BL-代数上的几种直觉模糊滤子

薛占熬[1] 肖运花[1] 薛天宇[2] 李跃军[1]
(河南师范大学计算机与信息技术学院 新乡 453007)[1] (河南师范大学数学与信息科学学院 新乡 453007)[2]

摘 要 结合直觉模糊集和滤子理论,对BL-代数上的直觉模糊滤子进行了研究。首先回顾了BL-代数和直觉模糊集的有关基础知识。然后引入BL-代数上的直觉模糊滤子、直觉模糊格滤子、直觉模糊布尔滤子和直觉模糊蕴涵滤子的概念,讨论了它们的一系列重要性质,证明了直觉模糊滤子与直觉模糊格滤子、直觉模糊布尔滤子和直觉模糊蕴涵滤子是等价的,并用实例进行了验证。最后探讨了直觉模糊滤子和模糊滤子的关系。

关键词 BL-代数,直觉模糊滤子,直觉模糊格滤子,直觉模糊布尔滤子,直觉模糊蕴涵滤子

中图法分类号 TP181 **文献标识码** A

Intuitionistic Fuzzy Filters of the BL-Algebras

XUE Zhan-ao[1] XIAO Yun-hua[1] XUE Tian-yu[2] LI Yue-jun[1]
(College of Computer and Information Technology, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)[1]
(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)[2]

Abstract Combining intuitionistic fuzzy sets and filter theory, we studied the instuitionistic fuzzy filters of the BL-algebras. The basic knowledge of the BL-algebras and the intuitionistic fuzzy sets were firstly reviewed. The filter, lattices filter, Boolean filter and implicative filter were introduced in the intuitionistic fuzzy sets, respectively. And their important properties were investigated. The intuitionistic fuzzy filter was proved to be the intuitionistic fuzzy lattice filter, and the intuitionistic fuzzy Bollean filter was also proved to be equivalent to the intuitionistic fuzzy implicative filter in the BL-algebras, and practical examples were used to verify. Finally, we discussed the relation between intuitionistic fuzzy filter and fuzzy filter.

Keywords BL-algebras, Intuitionistic fuzzy filter, Intuitionistic fuzzy lattice filter, Intuitionistic fuzzy Boolean filter, Intuitionistic fuzzy implicative filter

BL-代数是一类重要的逻辑代数,其代数性质已被深入讨论。研究其结构有着重要的意义,在许多领域都得到了广泛的应用。滤子理论也得到大量学者的研究,2010年徐扬研究了剩余格上的滤子理论[1],2006年张小红等研究了BL-代数上的模糊滤子[2],2010年Yin提出了BL-代数上的新类型的模糊滤子[3],2011年王伟等提出了伪BL-代数上的模糊滤子[4],2005年Liu和Li给出了BL-代数上的模糊布尔滤子和正蕴涵滤子[5]等,他们都对滤子及模糊滤子理论进行了深入的研究。

直觉模糊集(Intuitionistic Fuzzy Set, IFS)是由Aranassov于1986年提出的[6],是对Zadeh模糊集理论的一种扩充与发展[7]。申晓勇等针对现有时序逻辑在描述复杂不确定时间信息方面的局限性,提出了一种基于直觉模糊集的不确定时序逻辑模型[8]。2007年裴峥将直觉模糊集应用于格蕴涵代数的滤子概念上[9],2008年王伟和郭颖敏研究了Heyting代数上的直觉模糊滤子[10]。目前,直觉模糊滤子的研究还不多,特别是关于直觉模糊集和BL-代数的滤子结合的研究很少。本文研究了BL-代数中的直觉模糊滤子的性质,给出了BL-代数上的一个直觉模糊集成为直觉模糊滤子、直觉模糊格滤子、直觉模糊布尔滤子和直觉模糊蕴涵滤子的一些等价刻画;证明了直觉模糊滤子与直觉模糊格滤子、直觉模糊布尔滤子和直觉模糊蕴涵滤子是等价的,并进行了实例验证;最后探讨了直觉模糊滤子、模糊滤子以及t水平截集的关系。

1 基础知识

定义 1[2,3,11] 设$(L,\wedge,\vee,\otimes,0,1)$是一有界格,$\rightarrow$:$L\times L\rightarrow L$是二元运算。$L$叫做BL-代数,若以下条件成立:

(1) $(L,\wedge,\vee,0,1)$是一有界格,最小元为0,最大元为1;

(2) $(L,\otimes,1)$是以1为单位元的交换半群;

(3) $x\otimes y\leqslant z$,当且仅当$x\leqslant y\rightarrow z(\forall x,y,z\in L)$;

(4) $x\wedge y=x\otimes(x\rightarrow y)(\forall x,y,z\in L)$;

到稿日期:2011-10-20 返修日期:2012-01-20 本文受河南省重点科技攻关项目(092102210149),河南省教育厅自然科学研究计划项目(2009B520015)资助。

薛占熬(1963-),男,博士,教授,主要研究方向为人工智能基础理论,E-mail:xuezhanao@163.com;**肖运花**(1986-),女,硕士生,主要研究方向为模糊集理论;**薛天宇**(1991-),男,主要研究方向为代数;**李跃军**(1971-),男,硕士生,主要研究方向为自然语言处理和模糊控制。

