基于等价关系的混合多粒度粗糙集

杨习贝[1,2] 窦慧莉[1] 杨静宇[2]
（江苏科技大学计算机科学与工程学院 镇江 212003）[1]
（南京理工大学计算机科学与技术学院 南京 210094）[2]

摘 要 以基于等价关系诱导的划分为基础，提出了混合多粒度空间的概念，以便研究同时具有析取和合取关系的多粒度空间。利用混合多粒度空间中的划分对目标概念进行近似逼近，提出了混合多粒度粗糙集模型。讨论了混合多粒度粗糙集模型的基本性质，证明了混合多粒度粗糙集是乐观和悲观多粒度粗糙集的广义化表现形式。

关键词 多粒度粗糙集，混合多粒度空间，混合多粒度粗糙集

中图法分类号 TP18 **文献标识码** A

Hybrid Multigranulation Rough Sets Based on Equivalence Relations

YANG Xi-bei[1,2] DOU Hi-li[1] YANG Jing-yu[2]
(School of Computer Science and Engineering, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212003, China)[1]
(School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)[2]

Abstract Based on the partitions generated from the equivalence relations, the concept of hybrid multigranulation space was proposed to study the multigranulation space with both disjunction and conjunction. By using the partitions in hybrid multigranulation space, the target concept was approximated and then the concept of hybrid multigranulation rough set was proposed. Not only the basic properties about hybrid multigranulation rough set were explored, but also it was proven that hybrid multigranulation rough set is a generalization of both optimistic and pessimistic multigranulation rough sets.

Keywords Multigranulation rough set, Hybrid multigranulation space, Hybrid multigranulation rough set

1 引言

1997年，模糊集理论的创始人Zadeh提出了模糊信息粒化[1]的概念，在此基础上，Lin进一步提出了粒计算[2-4]理论。尽管目前对于粒计算这个概念还没有一个明确的形式化定义，但这并不妨碍粒计算方法及思想的应用。近年来，以模糊集、粗糙集[5]和商空间[6]理论为代表的粒计算数学模型在模式识别、知识发现、故障诊断、医疗分析、风险投资等众多领域的成功应用充分体现了粒计算方法的先进性和实用性。

在粒计算理论中，多粒度是一个核心概念。从Yao的粒计算三元论[7]来看，多粒度体现在两个方面：层次性和多视角。层次性描述了不同粒空间（粒结构）之间的关系和联系，每一层次上的信息粒提供对问题全局和完整的描述，粒度的层次不同，对于问题描述的抽象程度或复杂度就不同，典型的例子是对于地图的观察，随着观察粒度的越来越细，对于地图的认识也越来越清晰[8]（需注意的是，粒度越细并不代表对于问题求解越有用，而应根据实际问题需求来寻找合适的粒度空间）。多视角代表对问题的不同角度的描述和理解，是多个局部视角的组合，例如在信息系统里，系统管理员和系统运营商关心所的焦点是不一样的，系统管理员和系统运营商分别代表了两个局部视角，这两者的组合构成了一个多视角[7]。

近年来，针对粗糙集建模问题，涌现出了很多关于层次性问题的研究，如划分、覆盖粒空间上的分层递阶及不确定性度量[9-11]等，此处不再赘述。本文要讨论的是多视角问题。根据粗糙集理论，一个划分表示了对于论域中不同对象之间的区分能力，即知识，Pawlak的粗糙集是建立在这样一个划分基础上的。但是粒计算三元论中的多视角告诉我们，局部视角并不能覆盖复杂系统的方方面面，因而需要将多个不同的视角组合优化，才可能获得对复杂系统的全面理解。从这个角度出发，钱宇华等人进一步拓展了Pawlak的粗糙集理论，采用多个划分，即多组不同的知识来对目标概念进行近似逼近，提出了多粒度粗糙集[12-14]的概念。

给定一族划分，不同划分之间常见的逻辑关系有两种：析取和合取。譬如，在粗糙集理论中，信息系统的约简可能不止一个，每一个约简都是一个保持信息系统中某种性质不变的最小属性子集，由这个最小属性子集所生成的不可分辨关系就诱导了论域上的一个划分。对于信息系统来说，由于不同约简之间的关系是“或”，那么不同约简所对应的划分之间的逻辑关系就可被认为是析取；再如，Pawlak的不可分辨关系是一些等价关系的交集，由于每一个等价关系对应于论域上

