neuro-fuzzy based identification method for Hammerstein processes [J]. Journal of Process Control, 2005, 15(7): 749-761

[8] Ertugrul S. Predictive modeling of human operators using parametric and neuro-fuzzy models by means of computer-based identification experiment [J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2008, 21(2): 259-268

[9] Li Chao-shun, Zhou Jian-zhong, Xiang Xiu-qiao, et al. T-S fuzzy model identification based on a novel fuzzy c-regression model clustering algorithm [J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2009, 22(4/5): 646-653

[10] Gómez-Skarmeta A F, Delgado M, Vila M A. About the use of fuzzy clustering techniques for fuzzy model identification [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 106(2): 179-188

[11] Tewari A, Macdonald M-U. Knowledge-based parameter identification of TSK fuzzy models [J]. Applied Soft Computing, 2010, 10(2): 481-489

[12] Anh H P H, Ahn K K. Identification of pneumatic artificial muscle manipulators by a MGA-based nonlinear NARX fuzzy model [J]. Mechatronics, 2009, 19(1): 106-133

[13] Sugeno M, Kang G. Structure identification of fuzzy model [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1988(28): 15-33

[14] Wang Liang, Langari R. Sugeno model, fuzzy discretization, and the EM algorithm [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 82(3): 279-288

[15] Kondo T. Revised GMDH algorithm estimating degree of the complete polynomial [J]. Trans. Soc Intrument and Control Engrs, 1986(22): 928-934

[16] Ouyang Chen-sen, Wang Chih-Chung, Chen Yung-chih. A recursive SVD-based self-constructing rule generation for neuro-fuzzy system modeling [C] // Machine Learning and Cybernetics (ICMLC). 2011 International Conference. 2011(1): 172-177

[17] 许哲万，李晶皎，王爱侠，等. 一种基于改进 T-S 模糊推理的模糊神经网络学习算法[J]. 计算机科学, 2011, 38(11): 196-199, 219