(5) $(x\to y)\vee(y\to x)=1$。

定义 2[2,3,5,11,12]　如果 L 是 BL-代数，则以下条件成立：

(1) $x\leqslant y$，当且仅当 $x\to y=1$；

(2) $x\to(y\to z)=(x\otimes y)\to z=y\to(x\to z)$；

(3) $(x\otimes y)\leqslant x\wedge y$；

(4) $x\to y\leqslant(z\to x)\to(z\to y)$，$x\to y\leqslant(y\to z)\to(x\to z)$；

(5) $x=1\to x$，$x\to(y\to x)=1$；

(6) 若 $x\leqslant y$，则 $y\to z\leqslant x\to z$，$z\to x\leqslant z\to y$；

(7) $(x\vee y)\to z=(x\to z)\wedge(y\to z)$；

(8) $x\to(y\wedge z)=(x\to y)\wedge(x\to z)$；

(9) $x\otimes(y\vee z)=(x\otimes y)\vee(x\otimes z)$；

(10) $x\to y\leqslant(x\otimes z)\to(y\otimes z)$；

(11) 若 $x\vee\neg x=1$，则 $x\wedge\neg x=0$；

(12) $x\to\neg x=\neg\neg x\to\neg x$；

(13) $x\vee y=((x\to y)\to y)\wedge((y\to x)\to x)$；

(14) $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$，
$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$；

(15) $(x\to y)\otimes(y\to z)\leqslant x\to z$。

其中，$\neg x=x\to 0$。

定义 3[1,2,9,10]　令 B 是 L 上的模糊集，其隶属函数记为 $\mu_B(x)$，若 $\mu_B(x)$满足：

(1) $\forall x\in L,\mu_B(x)\leqslant\mu_B(1)$；

(2) $\forall x,y\in L,\mu_B(y)\geqslant\min\{\mu_B(x\to y),\mu_B(x)\}$。

则称模糊集 B 为 L 上的模糊滤子。

定义 4[6]　论域 X 上的一直觉模糊集 A 定义为 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in X\}$。其中 $\mu_A(x):X\to[0,1]$，$v(x):X\to[0,1]$分别代表 A 的隶属函数和非隶属函数，对 A 上所有的 $x\in X$，$0\leqslant\mu_A(x)+v_A(x)\leqslant 1$ 成立。

2　*BL*-代数上的直觉模糊滤子及其性质

定义 5[2,10]　令 A 是 L 上的一直觉模糊集。若 A 满足：

(1) $\forall x\in L,\mu_A(1)\geqslant\mu_A(x),v_A(1)\leqslant v_A(x)$；

(2) $\forall x,y\in L,\mu_A(y)\geqslant\min\{\mu_A(x),\mu_A(x\to y)\}$；

(3) $\forall x,y\in L,v_A(y)\leqslant\max\{v_A(x),v_A(x\to y)\}$。

则称 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$是 L 上的直觉模糊滤子。

为了方便，把 $\max(x,y)$、$\min(x,y)$ 分别记作 $x\vee y$ 和 $x\wedge y$。

例 1　令 $L=\{0,a,b,c,d,1\}$。$\otimes$和$\to$分别如表 1、表 2 所列。

表 1　L 的"$\otimes$"运算表

$\otimes$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	d	c	0	d	a
b	0	c	b	c	0	b
c	0	0	c	0	0	c
d	0	d	0	0	d	d
1	0	a	b	c	d	1

表 2　L 的"$\to$"运算表

$\to$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	c	1	b	b	a	1
b	d	a	1	a	d	1
c	a	1	1	1	a	1
d	b	1	b	b	1	1
1	0	a	b	c	d	1

可以验证，$(L,\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$是 BL-代数。定义 L 上的直觉模糊集 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$，其中：

$$\mu_A(x)=\begin{cases}\alpha, & x\in\{1,a,d\}\\ \beta, & 其它\end{cases}$$

$$v_A(x)=\begin{cases}\gamma, & x\in\{1,a,d\}\\ \omega, & 其它\end{cases}$$

$0\leqslant\beta<\alpha\leqslant 1,0\leqslant\gamma<\omega\leqslant 1$，且 $0\leqslant\alpha+\lambda\leqslant 1,0\leqslant\beta+\omega\leqslant 1$。

易验证，$A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$满足直觉模糊滤子的 3 个条件，所以 A 是 L 上的直觉模糊滤子。

定理 1　若 $\forall x,y,z\in L$，直觉模糊集 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$是 L 上的直觉模糊滤子，则以下条件成立：

(1) 若 $x\leqslant y$，则 $\mu_A(x)\leqslant\mu_A(y),v_A(x)\geqslant v_A(y)$；

(2) 若 $\mu_A(x\to y)=\mu_A(1),v_A(x\to y)=v_A(1)$，则 $\mu_A(x)\leqslant\mu_A(y),v_A(x)\geqslant v_A(y)$；

(3) $\mu_A(x\wedge y)=\mu_A(x)\wedge\mu_A(y),v_A(x\wedge y)=v_A(x)\vee v_A(y)$。

证明：(1) 在 BL-代数 L 上，若 $x\leqslant y$，则 $x\to y=1$。根据定义 5 得：

$$\begin{aligned}\mu_A(y)&\geqslant\min\{\mu_A(x\to y),\mu_A(x)\}\\&=\min\{\mu_A(1),\mu_A(x)\}=\mu_A(x)\\v_A(y)&\leqslant\max\{v_A(x\to y),v_A(x)\}\\&=\max\{v_A(1),v_A(x)\}=v_A(x)\end{aligned}$$