到稿日期：2011-12-23 返修日期：2012-03-01 本文受国家自然科学基金(61100116)，江苏省自然科学基金(BK2011492)，江苏省高校自然科学基金(11KJB520004)，中国博士后科学基金(20100481149)，江苏省博士后科学基金(1101137C)资助。

杨习贝(1980—)，男，博士，讲师，主要研究方向为粒计算、粗糙集，E-mail：zhenjiangyangxibei@163.com。

的一个划分，因此这些划分之间的逻辑关系就可被认为是合取。对应于上述两种逻辑关系，钱宇华等人分别提出了乐观多粒度[12,13]和悲观多粒度[14]粗糙集的定义。笔者在这两种不同多粒度粗糙集的基础上，考虑一族划分中同时具有析取和合取关系，进而提出了一种新的多粒度粗糙集方法，称其为混合多粒度粗糙集。这种混合多粒度粗糙集是乐观和悲观多粒度粗糙集的一种广义化表现形式。

本文所描述的混合多粒度方法是有实际应用背景的。例如，因为针对某一个具体的信息系统，往往可以得到一个或一个以上的约简，所以在由分辨矩阵方法求信息系统的约简时，可以得到分辨函数的一个极小析取范式，这个极小析取范式中的每一个合取项就是一些属性（划分）之间求合取所得到的结果，据此可知与约简对应的极小析取范式就是一个混合多粒度的概念。再如，在 Liu 的公理化模糊集理论[15]中，复杂概念是由一些简单概念复合而成的，典型的复合方法就是采用析取和合取，譬如复杂概念“花白头发或个子较高的老年人”就是针对“花白头发的老年人”和“个子较高的老年人”这两个合取范式求析取得到的，而这两个合取范式则分别是由“花白头发”、“个子较高”、“老年人”这些简单概念求合取得到的。换句话说，公理化模糊集理论也体现了混合多粒度的基本思想。

2 乐观与悲观多粒度粗糙集

令 U 为论域，$\boldsymbol{R}=\{R_1,R_2,\cdots,R_m\}$ 为论域上一族等价关系的集合，称二元组 $(U,\boldsymbol{R})$ 为一个知识基。给定一个知识基 $(U,\boldsymbol{R})$，对于 $\forall P\subseteq \boldsymbol{R}$，$\bigcap P$ 表示 P 中所有等价关系的交集，所得到的仍然是一个等价关系，Pawlak 称其为不可分辨关系，并记为 $IND(P)$。由不可分辨关系 $IND(P)$ 所得到的论域上的划分记为 $U/IND(P)$，对于 $\forall x\in U$，x 根据不可分辨关系 $IND(P)$ 得到的等价类记为 $[x]_P$。

以粒计算的观点来看，划分 $U/IND(P)$ 中的每一个等价类就是一个信息粒的基本表示方式，所有这些等价类的合集就构成了一个粒空间。

定义 1 令 $(U,\boldsymbol{R})$ 为一知识基，$P\subseteq\boldsymbol{R}$，对于 $\forall X\subseteq U$，X 的下近似集合 $\underline{P}(X)$ 与上近似集合 $\overline{P}(X)$ 分别定义为：

$$\underline{P}(X)=\{x\in U:[x]_P\subseteq X\} \tag{1}$$

$$\overline{P}(X)=\{x\in U:[x]_P\cap X\neq\emptyset\} \tag{2}$$

显然，定义 1 所示的粗糙集是建立在一个等价关系的基础上的，因而可视作单粒度粗糙集。在单粒度粗糙集的基础上，钱宇华等人提出了多粒度粗糙集的概念。与单粒度粗糙集最大的不同之处是多粒度粗糙集采用两个或两个以上粒结构中的知识来进行目标概念的近似逼近。

令 $(U,\boldsymbol{R})$ 为一知识基，其中 $R_1,R_2,\cdots,R_m\in\boldsymbol{R}$，那么由这一族等价关系就得到了论域上的一族划分，记为 $U/R_1,U/R_2,\cdots,U/R_m$。若这一族划分之间的逻辑关系为析取，则称这一族划分所构成的多粒度空间为析取多粒度空间，记为 $\bigvee_{i=1}^m R_i$；若这一族划分之间的逻辑关系为析取，则称这一族划分所构成的多粒度空间为析取多粒度空间，记为 $\bigwedge_{i=1}^m R_i$。与析取多粒度空间对应的是乐观多粒度粗糙集，而与合取多粒度空间对应的是悲观多粒度粗糙集。

