

积模糊粗集模型及其模糊知识粒的表示和分解

吴明芬^{1,2} 韩浩瀚² 曹存根¹

(中国科学院计算技术研究所 北京 100190)¹ (五邑大学计算机学院 江门 529020)²

摘 要 为处理人工智能中不精确和不确定的数据和知识, Pawlak 提出了粗集理论。之后粗集理论被推广, 其方法主要有二: 一是减弱对等价关系的依赖; 二是把研究问题的论域从一个拓展到多个。结合这两种思想, 研究基于两个模糊近似空间的积模糊粗集模型及其模糊粗糙集的表示和分解。根据这种思想, 可以从论域分解的角度探索降低高维模糊粗糙集计算的复杂度问题。先对模糊近似空间的分层递阶结构—— λ -截近似空间进行研究, 得到不同层次知识粒的相互关系; 然后定义模糊等价关系的积, 并研究其性质及算法; 最后构建基于积模糊等价关系的积模糊粗集模型, 并讨论了该模型中模糊粗糙集的表示及分解问题, 分别从 λ -截近似空间和一维模糊近似空间的角度去处理, 给出了可分解集的上(下)近似的一个刻画, 及模糊可分解集的上(下)近似的 λ -截集分解算法。

关键词 λ -截近似空间, 模糊粗糙集, 积模糊等价关系, 积模糊近似空间, 可分解集

中图法分类号 TP18 文献标识码 A

Representation and Decomposition of Fuzzy Knowledge Granularity Based on Product Fuzzy Rough Set Model

WU Ming-fen^{1,2} HAN Hao-han² CAO Cun-gen¹

(Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)¹

(School of Information Science, Wuyi University, Jiangmen 529020, China)²

Abstract Pawlak proposed the rough set theory in order to process data and knowledge which are imprecise or uncertainty in artificial intelligence. And then, the theory got extended. There're generally two methods; one is to weaken the dependence on equivalence relations, the other is to develop domains to be studied from one to many. Based on the two kinds of thoughts, we researched a product fuzzy rough set model based on two fuzzy approximation spaces, and representation and decomposition of fuzzy rough sets in the product fuzzy approximation spaces. We could explore questions of fuzzy knowledge Granularity's expression from different angles in the high dimension fuzzy knowledge space. We first researched hierarchical structure of a fuzzy approximation space—— λ -cut approximation spaces, and gained the relationship between vary hierarchical knowledge granularity. Secondly, the product of finite fuzzy equivalence relations was defined, and its algorithm was investigated. Finally, a product fuzzy approximation space was constructed based on product fuzzy equivalence relations, and decompositions of upper and lower approximations of fuzzy sets were discussed in the high dimension fuzzy approximation space, and a characterization of upper(lower) approximation of crisp decomposable sets was given.

Keywords λ -cut approximation space, Fuzzy rough set, Product fuzzy equivalence relation, Product fuzzy approximation space, Decomposable set

1 引言

粗集理论是由波兰科学家 Pawlak 提出的一种处理不精确和不确定性问题的数学工具^[1]。其以知识的颗粒为主要特征, 从数据的结构方面着手, 挖掘出尽可能多的知识。该理论已在数据挖掘、机器学习和人工神经网络等诸多领域得到了非常广泛的应用^[2-4]。近年来, 粗集在理论和应用两个方面都得到迅速发展, 粗集模型也有各种各样的推广, 方式主要有^[5-8]: 减弱对等价关系的依赖, 将等价关系泛化为二元关系

或模糊关系; 把讨论问题的论域从一个拓展到多个。主要采用构造性和公理化的研究手段。

粒度计算(Granular Computing, GrC)是信息处理的一种新的概念和计算范式, 覆盖了有关粒度的理论、方法、技术和工具的研究^[9], 已成为了人工智能和控制科学领域研究的热点之一。目前最有代表性的粒度计算模型有 3 种: 基于模糊集合的词计算模型、粗糙集模型和基于商空间理论的粒计算模型。美国著名数学家 Zadeh 在 20 世纪 60 年代提出模糊集, 1979 年首次提出了模糊信息粒度化问题^[10], 1996 年提出

到稿日期: 2011-10-09 返修日期: 2012-02-19 本文受广东省科技计划项目(2010B010600039), 广东省自然科学基金(S2011010003681), 中国科学院计算技术研究所智能信息处理重点实验室开放课题基金(LIP2010-5)资助。

吴明芬(1964—), 女, 教授, 硕士生导师, CCF 高级会员, 主要研究方向为粗糙集理论、智能信息处理, E-mail: mfwu@sina.com; 韩浩瀚(1985—), 男, 研究生, 主要研究方向为智能信息处理; 曹存根(1964—), 男, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为大规模知识处理(通信作者)。

“词计算理论”^[11],标志着模糊粒度化理论的诞生。基于模糊集进行粒度计算的理论和方法的研究,已成为“粒度计算”的重要研究方向之一。Pawlak 于 1982 年提出的粗糙集理论^[1],对于论域 X 上的一个不可分辨关系 R 相当于给定了一个知识基 X/R (商集),讨论对于任意一个概念 $A(X$ 的一个子集合)如何用知识基中的元素的并来表示;对于那些无法用 X/R 中的元素之并来表示的集合,利用拓扑学中的内核和闭包的概念,即通过 R -下近似和 R -上近似来粗糙表示概念 A 。粗糙集理论由于无需任何先验条件,能够有效地表达不确定的、不精确的知识,善于从数据中获取知识,并能利用不确定、不完整的经验知识进行推理等,因此已成为粒度计算研究领域的另一主要方向^[12,13]。张钹院士和张铃教授在研究问题求解时,独立地提出了商空间理论^[14]。之后,他们将模糊理论成功引入到商空间,提出了模糊商空间理论^[15],并将精确粒度的商空间推广到了模糊粒度计算中,提供了一种新的强有力的粒度计算工具。

Yao 给出了基于两个论域(称泛集)的粗集模型^[17],其在两个有限论域 U, W 上考虑问题,设 R 是 U 到 W 上的任意二元关系,通常三元组 (U, W, R) 称为近似空间。文献^[18-21]对该模型进行了深入研究,如理论推广、算法实现及应用,获得了一系列有价值的研究成果。考虑两个或多个论域的情形,是希望考虑问题的范围尽可能地大些,以便有更大的应用范围^[22]。