所以，若 $x\leqslant y$，则 $\mu_A(x)\leqslant\mu_A(y),v_A(x)\geqslant v_A(y)$。

(2) 在 BL-代数 L 上，$\mu_A(x\to y)=\mu_A(1)$，则 $x\to y=1$，根据定义 2(1)得 $x\leqslant y$。根据(1)可证得 $\mu_A(x)\leqslant\mu_A(y)$。

同理可证 $v_A(x)\geqslant v_A(y)$。

(3) 因为 $x\wedge y\leqslant x,x\wedge y\leqslant y$，根据(1)得：

$\mu_A(x\wedge y)\leqslant\mu_A(x)\wedge\mu_A(y),v_A(x\wedge y)\geqslant v_A(x)\vee v_A(y)$。

而

$$\begin{aligned}\mu_A(x\wedge y)&\geqslant\min\{\mu_A(x\to(x\wedge y)),\mu_A(x)\}\\&=\min\{\mu_A((x\to x)\wedge(x\to y)),\mu_A(x)\}\\&=\min\{\mu_A(x\to y),\mu_A(x)\}\\&\geqslant\min\{\min\{(\mu_A(y\to(x\to y)),\mu_A(y)\},\mu_A(x)\}\\&=\min\{\min\{(\mu_A(1),\mu_A(y)\},\mu_A(x)\}\\&=\min\{\mu_A(y),\mu_A(x)\}=\mu_A(y)\wedge\mu_A(x)\\v_A(x\wedge y)&\leqslant\max\{v_A(x\to(x\wedge y)),v_A(x)\}\\&=\max\{v_A((x\to x)\wedge(x\to y)),v_A(x)\}\\&=\max\{v_A(x\to y),v_A(x)\}\\&\leqslant\max\{\max\{(v_A(y\to(x\to y)),v_A(y)\},v_A(x)\}\\&=\max\{\max\{(v_A(1),v_A(y)\},v_A(x)\}\\&=\max\{v_A(y),v_A(x)\}=v_A(y)\vee v_A(x)\end{aligned}$$

所以，$\mu_A(x\wedge y)=\mu_A(x)\wedge\mu_A(y),v_A(x\wedge y)=v_A(x)\vee v_A(y)$。

定理 2　令 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$是 L 上的一直觉模糊集，A 是 BL-代数的直觉模糊滤子，当且仅当对 $\forall x,y,z\in L$，若 $x\to(y\to z)=1$，则 $\mu_A(z)\geqslant\mu_A(x)\wedge\mu_A(y),v_A(z)\leqslant v_A(x)\vee v_A(y)$。

证明：(1) 若 A 是 BL-代数的直觉模糊滤子，则 $\mu_A(z)\geqslant\mu_A(y)\wedge\mu_A(y\to z),v_A(z)\leqslant v_A(y)\vee v_A(y\to z),\mu_A(y\to z)\geqslant\mu_A(x)\wedge\mu_A(x\to(y\to z)),v_A(y\to z)\leqslant v_A(x)\vee v_A(x\to(y\to z))$。根据 $x\to(y\to z)=1$ 及定义 5 得，$\mu_A(y\to z)\geqslant\mu_A(x)\wedge\mu_A(1)=\mu_A(x),v_A(y\to z)\leqslant v_A(x)\vee v_A(1)=v_A(x)$。

因此，$\mu_A(z)\geqslant\mu_A(y\to z)\wedge\mu_A(y)\geqslant\mu_A(x)\wedge\mu_A(y),v_A(z)\leqslant v_A$

$(y\to z)\vee v_A(y)\leqslant v_A(x)\vee v_A(y)$。

(2) 若 $x\to(y\to z)=1$,则 $\mu_A(z)\geqslant\mu_A(x)\wedge\mu_A(y),v_A(z)\leqslant v_A(x)\vee v_A(y)$。根据 $x\to(x\to 1)=1$ 得,$\mu_A(1)\geqslant\mu_A(x)\wedge\mu_A(x)=\mu_A(x),v_A(1)\leqslant v_A(x)\vee v_A(x)=v_A(x)$。由 $(x\to y)\to(x\to y)=1$ 知,$\mu_A(y)\geqslant\mu_A(x)\wedge\mu_A(x\to y),v_A(y)\leqslant v_A(x)\vee v_A(x\to y)$。由定义 5 知,$A$ 是 BL-代数上的直觉模糊滤子。

所以,定理 2 得证。

根据 $x\to(y\to z)=x\otimes y\to z$ 及定理 2,可得到推论 1。

推论 1 令 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$ 是 L 上的直觉模糊集。A 是 BL-代数中的直觉模糊滤子的充要条件是,若 $\forall x,y,z\in L,x\otimes y\leqslant z$,则 $\mu_A(z)\geqslant\mu_A(x)\wedge\mu_A(y),v_A(z)\leqslant v_A(x)\vee v_A(y)$。

定理 3 若直觉模糊集 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$ 是 L 上的直觉模糊滤子,则

