

基于交通流量的病毒动力学研究

杨光¹ 王开² 裴文江² 蔚承建¹ 仇慎伟¹ 张毅锋²

(南京工业大学电子与信息工程学院 南京 210009)¹ (东南大学信息科学与工程学院 南京 210096)²

摘要 不同于经典扩散模型中节点传染力等同于节点度 k 的假定,基于交通流量的病毒扩散模型中,各个节点的传染力可以等同于节点实际介数 b_k 。利用平均场近似方法,提出了基于交通流量的 SIS 病毒修正扩散模型。根据此 SIS 模型,以最小搜索信息路由为例,重新研究在节点处理能力有限或无限情况下,病毒传播率 β 、平均发包率 λ 与传播阈值 β_c 、平稳状态病毒密度 ρ 之间的关系。

关键词 复杂网络,病毒扩散,SIS 模型,实际介数

中图法分类号 TN915.08 **文献标识码** A

Epidemic Dynamics with Traffic Flow on Scale-free Networks

YANG Guang¹ WANG Kai² PEI Wen-jiang² WEI Cheng-jian¹ QIU Shen-wei¹ ZHANG Yi-feng²

(College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Technology, Nanjing 210009, China)¹

(School of Information Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)²

Abstract Different from the classical epidemic models, the infectivity of a node is decided by its actual betweenness b_k in the epidemic model based on traffic-flow other than degree k . Utilizing the mean-field theory, we proposed a modified SIS epidemic model based on traffic-flow. With this model, taking MIP route as an example, we re-studied the relationship between the spreading probability β , the traffic generation rate λ and the epidemic threshold β_c , the stationary density of infected nodes ρ considering the scenarios in which the delivery capability of the nodes is bounded or unbounded.

Keywords Complex networks, Epidemic spreading, Susceptible-infected-susceptible model, Actual betweenness

1 引言

作为复杂系统与复杂性科学研究的重要分支,复杂网络的研究目标在于揭示蕴涵于现实网络实体关系中的普遍规律并探索其在科学技术领域中的应用^[1]。利用平均场近似方法,通过建立 SI 模型、SIS 模型以及 SIR 等各类经典病毒传播模型^[2-4],人们详细分析了病毒在均匀网络或无标度网络下的传播动力学特性^[5,6],并在此基础上,相继提出了包括随机免疫、目标免疫以及熟人免疫在内的各种针对各种传播特性的网络免疫策略^[7]。

在 Internet 网中,若将各个路由器泛化为复杂网络中的各个节点,可以发现病毒通过路由器间的数据交换而传播。若两路由器间没有数据交换,那么即使二者之间存在直接相连的链路,病毒也不会相互传播。因此在上述病毒传播过程中,网络节点的传染力与节点度 k 间并不存在直接关系,而仅与节点间传输的数据有关。2009 年,Meloni 等利用算术介数描述节点间的交通流量,提出一种新的 SIS 模型,并以此研究无标度网络上基于交通流量的病毒传播特性^[8]。不同于经典扩散模型中节点传染力等同于节点度 k 的假定,文献^[8]认为节点的传染力由穿过各节点的具体交通流量决定。通过研究

节点间交通数据的流量而非单纯的节点度对病毒扩散带来的影响,文献^[8]无疑为进一步研究具体交通流量下病毒扩散的动力提供了很好的启发。在此研究基础上,文献^[9]建立了基于交通流量的 SI 病毒传播模型,并给出了研究无标度网络上考虑交通流量的病毒免疫策略。

然而需要指出的是,文献^[8,9]认为健康节点的传染概率正比于网络中数据包的总数 λN (其中 λ 为每一时间步各节点生成数据包的平均速率, N 为网络节点总数)以及具体节点的算法介数 b_{alg} ,并认为算法介数 b_{alg} 等同于路由策略一定时穿过各节点传输数据包的总和。但事实上,研究表明当拓补网络以及路由策略一定时,各节点的实际介数 b_k 等比于平均发包率 λ ,即 $b_k^{-n} = n b_k^{-1}$,而网络中数据包总数为 $\lambda N L$,其中 L 为平均路径长度。若按照文献^[8,9]中同时使用 λ 、 N 以及 b_{alg} 来度量传染概率,则会重复计算 λ 和 N 影响,从而无法定量地计算病毒实际的扩散过程。