本文结合多论域及模糊近似空间这两种思想,提出了两个模糊近似空间的积模糊粗集模型,及其模糊粗糙集表示和分解。根据我们构造的积模糊粗集模型,可以从论域分解的角度探索降低高维模糊粗糙集计算的复杂度问题。同时试图通过对高维模糊知识空间的模糊知识粒的刻画、分解,以及矩阵形式的计算表示等方法的研究,获得问题求解的合适粒度和优化算法。首先对模糊近似空间的分层递阶结构—— λ -截近似空间进行研究,研究了不同层次上知识粒的相互关系,为模糊粗糙集的计算提供了理论基础;然后引入积模糊等价关系的概念,并研究其相关性质及求解算法;最后构建基于积模糊等价关系的积模糊近似空间(即积模糊粗集模型),讨论了这种高维模糊近似空间中模糊集上、下近似的基本性质及其在经典 Pawlak 近似空间和低维模糊近似空间中的分解问题,分别从截近似空间和一维模糊近似空间的角度去研究,对可分解集合的上、下近似进行了刻画,并以矩阵的方式给出其计算算法。我们研究的积模糊近似空间中知识粒的分解与计算,给出了粒度计算的一种具体的可操作的实现思路,它可以作为降低算法复杂度的方案之一。

文中涉及的粗集有关基本概念、基本结论及术语不再详细解释,可参考文献^[3]。下面简单介绍模糊近似空间的基本术语及结果^[6-8]。

论域 U 上一个模糊子集 A 就是一个函数 $A:U \rightarrow [0,1]$, $x \rightarrow A(x)$, $A(x)$ 反映了对象 x 属于模糊集合 A 的程度, $F(U)$ 表示 U 上一切模糊子集的集合。 $U \times U = \{(x, y) \mid \forall x, y \in U\}$ 表示 U 与 U 的笛卡尔积,设 $R \in F(U \times U)$, 即 R 是 U 上的一个模糊关系,称 R 是 U 上的一个模糊等价关系,若满足:

- (1) 自反性: $\forall x \in U, R(x, x) = 1$;
- (2) 对称性: $\forall x, y \in U, R(x, y) = R(y, x)$;
- (3) 传递性: $\forall x, z \in U,$

$$R(x, z) \geq \sup_{y \in U} (\min(R(x, y), R(y, z))) \\ = \bigvee_{y \in U} (R(x, y) \wedge R(y, z))$$

为了处理属性值是实数的信息系统或决策系统, Pawlak 粗糙集模型被推广为模糊粗糙集模型, Dubois 和 Prade 在文献^[6]中最先提出模糊粗糙集模型。

定义 1^[3] 设 U 是非空集合, R 是 U 上的一个模糊等价关系, 称序对 (U, R) 为一个模糊近似空间, $\forall A \in F(U)$, 规定模糊子集 A 关于模糊等价关系 R 的上、下近似 $\bar{R}(A)$ 、 $\underline{R}(A)$ 如下:

$$\underline{R}(A)(x) = \bigwedge_{y \in U} ((1 - R(x, y)) \vee A(y)), \forall x \in U \\ \bar{R}(A)(x) = \bigvee_{y \in U} (R(x, y) \wedge A(y)), \forall x \in U$$

且当 $\bar{R}(A) = \underline{R}(A)$ 时, 称在现有模糊知识空间 (U, R) 中的模糊子集 A 是可定义的; 否则称 A 是不可定义的, 即 A 是模糊粗糙的。

定理 1^[4] 设 (U, R) 为一个模糊近似空间, 则近似算子 $\bar{R}$ 和 $\underline{R}$ 满足下面的性质:

- (1L) $\bar{R}(U) = U$;
- (1U) $\bar{R}(\emptyset) = \emptyset$;
- (2L) $\underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y), \forall X, Y \in F(U)$;
- (2U) $\bar{R}(X \cup Y) = \bar{R}(X) \cup \bar{R}(Y), \forall X, Y \in F(U)$;
- (3L) $\underline{R}(X^c) = (\bar{R}(X))^c, \forall X \in F(U)$, 这里 X^c 是模糊子集 X 的补集;
- (3U) $\bar{R}(X^c) = (R(X))^c, \forall X \in F(U)$;
- (4L) 如果 $X \subseteq Y, X, Y \in F(U)$, 则 $\underline{R}(X) \subseteq \underline{R}(Y)$;
- (4U) $X \subseteq Y, X, Y \in F(U)$, 则 $\bar{R}(X) \subseteq \bar{R}(Y)$;
- (5L) S 是 U 上另一模糊等价关系, 且 $\forall A \in F(U), \underline{R}(A) \subseteq \underline{S}(A)$, 当且仅当 $S \subseteq R$;
- (5U) S 是 U 上另一模糊等价关系, 且 $\forall A \in F(U), \bar{R}(A) \subseteq \bar{S}(A)$, 当且仅当 $R \subseteq S$ 。

定理 2^[8] 如果 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, U 上的模糊等价关系 R , 记 $R = (r_{ij})_{n \times n}, \forall A \in F(U), A = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, 则 $\bar{R}(A) = R \circ A, \underline{R}(A) = (R \circ A^c)^c$, 这里的运算“ $\circ$ ”就是矩阵的布尔积运算, 即 $M \circ P = (m_{ij})_{p \times n} \circ (p_{ij})_{n \times q} = (c_{ij})_{p \times q}$, 其中 $c_{ij} = \bigvee_{k=1}^n (m_{ik} \wedge p_{kj})$ 。

2 模糊近似空间的 λ -截近似空间

张钹院士和张铃教授在研究问题求解时, 提出了商空间和模糊商空间理论^[14,15], 其利用子集来表示知识, 不同粒度的子集表示不同粒度的知识, 集合的一个划分就构成空间的一簇知识——商空间(知识基)。粗糙集理论是将知识理解为分类能力, 即一簇知识对应空间的一个划分。这两种理论都可以归为粒度计算的范畴。

分类模型描述: 给定论域 U 上的一个等价关系 R (或给出论域的一个划分), 将论域分为不同的等价类, 这些等价类构成的商集 U/R (称为商空间) 作为新的论域, 以将复杂问题分为粒度较大的子问题进行求解。一般来说, 商空间 U/R 中元素的个数远比 U 中的少。

分层递阶结构为多级分类模型组合考虑的实例, 当若干分类构成一个商空间链时, 称这种分类模型为分层递阶结构的。给定一个模糊近似空间 (U, R) , 可以构造一个分层递阶结构, 具体为: 对 $0 \leq \lambda \leq 1, R_\lambda$ 为 U 上的等价关系, 对应的商空间记为 $U(\lambda) = U/R_\lambda$, 则商空间簇 $\{U(\lambda) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ 按商集

的包含关系构成一个有序链,称 $\{U(\lambda) | 0 \leq \lambda \leq 1\}$ 构成对论域 U 的一个分层递阶结构。下面研究模糊近似空间与它的 λ -截近似空间之间的关系。