$\mu_A(x\to z)\geqslant\mu_A(x\to y)\wedge\mu_A(y\to z)$

$v_A(x\to z)\leqslant v_A(x\to y)\vee v_A(y\to z)$

证明:因为 $(x\to y)\otimes(y\to z)\leqslant x\to z$,根据推论 1 可得:

$\mu_A(x\to z)\geqslant\mu_A(x\to y)\wedge\mu_A(y\to z)$

$v_A(x\to z)\leqslant v_A(x\to y)\vee v_A(y\to z)$

所以,定理 3 得证。

定理 4 令 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$ 是 L 上的直觉模糊集。A 是 BL-代数中的直觉模糊滤子,当且仅当对 $\forall x,y\in L$ 有:

(1) 若 $x\leqslant y$,则 $\mu_A(x)\leqslant\mu_A(y),v_A(x)\geqslant v_A(y)$;

(2) $\mu_A(x\otimes y)\geqslant\mu_A(x)\wedge\mu_A(y),v_A(x\otimes y)\leqslant v_A(x)\vee v_A(y)$。

证明:若 A 是 BL-代数中的直觉模糊滤子。由定理 1 知,若 $x\leqslant y$,则 $\mu_A(x)\leqslant\mu_A(y),v_A(x)\geqslant v_A(y)$。因为 $x\otimes y\leqslant x\otimes y$,根据推论 1 得,$\mu_A(x\otimes y)\geqslant\mu_A(x)\wedge\mu_A(y),v_A(x\otimes y)\leqslant v_A(x)\vee v_A(y)$。

相反,若直觉模糊集 A 满足(1)和(2),对 $\forall x,y,z\in L$,如果 $x\otimes y\leqslant z$,则 $\mu_A(z)\geqslant\mu_A(x)\wedge\mu_A(y),v_A(z)\leqslant v_A(x)\vee v_A(y)$。根据推论 1,可知 A 是 BL-代数上的直觉模糊滤子。

推论 2 若 $\forall x,y\in L$,直觉模糊集 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$ 是 BL-代数上的直觉模糊滤子,则 $\mu_A(x\otimes y)=\mu_A(x)\wedge\mu_A(y),v_A(x\otimes y)=v_A(x)\vee v_A(y)$。

证明:由定理 4 知,$\mu_A(x\otimes y)\geqslant\mu_A(x)\wedge\mu_A(y),v_A(x\otimes y)\leqslant v_A(x)\vee v_A(y)$。因为 $x\otimes y\leqslant x\wedge y$,根据定理 1 得,$\mu_A(x\otimes y)\leqslant\mu_A(x\wedge y)=\mu_A(x)\wedge\mu_A(y),v_A(x\otimes y)\geqslant v_A(x\wedge y)=v_A(x)\vee v_A(y)$。因此 $\mu_A(x\otimes y)=\mu_A(x)\wedge\mu_A(y),v_A(x\otimes y)=v_A(x)\vee v_A(y)$。

所以,推论 2 得证。

定义 6[10] 若直觉模糊集 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$ 满足:

(1) $\mu_A(x\wedge y)=\mu_A(x)\wedge\mu_A(y)$;

(2) $v_A(x\wedge y)=v_A(x)\vee v_A(y)$。

则称 A 是直觉模糊格滤子。

例 2 可以验证例 1 中的直觉模糊集 A 为直觉模糊格滤子。

定理 5 L 上的任一直觉模糊滤子 A 是直觉模糊格滤子。

证明:由定理 1(3)很容易得到验证。

3 BL-代数的直觉模糊布尔滤子和蕴涵滤子

定义 7[1,5] 令 L 是 BL-代数,直觉模糊集 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$ 是 L 上的直觉模糊滤子。若 A 满足:

(1) $\mu_A(x\vee\neg x)=\mu_A(1)$;

(2) $v_A(x\vee\neg x)=v_A(1)$。

则称 A 为 BL-代数的直觉模糊布尔滤子。

例 3 令 $L=\{0,a,b,1\}$,$\otimes$和$\to$分别如表 3、表 4 所列。

表 3 L 的“$\otimes$”运算表

$\otimes$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	a	a
b	0	a	a	b
1	0	a	b	1

表 4 L 的“$\to$”运算表

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	0	1	1	1
b	0	b	1	1
1	0	a	b	1

定义“$\wedge$”和“$\vee$”运算分别取最小(min)和最大(max)。则容易验证$(L,\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1\}$是 BL-代数。定义 L 上的直觉模糊集 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x)\mid x\in L\}$,其中:

$\mu_A(0)=t_1,\mu_A(1)=\mu_A(b)=\mu_A(a)=t_3$

$v_A(0)=t_2,v_A(1)=v_A(b)=v_A(a)=t_4$

$0\leqslant t_1<t_3\leqslant 1,0\leqslant t_4<t_2\leqslant 1,0\leqslant t_1+t_2\leqslant 1,0\leqslant t_3+t_4\leqslant 1$。

很容易验证,直觉模糊集 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x)\mid x\in L\}$ 是直觉模糊布尔滤子。

定义 8[1,5] 令 L 是 BL-代数,$IFSA=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$是 L 上的直觉模糊滤子。若 A 满足:

(1) $\mu_A(x\to z)\geqslant\mu_A(x\to(\neg z\to y))\wedge\mu_A(y\to z)$;