定义 2 令 $(U,\boldsymbol{R})$ 为一知识基，其中 $R_1,R_2,\cdots,R_m\in\boldsymbol{R}$，$\bigvee_{i=1}^m R_i$ 是一个析取多粒度空间，对于 $\forall X\subseteq U$，X 的乐观多粒度下近似集合 $\underline{\bigvee_{i=1}^m R_i}(X)$ 与上近似集合 $\overline{\bigvee_{i=1}^m R_i}(X)$ 分别定义为：

$$\underline{\bigvee_{i=1}^m R_i}(X)=\{x\in U:[x]_{R_1}\subseteq X\vee\cdots\vee[x]_{R_m}\subseteq X\} \tag{3}$$

$$\overline{\bigvee_{i=1}^m R_i}(X)=\sim\underline{\bigvee_{i=1}^m R_i}(\sim X) \tag{4}$$

式中，$\sim X$ 表示集合 X 的补集。

根据乐观多粒度的定义可知，对象 x 只要在某一个粒空间上满足等价类包含于被近似的集合，那么对象 x 就被认为是属于被近似集合的下近似。

定义 3 令 $(U,\boldsymbol{R})$ 为一知识基，其中 $R_1,R_2,\cdots,R_m\in\boldsymbol{R}$，$\bigwedge_{i=1}^m R_i$ 是一个合取多粒度空间，对于 $\forall X\subseteq U$，X 的悲观多粒度下近似集合 $\underline{\bigwedge_{i=1}^m R_i}(X)$ 与上近似集合 $\overline{\bigwedge_{i=1}^m R_i}(X)$ 分别定义为：

$$\underline{\bigwedge_{i=1}^m R_i}(X)=\{x\in U:[x]_{R_1}\subseteq X\wedge\cdots\wedge[x]_{R_m}\subseteq X\} \tag{5}$$

$$\overline{\bigwedge_{i=1}^m R_i}(X)=\sim\underline{\bigwedge_{i=1}^m R_i}(\sim X) \tag{6}$$

根据悲观多粒度的定义可知，对象 x 只有在所有给定的粒空间上满足等价类包含于被近似的集合，才被认为是属于被近似集合的下近似。

定义 4 令 $(U,\boldsymbol{R})$ 为一知识基，其中 $R_1,R_2,\cdots,R_m\in\boldsymbol{R}$，则多粒度粗糙隶属度函数有如下两种形式的定义：

$$\mu_X^{\bigvee_{i=1}^m R_i}(x)=\max\{\mu_X^{R_i}(x):i=1,2,\cdots,m\} \tag{7}$$

$$\mu_X^{\bigwedge_{i=1}^m R_i}(x)=\min\{\mu_X^{R_i}(x):i=1,2,\cdots,m\} \tag{8}$$

式中，$\mu_X^{R_i}(x)$ 就是 Pawlak 粗糙集中的粗糙隶属度，即 $\mu_X^{R_i}(x)=\dfrac{|[x]_{R_i}\cap X|}{|[x]_{R_i}|}$。

很明显，多粒度空间下的粗糙隶属度依然满足性质 $0\leqslant\mu_X^{\bigvee_{i=1}^m R_i}(x)\leqslant 1$，$0\leqslant\mu_X^{\bigwedge_{i=1}^m R_i}(x)\leqslant 1$，称 $\mu_X^{\bigvee_{i=1}^m R_i}(x)$ 为析取多粒度粗糙隶属度，$\mu_X^{\bigwedge_{i=1}^m R_i}(x)$ 为合取多粒度粗糙隶属度。

定理 1 令 $(U,\boldsymbol{R})$ 为一知识基，其中 $R_1,R_2,\cdots,R_m\in\boldsymbol{R}$，有

$$\underline{\bigvee_{i=1}^m R_i}(X)=\{x\in U:\mu_X^{\bigvee_{i=1}^m R_i}(x)=1\} \tag{9}$$

$$\overline{\bigvee_{i=1}^m R_i}(X)=\{x\in U:0<\mu_X^{\bigvee_{i=1}^m R_i}(x)\leqslant 1\} \tag{10}$$

$$\underline{\bigwedge_{i=1}^m R_i}(X)=\{x\in U:\mu_X^{\bigwedge_{i=1}^m R_i}(x)=1\} \tag{11}$$

$$\overline{\bigwedge_{i=1}^m R_i}(X)=\{x\in U:0<\mu_X^{\bigwedge_{i=1}^m R_i}(x)\leqslant 1\} \tag{12}$$