引理 1^[16] R 是 U 上的模糊等价关系, $\forall \lambda \in [0, 1]$, 则 R_λ 是 U 上的等价关系。

定义 2^[1] 设 (U, R) 是模糊近似空间, R 是 U 上的模糊等价关系, $\forall A \in F(U)$, $\forall \lambda, \mu \in [0, 1]$, 模糊集合 A 的截集关于 R 的截集的下近似、上近似表示如下:

$$\underline{R}_\lambda(A_\lambda) = \{x \in U | [x]_{R_\lambda} \subseteq A_\lambda\}$$

$$\overline{R}_\lambda(A_\lambda) = \{x \in U | [x]_{R_\lambda} \cap A_\lambda \neq \emptyset\}$$

$$\underline{R}_\lambda(A_\mu) = \{x \in U | [x]_{R_\lambda} \subseteq A_\mu\}$$

$$\overline{R}_\lambda(A_\mu) = \{x \in U | [x]_{R_\lambda} \cap A_\mu \neq \emptyset\}$$

称 (U, R_λ) 为模糊近似空间 (U, R) 的 λ -截近似空间。

引理 2^[16] R 是 U 上的模糊等价关系, $A \in F(U)$, $\forall \lambda, \mu \in [0, 1]$, $\lambda \leq \mu$, 则 $R_\mu \subseteq R_\lambda$, $A_\mu \subseteq A_\lambda$ 。

定理 3 设 (U, R) 为模糊近似空间, R 是 U 上的模糊等价关系, $\forall A \in F(U)$, $\forall \lambda, \mu \in [0, 1]$, $\lambda \leq \mu$, 则有

$$\underline{R}_\lambda(A_\mu) \subseteq \underline{R}_\mu(A_\mu) \subseteq \underline{R}_\mu(A_\lambda)$$

$$\underline{R}_\lambda(A_\mu) \subseteq \underline{R}_\lambda(A_\lambda) \subseteq \underline{R}_\mu(A_\lambda)$$

$$\overline{R}_\mu(A_\mu) \subseteq \overline{R}_\lambda(A_\mu) \subseteq \overline{R}_\lambda(A_\lambda)$$

$$\overline{R}_\mu(A_\mu) \subseteq \overline{R}_\lambda(A_\mu) \subseteq \overline{R}_\lambda(A_\lambda)$$

证明: 据引理 2 及定理 1 中 (4L), (5L), (4U), (5U) 可得。

定理 4 设 (U, R) 为模糊近似空间, R 是 U 上的模糊等价关系, U 为有限论域, 则对

$$\forall A \in F(U), \forall \lambda \in [0, 1], \text{有 } (\bar{R}A)_\lambda = \bar{R}_\lambda(A_\lambda) \text{ 成立。}$$

证明: (1) $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\forall x \in \bar{R}_\lambda(A_\lambda)$, 则 $[x]_{R_\lambda} \cap A_\lambda \neq \emptyset$, 即存在 $y_0 \in [x]_{R_\lambda} \cap A_\lambda$ 。所以 $R(x, y_0) \geq \lambda, A(y_0) \geq \lambda$ 。故有

$$\begin{aligned} \bar{R}(A)(x) &= \bigvee_{y \in U} (R(x, y) \wedge A(y)) \\ &\geq R(x, y_0) \wedge A(y_0) \geq \lambda \end{aligned}$$

即 $x \in (\bar{R}(A))_\lambda$ 。因此 $\bar{R}_\lambda(A_\lambda) \subseteq (\bar{R}(A))_\lambda$ 。

(2) $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\forall x \in (\bar{R}(A))_\lambda$, 因 U 有限, 有

$$\begin{aligned} \bar{R}(A)(x) &= \bigvee_{y \in U} (R(x, y) \wedge A(y)) \\ &= R(x, y_0) \wedge A(y_0) = \mu \geq \lambda \end{aligned}$$

所以 $y_0 \in [x]_{R_\mu} \cap A_\mu$, 即 $x \in \bar{R}_\mu(A_\mu)$ 。由定理 3 有, $\bar{R}_\mu(A_\mu) \subseteq \bar{R}_\lambda(A_\lambda)$, 故 $x \in \bar{R}_\lambda(A_\lambda)$, 所以 $(\bar{R}A)_\lambda \subseteq \bar{R}_\lambda(A_\lambda)$ 。

综上所述, $\forall \lambda \in [0, 1]$, 有 $(\bar{R}A)_\lambda = \bar{R}_\lambda(A_\lambda)$ 。

下面首先给出一个例子, 说明相关的一些事实。

例 1 设论域 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, U 上的模糊集 $A = (0.5, 0.3, 0.3, 0.3, 0.6, 0.8)^T$, U 上的模糊等价关系 R 如下:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

则关于 λ -截集, 有表 1 所列的结果。

表 1 λ -截集的上近似和下近似序列表

	$\lambda=0.4$	$\lambda=0.5$	$\lambda=0.6$	$\lambda=0.8$
$\underline{R}_\lambda(A_\lambda)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{x_4, x_5\}$	$\{x_5\}$
$(\bar{R}(A))_\lambda$	$\{x_4, x_5\}$	$\{x_4, x_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\underline{R}_\lambda(A_\lambda)$	U	$\{x_1, x_3, x_4, x_5\}$	$\{x_4, x_5\}$	$\{x_5\}$
$(\bar{R}(A))_\lambda$	U	$\{x_1, x_3, x_4, x_5\}$	$\{x_4, x_5\}$	$\{x_5\}$

即当 $\lambda=0$ 和 $\lambda=0.3$ 时, $\underline{R}_\lambda(A_\lambda) = (\underline{R}(A))_\lambda = U$; 当 $\lambda=1$ 时, $\underline{R}_\lambda(A_\lambda) = (\underline{R}(A))_\lambda = \emptyset$; 从表 1 还可以得出以下结果:

(1) 当 $\lambda=0.4, 0.5, 0.6, 0.8$ 时, $\underline{R}_\lambda(A_\lambda) \neq (\underline{R}(A))_\lambda$ 。

(2) $\forall \lambda, \mu \in [0, 1], \lambda \leq \mu$, 关系式 $\underline{R}_\mu(A_\mu) \subseteq \bar{R}_\lambda(A_\lambda)$ 不成立。

(3) $\bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda(\underline{R}_\lambda(A_\lambda)) = (0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.6, 0.8)^T$, 但 $\underline{R}(A) = (0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.5, 0.5)^T$ 。

(4) 如果取模糊集, $B = (0.5, 0.3, 0.3, 0.3, 0.6, 0.5)^T$, 计算可得 $\underline{R}(B) = (0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.5, 0.5)^T$, 但 $\bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda(\underline{R}_\lambda(B_\lambda)) = (0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3)^T$ 。

由 (3) 和 (4) 可以看出, $\underline{R}(A)$ 与 $\bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda(\underline{R}_\lambda(A_\lambda))$ 不可能有相互的包含关系。