(2) $v_A(x\to z)\leqslant v_A(x\to(\neg z\to y))\vee v_A(y\to z)$。

则称 A 为 BL-代数的直觉模糊蕴涵滤子。

例 4 可以验证例 3 中的直觉模糊集 A 为直觉模糊蕴涵滤子。

定理 6 设直觉模糊集 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$ 是 BL-代数 L 上的直觉模糊滤子,对 $\forall x,y,z\in L$,则以下条件等价:

(1) A 是直觉模糊蕴涵滤子;

(2) $\mu_A(x\to z)\geqslant\mu_A(x\to(\neg z\to z))$,
$v_A(x\to z)\leqslant v_A(x\to(\neg z\to z))$;

(3) $\mu_A(x\to z)=\mu_A(x\to(\neg z\to z))$,
$v_A(x\to z)=v_A(x\to(\neg z\to z))$;

(4) $\mu_A(x\to z)\geqslant\mu_A(y\to(x\to(\neg z\to z)))\wedge\mu_A(y)$,
$v_A(x\to z)\leqslant v_A(y\to(x\to(\neg z\to z)))\vee v_A(y)$。

证明:(1)$\Rightarrow$(2) 若 A 是直觉模糊蕴涵滤子,根据其定义,则 $\mu_A(x\to z)\geqslant\mu_A(x\to(\neg z\to z))\wedge\mu_A(z\to z),v_A(x\to z)\leqslant v_A(x\to(\neg z\to z))\vee v_A(z\to z)$,即 $\mu_A(x\to z)\geqslant\mu_A,(x\to(\neg z\to z))\wedge\mu_A(1),v_A(x\to z)\leqslant v_A(x\to(\neg z\to z))\vee v_A(1)$,根据定义 5 即可得,$\mu_A(x\to z)\geqslant\mu_A(x\to(\neg z\to z)),v_A(x\to z)\leqslant v_A(x\to(\neg z\to z))$。

因此(2)成立。

(2)$\Rightarrow$(3)

因为 $x\to z=1\to(x\to z)\leqslant\neg z\to(x\to z)=x\to(\neg z\to z)$，根据定理 6(1)得，$\mu_A(x\to z)\leqslant\mu_A(x\to(\neg z\to z))$，$v_A(x\to z)\geqslant v_A(x\to(\neg z\to z))$，由(2)可得，$\mu_A(x\to z)=\mu_A(x\to(\neg z\to z))$，$v_A(x\to z)=v_A(x\to(\neg z\to z))$。

(3)⇒(4)

$\mu_A(x\to(\neg z\to z))\geqslant\mu_A(y\to(x\to(\neg z\to z)))\wedge\mu_A(y)$，$v_A(x\to(\neg z\to z))\leqslant v_A(y\to(x\to(\neg z\to z)))\vee v_A(y)$，显然，$A$ 是直觉模糊滤子。由 $\mu_A(x\to z)=\mu_A(x\to(\neg z\to z))$，$v_A(x\to z)=v_A(x\to(\neg z\to z))$得，$\mu_A(x\to z)\geqslant\mu_A(y\to(x\to(\neg z\to z)))\wedge\mu_A(y)$，$v_A(x\to z)\leqslant v_A(y\to(x\to(\neg z\to z)))\vee v_A(y)$。

所以(4)成立。

(4)⇒(1)

若 A 是直觉模糊滤子，且 $\mu_A(x\to z)\geqslant\mu_A(y\to(x\to(\neg z\to z)))\wedge\mu_A(y)$，$v_A(x\to z)\leqslant v_A(y\to(x\to(\neg z\to z)))\vee v_A(y)$。根据定理 3 得，$\mu_A(x\otimes\neg z\to z)\geqslant\mu_A(x\otimes\neg z\to y)\wedge\mu_A(y\to z)$，$v_A(x\otimes\neg z\to z)\leqslant v_A(x\otimes\neg z\to y)\vee v_A(y\to z)$，即

$$\mu_A(x\to(\neg z\to z))\geqslant\mu_A(x\to(\neg z\to y))\wedge\mu_A(y\to z),$$

$$v_A(x\to(\neg z\to z))\leqslant v_A(x\to(\neg z\to y))\vee v_A(y\to z)。$$

根据(4)得，$\mu_A(x\to z)\geqslant\mu_A(1\to(x\to(\neg z\to z)))\wedge\mu_A(1)$，$v_A(x\to z)\leqslant v_A(1\to(x\to(\neg z\to z)))\vee v_A(1)$，即 $\mu_A(x\to z)\geqslant\mu_A(x\to(\neg z\to z))$，$v_A(x\to z)\leqslant v_A(x\to(\neg z\to z))$。

因此，$\mu_A(x\to z)\geqslant\mu_A(x\to(\neg z\to y))\wedge\mu_A(y\to z)$，$v_A(x\to z)\leqslant v_A(x\to(\neg z\to y))\vee v_A(y\to z)$。

故 A 是直觉模糊蕴涵滤子。

定理 7 若直觉模糊集 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$ 是 BL-代数 L 上的直觉模糊滤子，则 A 是直觉模糊布尔滤子，当且仅当 A 是直觉模糊蕴涵滤子。