证明：仅证式(9)，其他证明过程类似。

$$\begin{aligned}
&x\in\underline{\bigvee_{i=1}^m R_i}(X)\\
&\quad\Leftrightarrow\{x\in U:[x]_{R_1}\subseteq X\vee\cdots\vee[x]_{R_m}\subseteq X\}\\
&\quad\Leftrightarrow\exists\, i=1,2,\cdots,m \text{ 使得 }[x]_{R_i}\subseteq X\\
&\quad\Leftrightarrow\exists\, i=1,2,\cdots,m \text{ 使得 }\mu_X^{R_i}(x)=1\\
&\quad\Leftrightarrow\mu_X^{\bigvee_{i=1}^m R_i}(x)=1
\end{aligned}$$

3 混合多粒度粗糙集

在第 2 节所示的多粒度粗糙集方法中，所有粒空间之间满足析取或者合取的关系，也就是说，无论是乐观还是悲观多粒度粗糙集，都未考虑多个粒空间之间可能同时具有析取或合取的关系。为了解决这个问题，首先提出两种混合多粒度空间，如定义 5 所示。

定义 5 令$(U,\boldsymbol{R})$为一知识基，

1. 若$\bigwedge_{i=1}^{m_1}R_{1i},\cdots,\bigwedge_{i=1}^{m_J}R_{Ji}$为 J 个合取多粒度空间，则称$\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})$为一个混合多粒度空间；

2. 若$\bigvee_{i=1}^{m_1}R_{1i},\cdots,\bigvee_{i=1}^{m_J}R_{Ji}$为 J 个析取多粒度空间，则称$\bigwedge_{j=1}^{J}(\bigvee_{i=1}^{m_j}R_{ji})$为一个混合多粒度空间。

混合多粒度空间$\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})$是对于 J 个合取多粒度空间求析取得到的，而混合多粒度空间$\bigwedge_{j=1}^{J}(\bigvee_{i=1}^{m_j}R_{ji})$则是对 J 个析取多粒度空间求合取得到的。若在混合多粒度空间$\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})$中，每个合取多粒度空间都仅由一个粒空间组成，即 $m_j=1$，则$\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})$就退化成第 2 节所述的析取多粒度空间；若在混合多粒度空间$\bigwedge_{j=1}^{J}(\bigvee_{i=1}^{m_j}R_{ji})$中，每个析取多粒度空间都仅由一个粒空间组成，即 $m_j=1$，则$\bigwedge_{j=1}^{J}(\bigvee_{i=1}^{m_j}R_{ji})$就退化成第 2 节所述的合取多粒度空间。

此外，值得注意的是对于一个混合多粒度空间$\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})$，根据析取和合取运算的性质，一定可以将其转化为一个由若干个析取多粒度空间求合取而得到的混合多粒度空间，即$\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})$和$\bigwedge_{j=1}^{J}(\bigvee_{i=1}^{m_j}R_{ji})$之间可以相互转化，因此在定义粗糙集的时候，只需采用一种混合多粒度空间即可。本文中采用混合多粒度空间$\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})$来定义混合多粒度粗糙集。

定义 6 令$(U,\boldsymbol{R})$为一知识基，$\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})$为一个混合多粒度空间，对于$\forall X\subseteq U$，$X$ 在混合多粒度空间中的下近似集合$\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$与上近似集合$\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$分别定义为：

$$\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)=\{x\in U:\exists j\in\{1,\cdots,I\},\forall i\in\{1,\cdots,m_j\},[x]_{R_{ji}}\subseteq X\}\tag{13}$$

$$\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)=\sim\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\sim X)\tag{14}$$

定理 2 令$(U,\boldsymbol{R})$为一知识基，$\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})$为一个混合多粒度空间，则混合多粒度下近似$\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$与上近似$\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$具有如下性质：

1. $\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)\subseteq X\subseteq\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$；

2. $\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\emptyset)=\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\emptyset)=\emptyset$，
$\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(U)=\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(U)=U$；

3. $\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\sim X)=\sim\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$，
$\overline{\bigvee_{j=1}^{I}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{i})}(\sim X)=\sim\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$；

4. $X\subseteq Y\Rightarrow\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)\subseteq\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(Y)$，
$\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)\supseteq\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(Y)$；