本文利用平均场近似方法,建立修正后的 SIS 模型,研究基于交通流量的病毒扩散动力学行为。我们发现由于各个节点的介数随平均发包率 λ 增加而等比增大,因此此种条件下各个节点的传染力可以等同于节点实际介数 b_k 。进而利用平均场近似方法,提出基于交通流量 SIS 病毒扩散修正模型。

到稿日期:2012-01-09 返修日期:2012-04-23 本文受国家自然科学基金(60972165,61105048,60901012),教育部博士点基金(20100092120012,20090092120012),江苏省自然科学基金(BK2011060,BK2010240),江苏省远程测控重点实验室开放基金(YCCK201005)资助。

杨光(1987-),男,硕士生,主要研究方向为复杂网络、博弈论,E-mail:170552414@qq.com;王开(1980-),男,博士,讲师,主要研究方向为复杂网络、非线性动力学,E-mail:kaiwang@seu.edu.cn(通信作者)。

进一步,利用 SIS 模型动力学方程,以最小搜索信息路由(MIP 路由)为例,分别在节点处理能力有限或无限两种情况下,研究病毒传播率 β 、平均发包率 λ 与传播阈值 β_c 、平稳状态病毒密度 ρ 之间的关系。

本文第 2 节回顾文献[8]提出的 SIS 模型;第 3 节证明由于各个节点的介数随平均发包率 λ 增加而等比增大,因此此种条件下各个节点的传染力可以等同于节点实际介数,平均发包率 λ 和网络节点总数 N 不再直接作用于 SIS 模型的动力学方程,而仅是通过各节点介数来发挥作用;第 4 节以最小搜索信息路由为例,分别在节点处理能力有限或无限情况下,重新研究病毒传播率 β 、平均发包率 λ 与传播阈值 β_c 、平稳状态病毒密度 ρ 之间的关系;最后进行总结。

2 基于交通流量的 SIS 修正模型^[8]

考虑易染状态-感染状态-易染状态(SIS)模型。文献[8]依照是否染毒将网络节点分为两类:健康节点(处于易染状态)和感染节点(处于感染状态)。由感染节点发出的数据包为染毒数据包,一旦健康节点收到染毒数据包,则以 β 的概率染毒。定义相对密度 $\rho_k(t)$ 为所有度为 k 的节点的被感染密度,那么利用平均场近似方法,此时动力学方程为^[8]:

$$\partial_t \rho_k(t) = -\mu \rho_k(t) + \beta \lambda b_{alg}^k N [1 - \rho_k(t)] \Theta(t) \quad (1)$$

式中, b_{alg}^k 为算法介数并用来定义交通流量; μ 表示为感染节点的恢复概率,一般定义为 $\mu=1$; β 、 λ 和 N 分别表示病毒传播率、平均发包率以及网络节点总数; $\Theta(t)$ 表示由感染节点发出的数据包在所有在网络中传输的数据包中所占的比例,记为:

$$\Theta(t) = \frac{\sum_k b_{alg}^k P(k) \rho_k(t)}{\sum_k b_{alg}^k P(k)} \quad (2)$$

当网络拓扑以及路由策略一定时,定义任一时间步中,穿过节点传输数据包的总和为此时此节点的实际介数 $b(i)$,其中 $i=1,2,\dots,N$ 为节点的标号。同样,记实际介数 b_k 为所有度为 k 节点实际介数的平均值。令路由策略的平均路径为 L ,当网络各节点稳定发包时,可知网络中传输的数据包总数为 λNL ,即 $\sum_k b_k N_k = \lambda NL$,其中 N_k 为所有度为 k 节点的总数,显然 $\sum_k N_k = N$ 。当假定 b_k^{-1} 和 b_k^{-n} 分别为发包率为1和 n 时度为 k 节点的实际介数,可得等式 $\sum_k b_k^{-1} N_k = NL$ 和 $\sum_k b_k^{-n} N_k = nNL$ 。由于 N_k 一定,可得 $b_k^{-n} = n b_k^{-1}$,即节点的实际介数 b_k 正比于发包率 λ 。