定理 5 设 (U, R) 为模糊近似空间, 且 U 为有限论域, $\forall A \in F(U)$, 则有

$$(1) \bar{R}(A) = \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda(\bar{R}(A))_\lambda, \underline{R}(A) = \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda(\underline{R}(A))_\lambda;$$

$$(2) \bar{R}(A) = \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda \bar{R}_\lambda(A_\lambda), \text{ 但是 } \underline{R}(A) \neq \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda \underline{R}_\lambda(A_\lambda);$$

$$(3) \underline{R}(\sim A) = \sim \bar{R}(A)。$$

证明: (1) 由模糊集的分解定理可得; (2) 根据定理 4 及例 1 可得。

(3) 由定义 1 知, 对于任意的 $x \in U$,

$$\begin{aligned} \underline{R}(\sim A)(x) &= \bigwedge_{y \in U} ((1 - R(x, y)) \vee (1 - A(y))) \\ &= \bigwedge_{y \in U} ((1 - (R(x, y) \wedge A(y))) \\ &= 1 - \bigvee_{y \in U} (R(x, y) \wedge A(y)) = \sim \bar{R}(A) \end{aligned}$$

由定理 5 和例 1 不难发现, 张文修等给出的有关模糊粗糙集的定义满足了分解定理(定理 5(1))和上、下近似的对偶性(定理 5(3)), 而且上近似可以通过 λ -截近似空间中的上近似计算, 但是下近似与其 λ -截近似空间中的下近似无明显的关系(定理 5(2))。原因可以从定理 3 看出, λ -截近似空间中的下近似关于 λ 无良好的序关系。

这样对模糊知识空间 (U, R) 的研究可以通过具有分层递阶结构的知识空间簇 $\{(U, R_\lambda) | \forall \lambda \in [0, 1]\}$ 来研究(上近似)。根据实际问题的需要, 选择合适的 $\lambda \in [0, 1]$, 即选择合适的粒度等级, 然后用经典 Pawlak 粗糙集方法来处理。

3 积模糊等价关系及算法

为把单一论域的模糊粗糙集模型推广为双(有限)论域的情形, 考虑论域的笛卡尔积运算及论域上的模糊等价关系。如此, 就将一维空间对象的信息处理推广到多维空间对象的信息处理问题, 拓宽了模糊粗糙集模型的应用范围。为此, 首先研究模糊等价关系的积关系。为方便描述, 在幂集的子集之间引入一种“积”运算 $\odot$ 。

定义 3 设 U, V 是任意两个非空集合, $P(U), P(V)$ 分别是 U, V 的幂集, 对任意 $\phi \neq M \subseteq P(U), \phi \neq N \subseteq P(V)$, 规定 $M \odot N = \{X \times Y | X \in M, Y \in N\}$

显然, 由定义 3 可知 $P(U) \odot P(V) \subseteq P(U \times V)$ 。

3.1 积模糊等价关系

定义 4 设 U, V 是两个非空集合, R_1, R_2 分别是定义在 U, V 上的模糊等价关系, 定义笛卡尔积 $U \times V$ 上的一个模糊关系 $R_1 \Pi R_2$ 如下:

$$R_1 \Pi R_2((u_1, v_1), (u_2, v_2))$$

$=R_1(u_1, u_2) \wedge R_2(v_1, v_2), \forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in U \times V$
称 $R_1 \Pi R_2$ 为模糊关系 R_1 与 R_2 的积模糊关系。

定理 6 (1) 如果 R_1, R_2 分别是 U, V 上的模糊等价关系, 则 $R_1 \Pi R_2$ 是 $U \times V$ 上的模糊等价关系。

(2) 如果 R_1, R_2 分别是 U, V 上的等价关系, 则 $R_1 \Pi R_2$ 是 $U \times V$ 上的等价关系, 且有 $[(x, y)]_{R_1 \Pi R_2} = [x]_{R_1} \times [y]_{R_2}, \forall (x, y) \in U \times V; (U \times V) / R_1 \Pi R_2 = U / R_1 \odot V / R_2$ 。

证明: (1) $R_1 \Pi R_2$ 显然满足自反性和对称性。下面证明传递性: 由 R_1, R_2 的传递性可知

$$\begin{aligned} R_1(u_1, u_2) &\geq \bigvee_{u \in U} (R_1(u_1, u) \wedge R_1(u, u_2)) \\ &\geq R_1(u_1, u) \wedge R_1(u, u_2), \forall u_1, u, u_2 \in U \\ R_2(v_1, v_2) &\geq \bigvee_{v \in V} (R_2(v_1, v) \wedge R_2(v, v_2)) \\ &\geq R_2(v_1, v) \wedge R_2(v, v_2), \forall v_1, v, v_2 \in V \end{aligned}$$

故对任意的 $(u_1, v_1), (u, v), (u_2, v_2) \in U \times V$, 根据积模糊关系 $R_1 \Pi R_2$ 的定义, 有

$$\begin{aligned} R_1 \Pi R_2((u_1, v_1), (u_2, v_2)) &= R_1(u_1, u_2) \wedge R_2(v_1, v_2) \\ &\geq (R_1(u_1, u) \wedge R_1(u, u_2)) \wedge (R_2(v_1, v) \wedge R_2(v, v_2)) \\ &= (R_1(u_1, u) \wedge R_2(v_1, v)) \wedge (R_1(u, u_2) \wedge R_2(v, v_2)) \\ &= R_1 \Pi R_2((u_1, v_1), (u, v)) \wedge R_1 \Pi R_2((u, v), (u_2, v_2)) \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} R_1 \Pi R_2((u_1, v_1), (u_2, v_2)) &\geq \\ &\bigvee_{(u, v) \in U \times V} R_1 \Pi R_2((u_1, v_1), (u, v)) \wedge R_1 \Pi R_2((u, v), (u_2, v_2)) \end{aligned}$$

(2) 根据定义 3、定义 4 及等价类的定义直接验证可得。

定理 7 如果 R_1, R_2 分别是 U, V 上的模糊等价关系, 那么对积模糊等价关系 $R_1 \Pi R_2$, 有

$$\begin{aligned} [(u, v)]_{(R_1 \Pi R_2)_\lambda} &= [u]_{(R_1)_\lambda} \times [v]_{(R_2)_\lambda} \\ \forall \lambda \in [0, 1], \forall (u, v) \in U \times V \end{aligned}$$

证明: 对 $\forall \lambda \in [0, 1], \forall (u, v) \in U \times V$, 分两步进行:

$$(1) [(u, v)]_{(R_1 \Pi R_2)_\lambda} \subseteq [u]_{(R_1)_\lambda} \times [v]_{(R_2)_\lambda}$$