5. $\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X))=\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$，
$\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X))=\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$；

6. $\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)=\bigcup_{j=1}^{J}(\bigcap_{i\in 1}^{m_j}\underline{R_{ji}}(X))$，
$\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)=\bigcap_{j=1}^{J}(\bigcup_{i=1}^{m_j}\overline{R_{ji}}(X))$。

证明：1. $\forall x\in\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$，根据定义 5，必定存在一个合取多粒度空间$\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji}$，其中$\forall i=1,2,\cdots,m_j$，都有$[x]_{R_{ji}}\subseteq X$。因为$[x]_{R_{ji}}$是包含 x 的等价类，所以 $x\subseteq X$，即$\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)\subseteq X$。类似地，易证$X\subseteq\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$。

2. $\forall x\notin\emptyset$，有 $x\in U$。对于任意的合取多粒度空间$\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji}$，且任意的 $i=1,2,\cdots,m_j$，因为$[x]_{R_{ji}}$是包含 x 的等价类，所以$[x]_{R_{ji}}\neq\emptyset$，从而得知$[x]_{R_{ji}}\not\subseteq\emptyset$，即$x\notin\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\emptyset)$。类似地，易证$\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\emptyset)=\emptyset$和$\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(U)=\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(U)=U$。

3. 根据定义 5，3 中的结论显然成立。

4. $\forall x\in\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$，根据定义 5，必定存在一个合取多粒度空间$\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji}$，其中 $i=1,2,\cdots,m_j$，都有$[x]_{R_{ji}}\subseteq X$。又因为 $X\subseteq Y$，所以$[x]_{R_{ji}}\subseteq Y$，即$x\in\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(Y)$。类似地，易证$\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)\supseteq\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(Y)$。

5. 根据 1 的结论可知$\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)\subseteq X$，又由 4 的结论可以得到$\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X))\subseteq\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$，只需证$\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X))\supseteq\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$即可。$\forall x\in\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$，根据定义 5，必定存在一个合取多粒度空间$\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_i$，其中$\forall i=1,2,\cdots,m_j$，都有$[x]_{R_{ji}}\subseteq X$。$\forall y\in[x]_{R_{ji}}$，有$[y]_{R_{ji}}\subseteq X$，所以$y\in\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$成立，从而可以推出$[x]_{R_{ji}}\subseteq\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$，即证得$\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X))\supseteq$

$\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$。类似地，易证 $\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X))=\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$。

6. $\forall x\in U$，有 $x\in\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$

$\Leftrightarrow\exists j\in\{1,\cdots,I\},\forall i\in\{1,\cdots,m_j\},[x]_{R_{ji}}\subseteq X$

$\Leftrightarrow\exists j\in\{1,\cdots,I\},x\in\bigcap_{i=1}^{m_j}\underline{R_{ji}}(X)$

$\Leftrightarrow x\in\bigcup_{j=1}^{J}(\bigcap_{i=1}^{m_j}\underline{R_{ji}}(X))$

类似地，易证 $\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)=\bigcap_{j=1}^{J}(\bigcup_{i=1}^{m_j}\overline{R_{ji}}(X))$。

定理 2 是混合多粒度粗糙集的一些基本性质。在定理 2 中，1 说明了混合多粒度下近似的收缩性与上近似的扩张性；2 说明了混合多粒度近似集合的正规性和余正规性；3 说明了混合多粒度近似集的对偶性；4 说明了混合多粒度近似集的单调性；5 说明了混合多粒度粗糙集的幂等性；6 说明了混合多粒度粗糙集与单粒度粗糙集之间的关系。

定理 3 令$(U,\boldsymbol{R})$为一知识基，$\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})$为一个混合多粒度空间，对于 $\forall X_1,X_2,\cdots,X_k\subseteq U$，有

1. $\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\bigcap_{l=1}^{k}X_l)=\bigcup_{j=1}^{J}(\bigcap_{i=1}^{m_j}(\bigcap_{l=1}^{k}\underline{R_{ji}}(X_l)))$；

2. $\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\bigcup_{l=1}^{k}X_l)=\bigcap_{j=1}^{J}(\bigcup_{i=1}^{m_j}(\bigcup_{l=1}^{k}\overline{R_{ji}}(X_l)))$；

3. $\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\bigcap_{l=1}^{k}X_l)\subseteq\bigcap_{l=1}^{k}(\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X_l))$；