为了方便比较分析,我们采用 BA 无标度网络模型作为研究网络模型。研究表明 BA 网络的网络结构遵循着节点度呈幂率分布的无标度性,即 $P(k) = k^{-\gamma}$,其中 k 为节点度^[10]。在每个时间步,网络中任何一个节点生成的数据包都随机选择目的节点进行发送,数据包传输路径的选取则采用最小搜索信息路由(MIP routing)算法实现^[11,12]。如文献[11,12]所述,MIP 路由策略下 $b_k \sim k$,即实际介数 b_k 与度 k 呈线性关系。表 1 给出 MIP 路由机制下,不同发包率 λ 时度 $k=4,5,6$ 节点的实际介数 b_k 和实际介数的均值 $\langle b_\lambda \rangle$ 。

表 1 不同发包率下不同度 k 节点的实际介数 b_k 和实际介数的均值 $\langle b_\lambda \rangle$

	b_k^{-1}	b_k^{-2}	b_k^{-3}	b_k^{-4}
$k=4$	2.41	4.86	7.36	9.61
$k=5$	2.79	5.55	8.51	11.12
$k=6$	3.15	6.33	9.56	12.46
$\langle b_\lambda \rangle$	3.570	7.145	10.81	13.45

可以看出节点的实际介数和其均值随着发包率增加而等比增加,其中 BA 网络节点总数 $N=2000$, $m=4$ 。

文献[8,9]中使用算法介数 b_{alg}^k 定义交通流量,并认为算法介数 b_{alg}^k 等同于路由策略一定时穿过各节点传输数据包的总和,即 $b_{alg}^k = b_k^{[9]}$ 。由于实际介数 b_k 正比于发包率 k ,而 $\sum_k b_k N_k = \lambda NL$ 且 $b_k^{-n} = n b_k^{-1}$,因此考虑式(1)可得:

$$\partial_t \rho_k(t) = -\mu \rho_k(t) + \beta \lambda^2 b_k^{-1} N [1 - \rho_k(t)] \Theta(t) \quad (3)$$

根据式(3)可以看出式(1)重复计算 λ 和 N 影响,从而无法定量地计算病毒实际的扩散过程。

由于各个节点的实际介数 b_k 随着平均发包率 $k=4$ 增加而等比增大,因此此种条件下各个节点的传染力可以等同于节点实际介数 b_k 。据此,我们提出基于交通流量的 SIS 修正模型,其动力学方程为:

$$\partial_t \rho_k(t) = -\rho_k(t) + \beta b_k [1 - \rho_k(t)] \Theta(t) \quad (4)$$

其中

$$\Theta(t) = \frac{\sum_k b_k P(k) \rho_k(t)}{\sum_k b_k P(k)} \quad (5)$$

3 基于交通流量的病毒扩散动力学特征分析

3.1 传播阈值

考虑稳定状态 $\partial_t \rho_k(t) = 0$,则根据式(4)得:

$$\rho_k = \frac{\beta b_k \Theta(t)}{1 + \beta b_k \Theta(t)} \quad (6)$$

假定此时网络为不同节点度不相关的无标度网络,则可以解出 $\Theta(t)$ 为:

$$\Theta = \frac{1}{\sum_k b_k P(k)} \sum_k \frac{(b_k)^2 P(k) \beta \Theta}{1 + \beta b_k \Theta(t)} \quad (7)$$

式(7)存在平凡解 $\Theta=0$ 。若式(4)同时存在非平凡解 $\Theta \neq 0$,则需要满足如下条件:

$$\frac{1}{\sum_k b_k P(k)} \frac{d}{d\Theta} \left(\sum_k \frac{(b_k)^2 P(k) \rho_k(t) \beta \Theta}{1 + \beta b_k \Theta(t)} \right) \Big|_{\Theta=0} > 1 \quad (8)$$

即可得传播阈值:

$$\beta_c = \frac{\langle b \rangle}{\langle b^2 \rangle} \quad (9)$$

式中, $\langle b \rangle$ 和 $\langle b^2 \rangle$ 分别表示实际介数的均值和实际介数平方的均值。由于实际介数 b_k 随平均发包率 λ 增加而等比增大,当节点平均发包率 λ 一定时,此时节点实际介数 $b_k = \lambda b_k^0$,其中 b_k^0 表示 $\lambda=1$ 时的实际介数。那么可得 $\langle b \rangle = \lambda \langle b_{\lambda=1} \rangle$, $\langle b^2 \rangle = \lambda^2 \langle b_{\lambda=1}^2 \rangle$ 。则式(9)可以改写为:

$$\beta_c = \frac{1}{\lambda} \frac{\langle b_{\lambda=1} \rangle}{\langle b_{\lambda=1}^2 \rangle} \quad (10)$$