对 $\forall (u_1, v_1) \in [(u, v)]_{(R_1 \Pi R_2)_\lambda}$, 有 $R_1 \Pi R_2((u_1, v_1), (u, v)) = R_1(u_1, u) \wedge R_2(v_1, v) \geq \lambda$, 故 $R_1(u_1, u) \geq \lambda$ 且 $R_2(v_1, v) \geq \lambda$, 则 $u_1 \in [u]_{(R_1)_\lambda}$ 且 $v_1 \in [v]_{(R_2)_\lambda}$, 所以 $(u_1, v_1) \in [u]_{(R_1)_\lambda} \times [v]_{(R_2)_\lambda}$ 。

$$(2) [(u, v)]_{(R_1 \Pi R_2)_\lambda} \supseteq [u]_{(R_1)_\lambda} \times [v]_{(R_2)_\lambda}$$

对 $\forall (u_1, v_1) \in [u]_{(R_1)_\lambda} \times [v]_{(R_2)_\lambda}$, 有 $R_1(u_1, u) \geq \lambda$ 且 $R_2(v_1, v) \geq \lambda$, 所以 $R_1(u_1, u) \wedge R_2(v_1, v) = R_1 \Pi R_2((u_1, v_1), (u, v)) \geq \lambda$, 即 $(u_1, v_1) \in [(u, v)]_{(R_1 \Pi R_2)_\lambda}$ 。

很自然地, 以上概念及结果可以推广至有限个模糊等价关系的情形。

定义 5 设 $(U_i, R_i) (i=1, 2, \dots, k)$ 为模糊近似空间, 即 R_i 是论域 U_i 上的模糊等价关系, 如下定义笛卡尔积 $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k = \bigtimes_{i=1}^k U_i$ 上的模糊关系 $R_1 \Pi R_2 \Pi \dots \Pi R_k = \prod_{i=1}^k R_i$,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k R_i((x_1, x_2, \dots, x_k), (x_1', x_2', \dots, x_k')) &= \bigwedge_{i=1}^k R_i(x_i, x_i') \\ \forall (x_1, x_2, \dots, x_k), (x_1', x_2', \dots, x_k') &\in \bigtimes_{i=1}^k U_i. \end{aligned}$$

定理 8 (1) 如 R_i 是 $U_i (i=1, 2, \dots, k)$ 上的模糊等价关系, 则模糊关系 $\prod_{i=1}^k R_i$ 是笛卡尔积 $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k$ 上的模糊等价关系, 称为模糊等价关系 $R_i (i=1, 2, \dots, k)$ 的积模糊等价关系。

(2) 如果 R_i 是 $U_i (i=1, 2, \dots, k)$ 上的等价关系, 则 $\prod_{i=1}^k R_i$ 是笛卡尔积 $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k$ 上的等价关系, 且对任意 $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \bigtimes_{i=1}^k U_i$, 有

$$\begin{aligned} [(x_1, x_2, \dots, x_k)]_{\prod_{i=1}^k R_i} &= \bigtimes_{i=1}^k [x_i]_{R_i} \\ \bigtimes_{i=1}^k U_i / \prod_{i=1}^k R_i &= \bigodot_{i=1}^k (U_i / R_i) \end{aligned}$$

3.2 计算积模糊等价关系的算法

下面对有限论域 U, V , 给出求两个模糊等价关系的积模糊关系的算法。为此先定义一种类似两个矩阵的 Kronecker 积的运算, 这里称为广义 Kronecker 积运算, 具体定义如下。

定义 6 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}, B = (b_{ij})_{m \times m}$ 是两个实数矩阵, 定义它们的广义 Kronecker 积如下:

$$\begin{aligned} A \otimes B &= (a_{ij} \wedge B)_{nm \times nm} = \\ &\begin{pmatrix} a_{11} \wedge b_{11} & \dots & a_{11} \wedge b_{1m} & \dots & a_{1n} \wedge b_{11} & \dots & a_{1n} \wedge b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} \wedge b_{m1} & \dots & a_{11} \wedge b_{mm} & \dots & a_{1n} \wedge b_{m1} & \dots & a_{1n} \wedge b_{mm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \wedge b_{11} & \dots & a_{n1} \wedge b_{1m} & \dots & a_{nm} \wedge b_{11} & \dots & a_{nm} \wedge b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \wedge b_{m1} & \dots & a_{n1} \wedge b_{mm} & \dots & a_{nm} \wedge b_{m1} & \dots & a_{nm} \wedge b_{mm} \end{pmatrix}_{nm \times nm} \end{aligned}$$

定理 9 对任意 $A = (a_{ij})_{n \times n}, B = (b_{ij})_{m \times m}$, 广义 Kronecker 积具有以下性质:

- (1) $A \otimes B \neq B \otimes A$;
- (2) $\alpha(A \otimes B) = (\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B)$, 对任意的一个实数 α ;
- (3) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$;
- (4) $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$, 对任意 $A = (a_{ij})_{n \times n}, B = (b_{ij})_{m \times m}, C = (c_{ij})_{p \times p}$;
- (5) $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$, 对任意 $A = (a_{ij})_{n \times n}, B = (b_{ij})_{m \times m}, C = (c_{ij})_{m \times m}$;
- (6) $(B + C) \otimes A = (B \otimes A) + (C \otimes A)$, 对任意 $A = (a_{ij})_{n \times n}, B = (b_{ij})_{m \times m}, C = (c_{ij})_{m \times m}$ 。

证明: 根据定义 6 及矩阵的加法、转置等运算可以直接验证。

下文中, 对有限论域总假设 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, 将笛卡尔积 $U \times V$ 记为:

$$U \times V = \{(u_1, v_1), (u_1, v_2), \dots, (u_1, v_m), (u_2, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_2, v_m), \dots, (u_n, v_m)\}$$

从而, $U, V, U \times V$ 上的模糊子集可以分别用 n 维、 m 维及 nm 维列向量来表示, $U, V, U \times V$ 上的模糊等价关系可以分别用 $n \times n, m \times m, nm \times nm$ 矩阵来表示, 且有下面的结论。

定理 10 设 R_1, R_2 分别是有限论域 U, V 上的模糊等价关系, 用矩阵表示为 $R_1 = (r_{ij}^{(1)})_{n \times n}, R_2 = (r_{kl}^{(2)})_{m \times m}$, 则 $R_1 \Pi R_2 = (r_{ij}^{(1)})_{n \times n} \otimes (r_{kl}^{(2)})_{m \times m}$ 。

证明: 根据集合的标记及定义 4、定义 6, 直接验证即可。

所以, 当讨论的是两个有限论域 U, V 上的模糊等价关系 R_1, R_2 , 且 R_1, R_2 用矩阵表示时, 记号 $R_1 \Pi R_2$ 与 $R_1 \otimes R_2$ 是完全一样的。