4. $\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\bigcup_{l=1}^{k}X_l)\supseteq\bigcup_{l=1}^{k}(\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X_l))$；

5. $\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\bigcup_{l=1}^{k}X_l)\supseteq\bigcup_{l=1}^{k}(\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X_l))$；

6. $\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\bigcap_{l=1}^{k}X_l)\supseteq\bigcap_{l=1}^{k}(\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X_l))$。

证明：1. 对于 $\forall x\in U$，有

$x\in\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\bigcap_{l=1}^{k}X_l)$

$\Leftrightarrow\exists j\in\{1,\cdots,I\},\forall i\in\{1,\cdots,m_j\},[x]_{R_{ji}}\subseteq(\bigcap_{l=1}^{k}X_l$

$\Leftrightarrow\exists j\in\{1,\cdots,I\},\forall i\in\{1,\cdots,m_j\},\forall l\in\{1,\cdots,k\},[x]_{R_{ji}}\subseteq X_l$

$\Leftrightarrow\exists j\in\{1,\cdots,I\},\forall i\in\{1,\cdots,m_j\},\forall l\in\{1,\cdots,k\},x\in\underline{R_{ji}}(X_l)$

$\Leftrightarrow\exists j\in\{1,\cdots,I\},\forall i\in\{1,\cdots,m_j\},x\in\bigcap_{l=1}^{k}\underline{R_{ji}}(X_l)$

$\Leftrightarrow\exists j\in\{1,\cdots,I\},x\in\bigcap_{i=1}^{m_j}(\bigcap_{l=1}^{k}\underline{R_{ji}}(X_l))$

$\Leftrightarrow x\in\bigcup_{j=1}^{J}(\bigcap_{i=1}^{m_j}(\bigcap_{l=1}^{k}\underline{R_{ji}}(X_l)))$

2. 2 的证明过程与 1 类似。

3. 对于 $\forall x\in U$，有

$x\in\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\bigcap_{l=1}^{k}X_l)$

$\Rightarrow\exists j\in\{1,\cdots,I\},\forall i\in\{1,\cdots,m_j\},[x]_{R_{ji}}\subseteq(\bigcap_{l=1}^{k}X_l)$

$\Rightarrow\exists j\in\{1,\cdots,I\},\forall i\in\{1,\cdots,m_j\},\forall l\in\{1,\cdots,k\},[x]_{R_{ji}}\subseteq X_l$

$\Rightarrow\forall l\in\{1,\cdots,k\},x\in\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X_l)$

$\Rightarrow x\in\bigcap_{l=1}^{k}(\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X_l))$

4. 4 的证明过程与 3 类似。

5. 对于 $\forall x\in U$，有

$x\in\bigcup_{l=1}^{k}(\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X_l))$

$\Rightarrow\exists l\in\{1,\cdots,k\},x\in\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X_l)$

$\Rightarrow\exists l\in\{1,\cdots,k\},\exists j\in\{1,\cdots,I\},\forall i\in\{1,\cdots,m_j\},[x]_{R_{ji}}\subseteq X_l$

$\Rightarrow\exists j\in\{1,\cdots,I\},\forall i\in\{1,\cdots,m_j\},[x]_{R_{ji}}\subseteq(\bigcup_{l=1}^{k}X_l)$

$\Rightarrow x\in\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(\bigcup_{l=1}^{k}X_l)$

6. 6 的证明过程与 5 类似。

定理 3 说明了混合多粒度粗糙集在对多个目标概念进行近似逼近时的一些基本性质，同时也揭示了混合多粒度粗糙集对多个目标概念与对单个目标概念进行近似逼近的联系与区别。

定义 7 令$(U,\boldsymbol{R})$为一知识基，$\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})$为一个混合多粒度空间，对于 $\forall X\subseteq U$，混合多粒度粗糙隶属度函数的定义如下：

$$\mu_X^{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(x)=\max\{\mu_X^{\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji}}(x):j=1,2,\cdots,J\}\tag{15}$$

定理 4 令$(U,\boldsymbol{R})$为一知识基，$\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})$为一个混合多粒度空间，$\forall X\subseteq U$，有

$$\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)=\{x\in U:\mu_X^{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(x)=1\}\tag{16}$$

$$\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)=\{x\in U:0<\mu_X^{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(x)\leqslant 1\}\tag{17}$$

证明：仅证式(16)，而式(17)的证明类似可得。

$x\in\underline{\mu_X^{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(x)}(X)$