当网络拓扑和路由策略一定时, $\langle b_{\lambda=1} \rangle / \langle b_{\lambda=1}^2 \rangle$ 可以记为常数 β_c^{-1} ,其中 β_c^{-1} 为 $\lambda=1$ 时的传播阈值,如式(10)所示。可以看出,传播阈值反比于平均发包率 λ ,是 $\lambda=1$ 时的传播阈值 β_c^{-1} 的 $1/\lambda$ 。

考虑 $N=2000$ BA 网络,每一时刻各节点以 λ 速率平均发

包,数据包的目的地和初始地址随机选择。当平均发包率 λ 为 1 时,统计求得 $\beta^{\lambda-1} \approx 0.154$, $\langle b_{\lambda-1} \rangle / \langle b_{\lambda-1}^2 \rangle \approx 0.101$ 。平均发包率 λ 与传播阈值 β_c 和 $\langle b \rangle / \langle b^2 \rangle$ 的对应关系如表 2 所列。可以看出 $\beta_c \approx \langle b \rangle / \langle b^2 \rangle$, 传播阈值 β_c 反比于平均发包率 λ , 且是 $\lambda=1$ 时的传播阈值的 $1/\lambda$ 。不同发包率 λ 和传播阈值 β_c 之间的关系如图 1 所示,可以看出 β_c 与 λ 的乘积为一常数,计算可知其为 $\langle b_{\lambda-1} \rangle / \langle b_{\lambda-1}^2 \rangle$ 。

	$\lambda=1$	$\lambda=2$	$\lambda=3$	$\lambda=4$	$\lambda=5$
β_c	0.154	0.076	0.051	0.038	0.031
$\langle b \rangle / \langle b^2 \rangle$	0.101	0.056	0.045	0.030	0.028

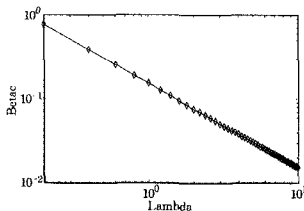


图 1 不同发包率 λ 和传播阈值 β_c 之间的关系

3.2 感染密度

进一步,考虑当稳定状态 $\partial_t \rho_k(t) = 0$ 时,感染密度 ρ 与病毒传播率 β 、平均发包率 λ 以及节点实际介数 b_k 的关系。

当 $\partial_t \rho_k(t) = 0$ 时,根据式(4)可得:

$$\rho_k = \frac{b_k \beta \Theta(t)}{1 + b_k \beta \Theta(t)} \quad (11)$$

将式(11)代入式(7)可得:

$$\Theta(t) = \frac{\sum_k b_k P(k) \frac{b_k \beta \Theta(t)}{1 + b_k \beta \Theta(t)}}{\sum_k b_k P(k)} \quad (12)$$

我们使用 BA 网络作为试验网络,则可知度 k 分布为: $P(k) = 2m^2 k^{-3}$ 。在使用 MIP 路由情况下,实际介数 b_k 同节点度 k 呈线性关系,记为 $b_k = ck$,其中参数 c 为拟合系数。可知: $\langle b \rangle = \int_m^\infty ck 2m^2 k^{-3} dk = 2mc$ 。改写式(12)可得:

$$\Theta = \frac{\sum_k c^2 k^2 2m^2 k^{-3} \frac{\beta \Theta}{1 + ck \beta \Theta}}{\sum_k ck 2m^2 k^{-3}} \approx \frac{\int_m^\infty c^2 k^2 2m^2 k^{-3} \frac{\beta \Theta}{1 + ck \beta \Theta} dk}{\int_m^\infty ck 2m^2 k^{-3} dk} \quad (13)$$

$$= mc \beta \Theta \ln \left(1 + \frac{1}{mc \beta \Theta} \right)$$

求得:

$$\Theta = \frac{1}{mc \beta (e^{\frac{1}{mc \beta \Theta}} - 1)} \quad (14)$$

对于感染密度 ρ ,可知: $\rho = \sum_k P(k) \rho_k$,代入式(11)和式(14)可得:

$$\rho = \sum_k P(k) \rho_k = \int_m^\infty 2m^2 k^{-3} \frac{\beta k \Theta}{1 + \beta k \Theta} dk$$

$$= \frac{2}{e^{\frac{1}{mc \beta \Theta}} - 1} \left(1 - \frac{1}{mc \beta (e^{\frac{1}{mc \beta \Theta}} - 1)} \right) \approx 2e^{-\frac{1}{mc \beta \Theta}} = 2e^{-\frac{2}{\beta \langle b \rangle}} \quad (15)$$