4 积模糊近似空间中模糊知识粒的表示和解解

根据上节的讨论, 称模糊近似空间 $(U \times V, R_1 \Pi R_2)$ 为模

糊近似空间 (U, R_1) 和 (V, R_2) 的积模糊近似空间。一般地, 称模糊近似空间 $(\bigotimes_{i=1}^k U_i, \prod_{i=1}^k R_i)$ 为 k 个模糊近似空间 $(U_i, R_i) (i=1, 2, \dots, k)$ 的积模糊近似空间。本节中主要研究积模糊近似空间中上、下近似的一些基本性质及计算算法。

定义 7 设 $(U, R_1), (V, R_2)$ 是模糊近似空间, 在积模糊近似空间 $(U \times V, R_1 \Pi R_2)$ 中, 对任意 $M \in F(U \times V)$, 模糊子集 M 关于积模糊等价关系 $R_1 \Pi R_2$ 的下(上)近似为: $\forall (u, v) \in U \times V$,

$$\begin{aligned} \underline{R_1 \Pi R_2}(M)(u, v) &= \bigwedge_{(x, y) \in U \times V} ((1 - R_1 \Pi R_2((u, v), (x, y))) \vee M((x, y))) \\ \overline{R_1 \Pi R_2}(M)(u, v) &= \bigvee_{(x, y) \in U \times V} (R_1 \Pi R_2((u, v), (x, y)) \wedge M((x, y))) \end{aligned}$$

称 $(\underline{R_1 \Pi R_2}(M), \overline{R_1 \Pi R_2}(M))$ 为积模糊粗糙集。

直接验证可得, 在积模糊近似空间中有类似定理 1 中的 (1L)–(4L), (1U)–(4U) 成立。下面给出有限论域情况下, 定义 7 中上近似和下近似的算法描述。根据定义 6、定义 7、定理 2 和定理 10, 可得以下算法。

算法步骤:

- (1) 初始状态:
 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$
 $R_1 = (r_{ij}^{(1)})_{n \times n}, R_2 = (r_{kl}^{(2)})_{m \times m}$
 $U \times V = \{(u_1, v_1), (u_1, v_2), \dots, (u_1, v_m), (u_2, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_2, v_m), \dots, (u_n, v_m)\}$
 $M = (t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1m}, t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2m}, \dots, t_{n1}, t_{n2}, \dots, t_{nm})^T \in F(U \times V)$
- (2) $R_1 \Pi R_2 = R_1 \otimes R_2$;
- (3) $\underline{R_1 \Pi R_2}(M) = (R_1 \Pi R_2) \circ M = (R_1 \otimes R_2) \circ M$;
- (4) $\overline{R_1 \Pi R_2}(M) = (\overline{R_1 \Pi R_2}(M^c))^c = ((R_1 \otimes R_2) \circ M^c)^c$, M^c 是模糊集 M 的补集。

例 2 设 $U = \{u_1, u_2, u_3\}, V = \{v_1, v_2\}$, 在其上分别定义如下模糊等价关系:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.1 \\ 0.5 & 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}$$

求 $M = (0.5, 0.6, 0.7, 0.3, 0.1, 0.8)^T \in F(U \times V)$ 关于积模糊等价关系 $R_1 \Pi R_2$ 的上近似和下近似。

解: 根据求上近似和下近似的算法步骤(2), 有

$$R_1 \Pi R_2 = R_1 \otimes R_2 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0.5 & 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.7 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.7 & 1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 1 & 0.7 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}$$

由算法步骤(3)得

$$\underline{R_1 \Pi R_2}(M) = (R_1 \otimes R_2) \circ M = (0.6, 0.6, 0.7, 0.7, 0.7, 0.8)^T$$

再由算法步骤(4)得

$$\overline{R_1 \Pi R_2}(M) = ((R_1 \otimes R_2) \circ M^c)^c = (0.5, 0.5, 0.3, 0.3, 0.1, 0.3)^T$$

定义 8 设 $M \in F(U \times V)$, 如存在 $X \in F(U), Y \in F(V)$, 使得对 $\forall (u, v) \in U \times V$, 均有 $M(u, v) = X(u) \wedge Y(v)$ 成立, 则称模糊集 M 是模糊可分解的; 特别地, 如 $M \in P(U \times V)$, 且存

在 $X \in P(U), Y \in P(V)$, 使得 $M = X \times Y$, 则称集合 M 是清晰可分解的。

定理 11 如果 U, V 是有限论域, M 是模糊可分解的, 当且仅当存在 $X \in F(U), Y \in F(V)$, 使得 $M = X \otimes Y$ 。

证明: 根据定义 6 和定义 8 可知结论成立。

下面举例说明存在模糊子集不是模糊可分解的。

例 3 设 $U = \{u_1, u_2\}, V = \{v_1, v_2\}$, 于是 $U \times V = \{(u_1, v_1), (u_1, v_2), (u_2, v_1), (u_2, v_2)\}$, 取 $U \times V$ 的模糊子集 $M = (0.5, 0.3, 0.2, 0.8)^T$, 则 M 不是模糊可分解的。

解: 如果 M 是模糊可分解的, 则存在 $X \in F(U), Y \in F(V)$, 满足 $M = X \otimes Y$ 。不妨设 $X = (x_1, x_2)^T, Y = (y_1, y_2)^T$, 由广义 Kronecker 积可知, $M = (x_1 \wedge y_1, x_1 \wedge y_2, x_2 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2)^T$ 。则 $x_1 \wedge y_1 = 0.5, x_1 \wedge y_2 = 0.3, x_2 \wedge y_1 = 0.2, x_2 \wedge y_2 = 0.8$ 。所以有 $x_1 \geq 0.5, y_2 \geq 0.8$, 从而 $x_1 \wedge y_2 \geq 0.5$, 这与 $x_1 \wedge y_2 = 0.3$ 相矛盾。

定理 12 设 $(U, R_1), (V, R_2)$ 是模糊近似空间, $M \in P(U \times V)$ 是清晰可分解的, 即存在 $X \in P(U), Y \in P(V), M = X \times Y$, 则 $\forall (u, v) \in U \times V$, 有

$$(1) \underline{R_1 \Pi R_2}(M)(u, v) = \underline{R_1} X(u) \wedge \underline{R_2} Y(v);$$

$$(2) \overline{R_1 \Pi R_2}(M)(u, v) = \overline{R_1} X(u) \wedge \overline{R_2} Y(v).$$

证明: (1) $\forall u \in U$, 根据定义 1, 有

$$\begin{aligned} \underline{R_1} X(u) &= \bigwedge_{u_1 \in U} ((1 - R_1(u, u_1)) \vee X(u_1)) \\ &= (\bigwedge_{u_1 \in X} ((1 - R_1(u, u_1)) \vee X(u_1))) \wedge (\bigwedge_{u_1 \notin X} ((1 - R_1(u, u_1)) \vee X(u_1))) \\ &= (\bigwedge_{u_1 \in X} ((1 - R_1(u, u_1)) \vee 1)) \wedge (\bigwedge_{u_1 \notin X} ((1 - R_1(u, u_1)) \vee 0)) \\ &= \bigwedge_{u_1 \notin X} (1 - R_1(u, u_1)) \end{aligned}$$

$$\text{同理可得, 对 } \forall v \in V, \underline{R_2} Y(v) = \bigwedge_{v_1 \notin Y} (1 - R_2(v, v_1)).$$