证明：(1) 若直觉模糊集 A 是直觉模糊布尔滤子，根据定义 5，则：

$$\begin{aligned}\mu_A(x\to z)&\geqslant\mu_A((z\vee\neg z)\to(x\to z))\wedge\mu_A(z\vee\neg z)\\&=\mu_A((z\vee\neg z)\to(x\to z))\wedge\mu_A(1)\\&=\mu_A((z\vee\neg z)\to(x\to z))\\&=\mu_A((z\to(x\to z))\wedge(\neg z\to(x\to z)))\\&=\mu_A(\neg z\to(x\to z))=\mu_A(x\to(\neg z\to z))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_A(x\to z)&\leqslant v_A((z\vee\neg z)\to(x\to z))\vee v_A(z\vee\neg z)\\&=v_A((z\vee\neg z)\to(x\to z))\vee v_A(1)\\&=v_A((z\vee\neg z)\to(x\to z))\\&=v_A((z\to(x\to z))\wedge(\neg z\to(x\to z)))\\&=v_A(\neg z\to(x\to z))=v_A(x\to(\neg z\to z))\end{aligned}$$

得 $\mu_A((x\to z))\geqslant\mu_A(x\to(\neg z\to z))$，$v_A((x\to z))\leqslant v_A(x\to(\neg z\to z))$，根据定理 6 可知，$A$ 是直觉模糊蕴涵滤子。

(2) 若 A 是直觉模糊蕴涵滤子，根据定理 6(3)得，$\mu_A((\neg x\to x)\to x)=\mu_A((\neg x\to x)\to(\neg x\to x))=\mu_A(1)$，$v_A((\neg x\to x)\to x)=v_A((\neg x\to x)\to(\neg x\to x))=v_A(1)$ 和 $\mu_A((x\to\neg x)\to\neg x)=\mu_A((x\to\neg x)\to(\neg\neg x\to\neg x))=\mu_A((x\to\neg x)\to(x\to\neg x))=\mu_A(1)$，$v_A((x\to\neg x)\to\neg x)=v_A((x\to\neg x)\to(\neg\neg x\to\neg x))=v_A((x\to\neg x)\to(x\to\neg x))=v_A(1)$。根据定义 2(13)得：

$$\mu_A(x\vee\neg x)=\mu_A((x\to\neg x)\to\neg x)\wedge\mu_A((\neg x\to x)\to x)=\mu_A(1),$$

$$v_A(x\vee\neg x)=v_A((x\to\neg x)\to\neg x)\wedge v_A((\neg x\to x)\to x)=v_A(1)。$$

所以，A 是直觉模糊布尔滤子。

定理 8 若直觉模糊集 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$ 是 BL-代数 L 上的直觉模糊滤子，对 $\forall x,y,z\in L$，则以下条件等价：

(1) A 是直觉模糊布尔滤子；

(2) $\mu_A(x)=\mu_A(\neg x\to x)$，$v_A(x)=v_A(\neg x\to x)$；

(3) $\mu_A((x\to y)\to x)\leqslant\mu_A(x)$，$v_A((x\to y)\to x)\geqslant v_A(x)$；

(4) $\mu_A((x\to y)\to x)=\mu_A(x)$，$v_A((x\to y)\to x)=v_A(x)$；

(5) $\mu_A(x)\geqslant\mu_A(z\to((x\to y)\to x))\wedge\mu_A(z)$，$v_A(x)\leqslant v_A(z\to((x\to y)\to x))\vee v_A(z)$。

证明：(1)⇒(2) 若 A 是直觉模糊布尔滤子，根据定理 7 知，A 也是直觉模糊蕴涵滤子，则 $\mu_A(x)=\mu_A(1\to x)=\mu_A(1\to(\neg x\to x))=\mu_A(\neg x\to x)$，$v_A(x)=v_A(1\to x)=v_A(1\to(\neg x\to x))=v_A(\neg x\to x)$。故(2)成立。

(2)⇒(3)

因为 $\neg x=x\to 0$，根据定义 2 得，$\neg x\leqslant x\to y$，$(x\to y)\to x\leqslant\neg x\to x$。根据定理 1 得，$\mu_A((x\to y)\to x)\leqslant\mu_A(\neg x\to x)$，$v_A((x\to y)\to x)\geqslant v_A(\neg x\to x)$，故 $\mu_A((x\to y)\to x)\leqslant\mu_A(x)$，$v_A((x\to y)\to x)\geqslant v_A(x)$。

(3)⇒(4)

因为 $x\leqslant(x\to y)\to x$，所以 $\mu_A(x)\leqslant\mu_A((x\to y)\to x)$，$v_A(x)\geqslant v_A((x\to y)\to x)$。故 $\mu_A((x\to y)\to x)=\mu_A(x)$，$v_A((x\to y)\to x)=v_A(x)$。

(4)⇒(5)

显然，$\mu_A((x\to y)\to x)\geqslant\mu_A(z\to((x\to y)\to x))\wedge\mu_A(z)$，$v_A((x\to y)\to x)\leqslant v_A(z\to((x\to y)\to x))\vee v_A(z)$。所以，$\mu_A(x)\geqslant\mu_A(z\to((x\to y)\to x))\wedge\mu_A(z)$，$v_A(x)\leqslant v_A(z\to((x\to y)\to x))\vee v_A(z)$。故(5)成立。