$\Leftrightarrow\exists j\in\{1,\cdots,j\},\forall i\in\{1,\cdots,m_j\},[x]_{R_{ji}}\subseteq X$

$\Leftrightarrow\exists j\in\{1,\cdots,I\},\forall i\in\{1,\cdots,m_j\},\mu_X^{R_{ji}}(x)=1$

$\Leftrightarrow\exists j\in\{1,\cdots,I\},\mu_X^{\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji}}(x)=1$

$\Leftrightarrow\mu_X^{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(x)=1$

定理 4 揭示了混合多粒度粗糙集与混合多粒度粗糙隶属度函数之间的关系。

定理 5 令$(U,\boldsymbol{R})$为一知识基，$\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})$为一个混合多粒度空间，$\forall X\subseteq U$，

1. 若 $J=1$，则 $\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)=\underline{\bigwedge_{i=1}^{m_1}R_{1i}}(X)$，$\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)=\overline{\bigwedge_{i=1}^{m_1}R_{1i}}(X)$；

2. 若 $\forall j,m_j=1$，则 $\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)=\underline{\bigvee_{j=1}^{I}R_{j1}}(X)$，$\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)=\overline{\bigvee_{j=1}^{I}R_{j1}}(X)$。

证明：1. 若 $I=1$，则

$\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$

$=\{x\in U: \exists j\in\{1,\cdots,I\}, \forall i\in\{1,\cdots,m_j\}, [x]_{R_{ji}}\subseteq X\}=\{x\in U: \forall i\in\{1,\cdots,m_1\}, [x]_{R_{1i}}\subseteq X\}$

$=\underline{\bigwedge_{i=1}^{m_1} R_{1i}}(X)$

类似地，易证 $\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j} R_{ji})}(X)=\overline{\bigwedge_{i=1}^{m_1}R_{1i}}(X)$。

2. 对于 $\forall j, m_j=1$，则

$\underline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)$

$=\{x\in U: \exists j\in\{1,\cdots,I\}, \forall i\in\{1,\cdots,m_j\}, [x]_{R_{ji}}\subseteq X\}=\{x\in U: \exists j\in\{1,\cdots,I\}, [x]_{R_{j1}}\subseteq X\}$

$=\underline{\bigvee_{j=1}^{I}R_{j1}}(X)$

类似地，易证 $\overline{\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{m_j} R_{ji})}(X)=\overline{\bigvee_{j=1}^{I}R_{j1}}(X)$。

定理 5 说明当满足一些特定条件时，混合多粒度粗糙集就可退化为乐观或悲观多粒度粗糙集，也就是说，混合多粒度粗糙集是钱宇华等人提出的多粒度粗糙集的广义化表现形式。

例 1　设论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_8\}$，$\bigwedge_{i=1}^{2}R_{1i}$，$\bigwedge_{i=1}^{1}R_{2i}$ 为两个合取多粒度空间，其中

$U/R_{11}=\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_4,x_5,x_6\},\{x_7,x_8\}\}$

$U/R_{12}=\{\{x_1,x_4,x_5\},\{x_2,x_3\},\{x_6,x_7,x_8\}\}$

$U/R_{21}=\{\{x_1,x_2,x_3,x_7,x_8\},\{x_4,x_5,x_6\}\}$

若令 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，则根据定义 6 有 $\underline{\bigvee_{j=1}^{2}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)=\{x_1,x_2,x_3\}$，$\overline{\bigvee_{j=1}^{2}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}R_{ji})}(X)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$。

例 2　考虑如表 1 所列的一个决策系统，其中 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ 为论域，$AT=\{a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}\}$ 为条件属性集合，d 为决策属性。根据决策属性可以得到论域上的划分，形如：$U/IND(\{d\})=\{X_1,X_2\}=\{\{x_1,x_5,x_6\},\{x_2,x_3,x_4\}\}$。

表 1　一个决策系统

U	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	d
x_1	1	0	0	0	1
x_2	0	1	1	1	2
x_3	0	1	0	0	2
x_4	0	1	1	0	2
x_5	0	1	0	0	1
x_6	0	1	0	0	1

设 $\bigwedge_{i=1}^{2}IND(\{a_{1i}\})$，$\bigwedge_{i=1}^{2}IND(\{a_{2i}\})$ 为两个合取多粒度空间，此处 $IND(\{a_i\})$ 表示根据属性 a_i 所得到论域上的等价关系。根据定义 6 可以得到决策类的混合多粒度下、上近似集：