由 $M = X \times Y$, 当然对 $\forall (u, v) \in U \times V$, 有 $M(u, v) = X(u) \wedge Y(v)$, 根据定义 7, 有

$$\begin{aligned} \underline{R_1 \Pi R_2}(M)(u, v) &= \bigwedge_{(u_1, v_1) \in U \times V} ((1 - R_1 \Pi R_2((u, v), (u_1, v_1))) \vee M(u_1, v_1)) \\ &= \bigwedge_{(u_1, v_1) \in M} ((1 - R_1 \Pi R_2((u, v), (u_1, v_1))) \vee M(u_1, v_1)) \wedge \bigwedge_{(u_1, v_1) \notin M} ((1 - R_1 \Pi R_2((u, v), (u_1, v_1))) \vee M(u_1, v_1)) \\ &= 1 \wedge \bigwedge_{(u_1, v_1) \notin M} ((1 - R_1 \Pi R_2((u, v), (u_1, v_1))) \vee 0) \\ &= \bigwedge_{(u_1, v_1) \notin M} (1 - R_1 \Pi R_2((u, v), (u_1, v_1))) \\ &= \bigwedge_{(u_1, v_1) \notin X \times Y} (1 - R_1 \Pi R_2((u, v), (u_1, v_1))) \\ &= \bigwedge_{u_1 \notin X, v_1 \in V} (1 - R_1 \Pi R_2((u, v), (u_1, v_1))) \wedge \bigwedge_{u_1 \in X, v_1 \notin Y} (1 - R_1 \Pi R_2((u, v), (u_1, v_1))) \\ &= \bigwedge_{u_1 \notin X} (\bigwedge_{v_1 \in V} (1 - R_1(u, u_1) \wedge R_2(v, v_1))) \wedge \bigwedge_{v_1 \notin Y} (\bigwedge_{u_1 \in X} (1 - R_1(u, u_1) \wedge R_2(v, v_1))) \\ &= \bigwedge_{u_1 \notin X} (\bigwedge_{v_1 \in V} ((1 - R_1(u, u_1)) \vee (1 - R_2(v, v_1)))) \wedge \bigwedge_{v_1 \notin Y} (\bigwedge_{u_1 \in X} ((1 - R_1(u, u_1)) \vee (1 - R_2(v, v_1)))) \\ &= \bigwedge_{u_1 \notin X} (\bigwedge_{v_1 \in V} ((1 - R_1(u, u_1)) \vee (1 - R_2(v, v_1))) \wedge \bigwedge_{v_1 \in V, v_1 \neq v} ((1 - R_1(u, u_1)) \vee (1 - R_2(v, v_1)))) \wedge \bigwedge_{v_1 \notin Y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((\bigwedge_{u_1=u} ((1-R_1(u, u_1)) \vee (1-R_2(v, v_1))) \wedge \bigwedge_{u_1 \in Y, u_1 \neq u} \\
& ((1-R_1(u, u_1)) \vee (1-R_2(v, v_1)))) \\
& = \bigwedge_{u_1 \notin X} (\bigwedge_{v_1=v} ((1-R_1(u, u_1)) \vee 0) \wedge \bigwedge_{v_1 \in V, v_1 \neq v} ((1-R_1 \\
& (u, u_1)) \vee (1-R_2(v, v_1))) \wedge \bigwedge_{v_1 \notin Y} (\bigwedge_{u_1=u} ((1-R_1(u, \\
& u_1)) \vee 0) \wedge \bigwedge_{u_1 \in Y, u_1 \neq u} ((1-R_1(u, u_1)) \vee (1-R_2(v, \\
& v_1)))) \\
& = \bigwedge_{u_1 \notin X} (1-R_1(u, u_1)) \wedge \bigwedge_{v_1 \notin Y} (1-R_1(u, u_1))
\end{aligned}$$

所以, $\forall (u, v) \in U \times V$, 有

$$\begin{aligned}
& \overline{R_1 \Pi R_2}(M)(u, v) \\
& = \bigwedge_{u_1 \notin X} (1-R_1(u, u_1)) \wedge \bigwedge_{v_1 \notin Y} (1-R_1(u, u_1)) \\
& = \overline{R_1 X}(u) \wedge \overline{R_2 Y}(v)
\end{aligned}$$

(2) 根据定义 7, $\forall (u, v) \in U \times V$, 有

$$\begin{aligned}
& \overline{R_1 \Pi R_2}(M)(u, v) \\
& = \bigvee_{(u_1, v_1) \in U \times V} \overline{R_1 \Pi R_2}((u, v), (u_1, v_1)) \wedge M(u_1, v_1) \\
& = \bigvee_{(u_1, v_1) \in U \times V} (R_1(u, u_1) \wedge R_2(v, v_1)) \wedge (X(u_1) \wedge Y \\
& (v_1)) \\
& = \bigvee_{(u_1, v_1) \in U \times V} (R_1(u, u_1) \wedge (X(u_1)) \wedge (R_2(v, v_1) \wedge Y \\
& (v_1)) \\
& = (\bigvee_{u_1 \in U} (R_1(u, u_1) \wedge (X(u_1)))) \wedge (\bigvee_{v_1 \in V} (R_2(v, v_1) \wedge Y \\
& (v_1))) \\
& = \overline{R_1 X}(u) \wedge \overline{R_2 Y}(v)
\end{aligned}$$

定理 13 设 $(U, R_1), (V, R_2)$ 是近似空间, 即 R_1, R_2 分别是 U, V 上的等价关系, 且 $M \in P(U \times V)$ 是清晰可分解的, 即存在 $X \in P(U), Y \in P(V), M = X \times Y$, 则

$$\begin{aligned}
(1) \overline{R_1 \Pi R_2}(M) & = \bigcup_{[x]_{R_1} \in \overline{R_1(X)/R_1}, [y]_{R_2} \in \overline{R_2(Y)/R_2}} [x]_{R_1} \times [y]_{R_2} \\
& = \bigcup_{A \in \overline{R_1(X)/R_1} \odot \overline{R_2(Y)/R_2}} A \\
(2) \overline{R_1 \Pi R_2}(M) & = \bigcup_{[x]_{R_1} \in \overline{R_1(X)/R_1}, [y]_{R_2} \in \overline{R_2(Y)/R_2}} [x]_{R_1} \times [y]_{R_2} \\
& = \bigcup_{A \in \overline{R_1(X)/R_1} \odot \overline{R_2(Y)/R_2}} A
\end{aligned}$$