(5)⇒(1)

令直觉模糊集 A 是直觉模糊滤子。为了证明 A 是直觉模糊布尔滤子，由定理 6 和定理 7 可知，只需证明 $\forall x,z\in L$，$\mu_A(x\to z)\geqslant\mu_A(x\to(\neg z\to z))$，$v_A(x\to z)\leqslant v_A(x\to(\neg z\to z))$。因为 $z\leqslant x\to z$，则 $\neg(x\to z)\leqslant\neg z$ 和 $\neg z\to(x\to z)\leqslant\neg(x\to z)\to(x\to z)$。由定理 1 可得，

$\mu_A(\neg z\to(x\to z))\leqslant\mu_A(\neg(x\to z)\to(x\to z))=\mu_A(1\to(\neg(x\to z)\to(x\to z)))\wedge\mu_A(1)$，

$v_A(\neg z\to(x\to z))\geqslant v_A(1\to(\neg(x\to z)\to(x\to z)))\vee v_A(1)$。

得，$\mu_A(x\to z)\geqslant\mu_A(\neg z\to(x\to z))$，$v_A(x\to z)\leqslant v_A(\neg z\to(x\to z))$。即，$\mu_A(x\to z)\geqslant\mu_A(x\to(\neg z\to z))$，$v_A(x\to z)\leqslant v_A(x\to(\neg z\to z))$。

因此，A 是直觉模糊布尔滤子。

4 直觉模糊滤子与模糊滤子的关系

定理 9 若直觉模糊集 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$ 是 L 上的直觉模糊滤子，当且仅当 L 上的模糊集 $\mu_A(x)$ 和 $\bar{v}_A(x)$ 是 L 上的模糊滤子。其中，$\bar{v}_A(x)=1-v_A(x)$。

证明：(1) 若直觉模糊集 A 是 L 上的直觉模糊滤子，由定义 3 知，模糊集 $\mu_A(x)$ 是 L 上的模糊滤子。

而对于 $\bar{v}_A(x)=1-v_A(x)$，若 $\forall x,y\in L$，则

$\bar{v}_A(1)=1-v_A(1)\geqslant1-v_A(x)=\bar{v}_A(x)$，即 $\bar{v}_A(1)\geqslant\bar{v}_A(x)$。

（下转第 219 页）

swarm algorithm [C]// Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. Piscataway: IEEE Press, 1997: 4104-4108

[5] 陈自郁,何中市,何静媛.一种求解集合组合问题的离散粒子群优化模型[J].华南理工大学学报:自然科学版,2010,38(4):141-146

[6] Goldberg D E, Smith R E. Non-stationary function optimization using genetic algorithms with dominance and diploidy[C]// International Conference on Genetic Algorithms. Hillsdale: L Erlbaum Associates Inc, 1987: 59-68

[7] Simöes A, Costa E. A comparative study using genetic algorithms to deal with dynamic environments [C]// Proceedings of the Sixth International Conference on Neural Networks and Genetic Algorithms. Roanne: Springer-Verlag, 2003: 203-209

[8] 闫杨,汪定伟,王大志,等.求解动态背包问题的多智能体进化算法[J].东北大学学报:自然科学版,2009,30(7):948-951

[9] 王洪峰,汪定伟,刘黎黎.求解动态优化问题的改进原对偶遗传算法[J].东北大学学报:自然科学版,2007,28(5):639-642

(上接第 201 页)

$$\begin{aligned}\bar{v}_A(y)&=1-v_A(y)\geqslant 1-\max\{v_A(x\to y),v_A(x)\}\\&=\min\{1-v_A(x\to y),1-v_A(x)\}\\&=\min\{\bar{v}_A(x\to y),\bar{v}_A(x)\}\end{aligned}$$

即 $\bar{v}_A(y)\geqslant\min\{\bar{v}_A(x\to y),\bar{v}_A(x)\}$。

故模糊集 $\bar{v}_A(x)$是 L 上的模糊滤子。

(2) 若模糊集 $\mu_A(x)$和 $\bar{v}_A(x)$是 L 上的模糊滤子,则 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$是 L 上的直觉模糊集,且由

① $\forall x\in L,\mu_A(x)\leqslant\mu_A(1)$,由 $\bar{v}_A(x)\leqslant\bar{v}_A(1)$可得,$1-v_A(x)\leqslant 1-v_A(1)$,即 $v_A(x)\geqslant v_A(1)$;

② $\forall x,y\in L,\mu_A(y)\geqslant\min\{\mu_A(x\to y),\mu_A(x)\}$;

③ $\forall x,y\in L,\bar{v}_A(y)\geqslant\min\{\bar{v}_A(x\to y),\bar{v}_A(x)\}$。

得,$1-v_A(y)\geqslant\min\{1-v_A(x\to y),1-v_A(x)\}=1-\max\{v_A(x\to y),v_A(x)\}$。

即可得,$v_A(y)\leqslant\max\{v_A(x\to y),v_A(x)\}$。

由①,②和③得,A 是 L 上的直觉模糊滤子。

推论 3 直觉模糊集 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$是 L 上的直觉模糊滤子,当且仅当 $\forall t\in[0,1]$,$(\mu_A)_t=\{x\mid x\in L,\mu_A(x)\geqslant t\}$和$(\bar{v}_A)_t=\{x\mid x\in L,\bar{v}_A(x)\geqslant t\}$是 L 的滤子。