如上节所述,节点实际介数 b_k 随平均发包率 λ 等比增长,则存在 $\langle b_{\lambda-n} \rangle = n \langle b_{\lambda-1} \rangle$,即平均发包率 $\lambda = n$ 时实际介数的均值 $\langle b_{\lambda-n} \rangle$ 为平均发包率 $\lambda = 1$ 时实际介数的均值 $\langle b_{\lambda-1} \rangle$ 的 n 倍。代入式(15)可得:

$$\rho = 2e^{-\frac{2}{\beta \langle b_{\lambda-1} \rangle}} \quad (16)$$

即稳定状态时感染密度 ρ 与病毒传播率 β 、平均发包率 λ 以及

$\lambda=1$ 时节点实际介数的均值 $\langle b_{\lambda-1} \rangle$ 的乘积倒数存在幂率关系。

选择 $N=1000$ BA 网络,在 MIP 路由机制下,根据不同的平均发包率 λ ,病毒传播率 β 与感染密度 ρ 之间的关系如图 2 所示。可以看出,感染密度 ρ 与病毒传播率 β 呈幂率关系。

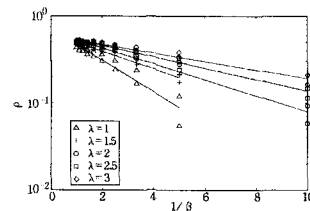


图 2 在 MIP 路由机制下,不同平均发包率 λ 下,病毒传播率 β 同感染密度之间的关系

4 节点处理能力受限下扩散动力学行为

在上面的分析中,我们默认节点处理能力无限,即对于任意时刻任意 i 节点的实际负载 b_i ,节点 i 可以即时处理,而整体网络不会出现拥塞。但在现实网络中,各个节点的处理能力 c_i 有限,当节点负载 b_i 大于节点处理能力 λ 时,节点就会出现阻塞或者故障。这里假定节点处理能力有限,即在每一个时间步中,节点只能处理最先收到的最大不超过 c_i 个数据包,若节点负载 b_i 大于节点处理能力 c_i ,则会发生节点阻塞。

节点的处理能力一般可分为两类:与节点度 k 相关或与节点度 k 无关,前者一般适用于 MIP 路由或 SP 路由(最短路径路由),而后者主要适用于 ER 路由(有效路由)或 MIP 路由的泛化形式。这里主要考虑两种节点处理与度相比形式,分别为线性相关: $c_i = 1 + \eta k_i$ 和指数相关: $c_i = 1 + k_i^\eta$,其中 η 为控制参数。图 3(a)、(b)分别给出了节点处理能力受限情况下,传播阈值与平均发包率 λ 的情况。如图 3(a)所示,此时节点处理能力 $c_i = 1 + k_i^\eta$ 。可以看出在控制参数 $\eta = 1.7$ 情况下,当平均发包率 λ 从 0 增大至 7 时,节点负载 b_i 没有超过节点处理能力 c_i 的最大处理范围,网络仍然处于正常交通状况,因此交通阈值 β 与平均发包率 λ 的关系仍满足式(10),即交通阈值 β 与平均发包率 λ 存在线性关系。而在控制参数 $\eta = 0.8$ 的情况下,当平均发包率 λ 增加至 0.13 左右时,节点的实际负载超出了节点的实际处理能力,该节点发生拥塞,该节点处理数据包的能力为 c_i ,此时 β 与平均发包率 λ 不再存在线性关系。相反,随着平均发包率的增大,网络中每一个节点都处于拥塞状态,此时网络整体处理数据包能力不变,为 $\sum_{i=1}^N c_i$,其中各个节点发送的数据包数为 c_i 。根据式(4)可知,在感染率 β 不变的情况下,基于交通流量的病毒扩散动力学行为受控于各个节点的实际介数(即负载)。因此当平均发包率 λ 充分大并使得各个节点均处于阻塞状态时,各个节点的负载均不变,为 c_i ,此时阈值 β 并不随平均发包率的变化而变化,而是稳定在一个只与 c_i 有关的稳定值上。并且由于处于负载状态时,节点实际处理的数据数为 c_i ,小于实际负载 b_i ,因此在平均发包率 λ 不变的情况下,阻塞状态时阈值要大于非阻塞状态下的理想阈值。具体如图 3(a)所示,在控制参数 $\eta = 0.8$ 的情况下,当平均发包率 λ 小于 0.13 时,网络各个节点均处于非阻塞状态,交通阈值 β 于平均发包率 λ 的关系仍满足式(10),即交通阈值 β 与平均发包率 λ 存在线性关系;当平均发包率 λ 大于 0.13 时,网络中节点开始出现阻塞,