$\underline{\bigvee_{j=1}^{2}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}IND(\{a_{ji}\}))}(X_1)=\{x_1\}$

$\underline{\bigvee_{j=1}^{2}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}IND(\{a_{ji}\}))}(X_2)=\{x_2\}$

$\overline{\bigvee_{j=1}^{2}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}IND(\{a_{ji}\}))}(X_1)=\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

$\overline{\bigvee_{j=1}^{2}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}IND(\{a_{ji}\}))}(X_2)=\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

根据近似集的计算结果，可以发现有

$\underline{\bigvee_{j=1}^{2}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}IND(\{a_{ji}\}))}(X_1)=\sim\overline{\bigvee_{j=1}^{2}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}IND(\{a_{ji}\}))}(X_2)$

$\underline{\bigvee_{j=1}^{2}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}IND(\{a_{ji}\}))}(X_2)=\sim\overline{\bigvee_{j=1}^{2}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}IND(\{a_{ji}\}))}(X_1)$

$\overline{\bigvee_{j=1}^{2}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}IND(\{a_{ji}\}))}(X_1)=\sim\underline{\bigvee_{j=1}^{2}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}IND(\{a_{ji}\}))}(X_2)$

$\overline{\bigvee_{j=1}^{2}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}IND(\{a_{ji}\}))}(X_2)=\sim\underline{\bigvee_{j=1}^{2}(\bigwedge_{i=1}^{m_j}IND(\{a_{ji}\}))}(X_1)$

这也恰好验证了定理 2 中的第 3 个结论，即混合多粒度粗糙近似集的对偶性。

结束语　多粒度是近年来新兴的一种粗糙数据处理模式。钱宇华等人提出的多粒度粗糙集包括乐观和悲观两种不同的形式，分别对应于析取多粒度和合取多粒度空间。为了考虑多粒度空间中同时具有析取和合取关系，提出了混合多粒度空间的概念，并在此基础上，提出了混合多粒度粗糙集模型，对新提出模型的性质及其与钱宇华等人的多粒度粗糙集之间的关系进行了探讨。在本文工作的基础上，笔者下一步的研究工作是对基于混合多粒度粗糙集的知识发现方法进行研究。

参考文献

[1] Zadeh L A. Towards a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 19(1): 111-127

[2] Lin T Y. Granular computing on binary relations I: data mining and neighborhood systems[C]// Rough Sets and Knowledge Discovery. 1998: 107-121

[3] Lin T Y. Granular computing on binary relations II: rough set representations and belief functions[C]// Rough Sets and Knowledge Discovery. 1998: 122-140

[4] Lin T Y. Updata and illustration on granular computing: practices, theories, and future directions[C]// IEEE International Conference on Granular Computing. 2010

[5] Pawlak Z. Rough sets-theoretical aspects of reasoning about data [M]. Kluwer Academic Publishers, 1991

[6] 张铃，张钹. 模糊商空间理论(模糊粒度计算方法)[J]. 软件学报，2003，14(4)：770-776

[7] 苗夺谦，李德毅，姚一豫，等. 不确定性与粒计算[M]. 北京：科学出版社，2011

[8] Wu W Z, Leung Y. Theory and applications of granular labelled partitions in multi-scale decision tables[J]. Information Sciences, 2011, 181: 3878-3897

[9] 胡军，王国胤. 覆盖粒度空间的层次模型[J]. 南京大学学报：自然科学版，2008，44(5)：551-558

[10] 钱宇华. 复杂数据的粒化机理与数据建模[D]. 太原：山西大学计算与信息技术学院，2011

[11] 王国胤，张清华. 不同知识粒度下粗糙集的不确定性研究[J]. 计算机学报，2008，31(9)：1588-1598

[12] Qian Y H, Liang J Y, Yao Y Y, et al. MGRS: a multi-granulation rough set[J]. Information Sciences, 2010, 180: 949-970

[13] Qian Y H, Liang J Y, Dang C Y. Incomplete multigranulation rough set[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A, 2010, 20: 420-431

[14] Qian Y H, Liang J Y, Wei W. Pessimistic rough decision[C]// Second International Workshop on Rough Sets Theory. 2010: 440-449

[15] Liu X D, Pedrycz W, Chai T Y, et al. The development of fuzzy rough sets with the use of structures and algebras of axiomatic fuzzy sets[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2009, 21(3): 443-462