证明:由 μ_A 是 L 的模糊滤子,当且仅当 $\forall t\in[0,1]$,μ_A 的 t 水平截集$(\mu_A)_t=\{x\mid x\in L,\mu_A(x)\geqslant t\}$是 L 的滤子和定理 9 易证。

定理 10 直觉模糊集 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$是 L 上的直觉模糊滤子,当且仅当 $A_1=\{(x,\mu_A(x),\bar{\mu}_A(x))\mid x\in L\}$和 $A_2=\{(x,\bar{v}_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$是 L 上的直觉模糊滤子。其中,$\bar{\mu}_A(x)=1-\mu_A(x)$,$\bar{v}_A(x)=1-v_A(x)$。

证明:(1) 若 A 是 L 上的直觉模糊滤子。$\forall x\in L$,$0\leqslant\mu_A(x)+\bar{\mu}_A(x)=\mu_A(x)+1-\mu_A(x)=1$,$0\leqslant v_A(x)+\bar{v}_A(x)=v_A(x)+1-v_A(x)=1$。则,$A_1=\{(x,\mu_A(x),\bar{\mu}_A(x))\mid x\in L\}$和 $A_2=\{(x,\bar{v}_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$是 L 上的直觉模糊集。$\mu_A(1)\geqslant\mu_A(x)$,$\bar{\mu}_A(1)=1-\mu_A(1)\leqslant 1-\mu_A(x)=\bar{\mu}_A(x)$,即 $\bar{\mu}_A(1)\leqslant\bar{\mu}_A(x)$。

$$\forall x,y\in L,\mu_A(y)\geqslant\min\{\mu_A(x\to y),\mu_A(x)\}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_A(y)&=1-\mu_A(y)\geqslant 1-\min\{\mu_A(x\to y),\mu_A(x)\}\\&=\max\{1-\mu_A(x\to y),1-\mu_A(x)\}\\&\geqslant 1-\min\{\mu_A(x\to y),\mu_A(x)\}\\&=\max\{1-\mu_A(x\to y),1-\mu_A(x)\}\\&=\max\{\bar{\mu}_A(x\to y),\bar{\mu}_A(x)\}\end{aligned}$$

即 $A_1=\{(x,\mu_A(x),\bar{\mu}_A(x))\mid x\in L\}$是 L 上的直觉模糊滤子。

同理可证,$A_2=\{(x,\bar{v}_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$也是 L 上的直觉模糊滤子。

(2) 若 A_1 和 A_2 是 L 上的直觉模糊滤子,则由 A_1 可得,$\forall x,y\in L,\mu_A(1)\geqslant\mu_A(x),\mu_A(y)\geqslant\min\{\mu_A(x\to y),\mu_A(x)\}$,由 A_2 可得,$\forall x,y\in L,v_A(1)\leqslant v_A(x),v_A(y)\leqslant\max\{v_A(x\to y),v_A(x)\}$,即直觉模糊集 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in L\}$是 L 上的直觉模糊滤子。

故,定理 10 得证。

结束语 本文将直觉模糊集和 BL-代数上的滤子结合起来,给出了 BL-代数上的直觉模糊滤子、直觉模糊格滤子、直觉模糊布尔滤子和直觉模糊蕴涵滤子的概念,讨论了 BL-代数上的直觉模糊滤子的若干性质,研究了 BL-代数中的直觉模糊滤子与直觉模糊格滤子、直觉模糊布尔滤子和直觉模糊蕴涵滤子的等价性。最后探讨了直觉模糊滤子、模糊滤子及 t 水平截集的关系,为直觉模糊集在 BL-代数中的进一步应用提供了丰富的理论基础。

参 考 文 献

[1] Zhu Yi-quan, Xu Yang. On filter theory of residuated lattices [J]. Information Sciences, 2010, 180: 3614-3632

[2] Zhang Xiao-hong, Bae J Y, Im D M. On fuzzy Filters and Fuzzy Ideals of BL-algebras [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2006, 20(3): 8-20

[3] Yin Yun-qiang, Zhan Jian-ming. New types of fuzzy filters of BL-algebras [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2010, 60: 2115-2125

[4] Wang Wei, Xin Xiao-long. On fuzzy filter of pseudo *BL*-algebras [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2011, 162: 27-38

[5] Liu Lian-zhen, Li Kai-tai. Fuzzy Boolean and positive implicative filters of BL-algebras [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 152: 333-348

[6] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20: 87-96

[7] Zadeh L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965(8): 338-385

[8] 申晓勇,雷英杰,周创明,等.基于直觉模糊集的不确定时序逻辑模型[J].计算机科学,2010,37(5):187-189,273

[9] 裴峥.格蕴涵代数中的直觉模糊滤子[J].西华大学学报:自然科学版,2007,26(2):17-20

[10] 王伟,郭颖敏.Heyting 代数中的直觉模糊滤子[J].西安石油大学学报,2008,23(5):106-108

[11] Hajek P. Metamathematics of fuzzy logic [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998

[12] Zhan Jian-ming, Yu Yang. Some types of generalized fuzzy filters of BL-algebras [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 56: 1604-1616