由于处于负载状态,节点实际处理的数据数为 c_i , 小于实际负载 b_i , 因此在平均发包率 λ 不变情况下, 阻塞状态时阈值要大于非阻塞状态下的理想阈值; 当平均发包率足够大, 使得网络中各个节点均处于阻塞状态时, 由于各个节点的负载均不变, 为 c_i , 因此阈值 β 并不随平均发包率的变化而变化, 而稳定在一个只与 c_i 有关的稳定值上。图 3(b) 给出了节点处理能力 $c_i = 1 + \eta k_i$ 时, 交通阈值同平均发包率的关系, 可以得出上述相似的结论。

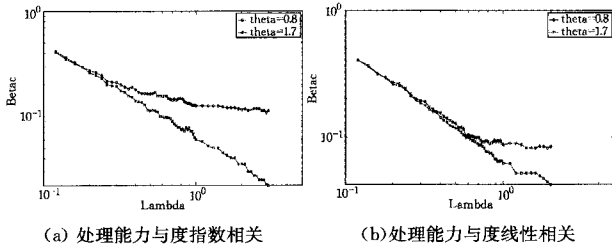


图 3 节点处理能力受限情况下传播阈值与平均发包率 λ 的情况

图 4 则分别给出了处理能力分别为线性相关: $c_i = 1 + \eta k_i$ 和指数相关: $c_i = 1 + k_i^\eta$ 时, 平均发包率和感染面积 ρ 之间的关系。可以看出, 当平均发包率较小时, 网络处于非阻塞状态, 感染面积 ρ 与平均发包率 λ 之间的关系满足式(16)所示的幂率关系; 随着平均发包率的增大, 网络中各个节点逐渐进入阻塞状态, 感染面积 ρ 随着平均发包率 λ 的变化慢慢趋向平缓, 且处理能力 c_i 越大, 感染面积 ρ 越大; 当平均发包率足够大使得网络中各个节点均处于阻塞状态时, 由于各个节点的负载均不变, 为 c_i , 因此感染面积 ρ 并不随平均发包率的变化而变化, 而稳定在一个只与 c_i 有关的稳定值上, 且处理能力 c_i 越大, 感染面积 ρ 越大。

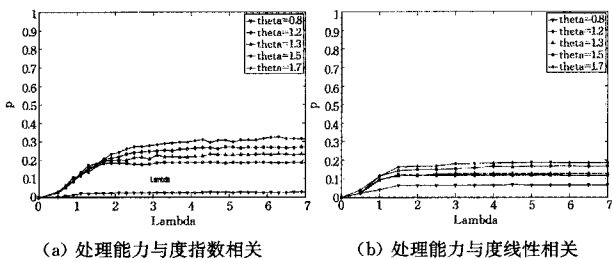


图 4 节点处理能力受限情况下感染面积与平均发包率 λ 的情况

结束语 通常, 复杂网络传播动力研究基于如下假设: 在每一个时间步, 感染节点的病毒将等概率地影响它所有的邻居节点, 即每一个节点的传染力 (infectivity) 都等同于节点度 k 。然而, 对于现实网络, 上述假设并不总是成立。2009 年, Meloni 等利用算术介数描述节点间的交通流量, 提出一种新的 SIS 模型, 并以此研究该模型在无标度网络上的传播特性^[8]。不同于之前扩散模型中节点传染力等同于节点度 k 的假定, 文献[8]认为节点的传染力由穿过各节点的具体交通流量决定。通过研究节点间交通数据流量而非单纯的节点度对病毒扩散带来的影响, 文献[8]无疑为进一步研究具体交通流量下的病毒扩散动力提供了很好的启发。

然而, 由于实际介数 b_k 正比于发包率 λ , 因此文献[8,9]所给出的 SIS 模型重复计算了平均发包率 λ 和网络节点总数 N 的影响, 从而无法定量地计算病毒实际的扩散过程。我们发现, 由于各个节点的介数随平均发包率 λ 增加而等比增大,

因此此种条件下各个节点的传染力可以等同于节点实际介数 b_k 。进而利用平均场近似方法, 提出基于交通流量 SIS 病毒修正扩散模型。不同于文献[8]提出的 SIS 模型, 平均发包率 λ 和网络节点总数 N 不再直接作用于 SIS 模型的动力学方程, 而仅是通过各节点实际介数 b_k 来发挥作用。

根据修正 SIS 模型, 利用平均场近似方法, 以最小搜索信息路由为例, 重新研究节点处理能力有限或无限情况下, 病毒传播率 β 、平均发包率 λ 与传播阈值 β_c 、平稳状态病毒密度 ρ 之间的关系。理论分析与实验结果均表明, 当网络拓扑和路由策略一定时, 在节点处理无限情况下, 传播阈值 β 为实际介数 b_k 的均值 $\langle b_k \rangle$ 与其平方的均值 $\langle b_k^2 \rangle$ 的比值: $\beta = \langle b_k \rangle / \langle b_k^2 \rangle$; 稳定状态时, 感染密度 ρ 与病毒传播率 β 、平均发包率 λ 以及 $\lambda = 1$ 时节点实际介数的均值 $\langle b_{\lambda=1} \rangle$ 的乘积倒数存在幂率关系 $\rho = 2e^{-2/\beta\lambda\langle b_{\lambda=1} \rangle}$ 。而在节点处理能力有限情况下, 当平均发包率较小时, 网络处于非阻塞状态, 病毒扩散动力学行为与节点处理能力无限时相同。随着平均发包率的增大, 网络中各个节点逐渐进入阻塞状态, 当平均发包率足够大, 使得网络中各个节点均处于阻塞状态时, 由于各个节点的负载均不变, 为 c_i , 因此病毒动力学行为并不随平均发包率的变化而变化, 而稳定在一个只与 c_i 有关的稳定值上。

参考文献

- [1] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of small-world networks [J]. Nature, 1998, 393(6684): 440-442
- [2] Shi H J, Duan Z S, Chen G R, et al. Epidemic spreading on networks with vaccination [J]. Chinese Physical B, 2009, 18: 3309
- [3] May R M, Lloyd A L. Infection dynamics on scale-free networks [J]. Physical Review E, 2001, 64: 066112
- [4] Barthelemy M, Barrat A, Pastor-Satorras R, et al. A Velocity and hierarchical spread of epidemic outbreaks in scale-free networks [J]. Physical Review Letters, 2004, 92: 178701
- [5] Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic spreading in scale-free nets [J]. Physical Review Letters, 2001, 86: 3200
- [6] Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic dynamics and endemic states in complex nets [J]. Physical Review E, 2001, 63: 066117
- [7] Pastor-Satorras R, Vespignani A. Immunization of complex networks [J]. Physical Review E, 2002, 65: 036104
- [8] Meloni S, Arenas A, Moreno Y. Traffic-driven epidemic spreading in finite-size scale-free networks [J]. Proceedings of the National Academic of Sciences of the United States of America, 2009, 106(40): 16897-902
- [9] 王亚奇, 蒋国平. 考虑网络流量的无标度网络病毒免疫策略研究 [J]. 物理学报, 2011, 60(6): 060202
- [10] Barabasi A L, Albert R. Scale-free characteristics of random networks: the topology of the world-wide Web [J]. Physica A, 2000, 281: 69
- [11] Wang Kai, Zhang Yi-feng, Zhou Si-yuan, et al. Optimal routing strategy based on the minimum information path [J]. Physica A, 2011, 390: 2593
- [12] Zhou Si-yuan, Wang Kai. Generalized minimum information path routing strategy on scale-free networks [J]. Chinese Physics B, 2011, 20(8): 080501