证明: 根据定理 6(2) 及定理 12 可得。

定理 12 对模糊可分解的模糊子集是否也成立? 我们猜测定理 12 可以推广到模糊可分解的情形, 遗憾的是暂时没能给出证明。下面构造一个对模糊可分解集成立的实例。

例 4 有限论域及其上的模糊等价关系与例 3 中一样, 并设 $U \times V$ 上的模糊子集如下:

$$M = (0.1, 0.1, 0.4, 0.8, 0.4, 0.5)^T = X \otimes Y$$

式中, $X = (0.1, 0.8, 0.5)^T, Y = (0.4, 0.9)^T$, 则 M 是一个模糊可分解集。

根据前面的相关算法, 计算可得:

$$\overline{R_1 X} = R_1 \circ X = (0.5, 0.8, 0.5)^T$$

$$\underline{R_1 X} = (R_1 \circ X^c)^c = (0.1, 0.5, 0.5)^T$$

$$\overline{R_2 Y} = R_2 \circ Y = (0.7, 0.9)^T$$

$$\underline{R_2 Y} = (R_2 \circ Y^c)^c = (0.4, 0.4)^T$$

$$\overline{R_1 \Pi R_2}(M) = (R_1 \otimes R_2) \circ M$$

$$= (0.5, 0.5, 0.7, 0.8, 0.5, 0.5)^T$$

$$\begin{aligned}
& \overline{R_1 \Pi R_2}(M) = ((R_1 \otimes R_2) \circ M)^c \\
& = (0.1, 0.1, 0.4, 0.4, 0.4, 0.4)^T
\end{aligned}$$

所以有 $\overline{R_1 \Pi R_2}(M) = \overline{R_1 X} \otimes \overline{R_2 Y}, \underline{R_1 \Pi R_2}(M) = \underline{R_1 X} \otimes \underline{R_2 Y}$ 。

定理 14 设 $(U, R_1), (V, R_2)$ 是模糊近似空间, 积模糊近似空间 $(U \times V, R_1 \Pi R_2)$, 如果 $M \in F(U \times V)$ 是模糊可分解的, 则对 $\forall \lambda \in [0, 1], M_\lambda$ 是清晰可分解的。

证明: 因为 M 是模糊可分解的, 由定义 8 知, 存在 $X \in F(U), Y \in F(V)$, 使得对 $\forall (u, v) \in U \times V$, 有 $M(u, v) = X(u) \wedge Y(v)$ 成立。因此对 $\forall \lambda \in [0, 1], (u, v) \in M_\lambda$ 当且仅当 $M(u, v) = X(u) \wedge Y(v) \geq \lambda$, 即 $X(u) \geq \lambda, Y(v) \geq \lambda$, 所以 $u \in X_\lambda, v \in Y_\lambda$, 故 $M_\lambda = X_\lambda \times Y_\lambda$, 即 M_λ 是清晰可分解的。

根据定理 7、定理 13 和定理 14, 那么积模糊近似空间 $(U \times V, R_1 \Pi R_2)$ 中的模糊可分解子集 M 的 λ -截集 M_λ 关于 $(R_1 \Pi R_2)_\lambda$ 的上近似、下近似可以分解为一维空间上子集的上下近似的合成。具体描述如下:

(1) $\forall (u, v) \in U \times V, M(u, v) = X(u) \wedge Y(v), \forall \lambda \in [0, 1], M_\lambda = X_\lambda \times Y_\lambda$ 。

(2) 由定理 6 和定理 7 可知,

$$(R_1 \Pi R_2)_\lambda = (R_1)_\lambda \Pi (R_2)_\lambda;$$

(3) 由定理 13 可得:

$$\begin{aligned}
& \overline{(R_1 \Pi R_2)_\lambda}(M_\lambda) = \overline{(R_1 \Pi R_2)_\lambda}(X_\lambda \times Y_\lambda) \\
& = \bigcup_{[x]_{(R_1)_\lambda} \in \overline{(R_1)_\lambda(X_\lambda)/(R_1)_\lambda}, [y]_{(R_2)_\lambda} \in \overline{(R_2)_\lambda(Y_\lambda)/(R_2)_\lambda}} [x]_{(R_1)_\lambda} \times [y]_{(R_2)_\lambda} \\
& = \bigcup_{A \in \overline{(R_1)_\lambda(X_\lambda)/(R_1)_\lambda} \odot \overline{(R_2)_\lambda(Y_\lambda)/(R_2)_\lambda}} A \\
& \overline{(R_1 \Pi R_2)_\lambda}(M_\lambda) = \overline{(R_1 \Pi R_2)_\lambda}(X_\lambda \times Y_\lambda) \\
& = \bigcup_{[x]_{(R_1)_\lambda} \in \overline{(R_1)_\lambda(X_\lambda)/(R_1)_\lambda}, [y]_{(R_2)_\lambda} \in \overline{(R_2)_\lambda(Y_\lambda)/(R_2)_\lambda}} [x]_{(R_1)_\lambda} \times [y]_{(R_2)_\lambda} \\
& = \bigcup_{A \in \overline{(R_1)_\lambda(X_\lambda)/(R_1)_\lambda} \odot \overline{(R_2)_\lambda(Y_\lambda)/(R_2)_\lambda}} A
\end{aligned}$$

以上结果表明, 二维积模糊近似空间的模糊可分解集可以用分层递阶的思想去近似描述, 也可以用一维近似空间上的知识粒来表示, 或者说可以用一维的知识粒来合成。

结束语 本文采用构造性的方法, 对模糊近似空间进行积运算, 得到有限个模糊近似空间的积模糊近似空间; 研究了它的一些基本性质, 得到一些有意义的结果, 特别是对可分解子集及模糊可分解子集的上、下近似进行了刻画。

文中建立的积模糊近似空间模型将为基于关系数据库的粒度计算问题提供理论与方法支持。智能信息处理领域一直受到计算量的威胁, 数据的组织形式更是严重影响计算速度。关系数据库采用笛卡尔集连接的方式, 既是一种压缩存储量的方式, 又反映了事物的颗粒。我们构建的模型与数据仓库理论及粒度计算范式契合, 同时基于两(有限)个互不相同的论域的积模糊粗糙集模型, 扩展了空间的维度。因此在实际中应该具有更广泛的应用背景和领域。正在进一步研究以下问题: (1) 继续完善该模糊粗糙集模型的理论, 如研究高维模糊近似空间上模糊粗糙集的近似精度、粗糙度等概念及与低维模糊近似空间中相关模糊模糊集的近似精度、粗糙度的关系等; (2) 考察一个笛卡尔积集上的模糊近似空间的分解性; (3) 研究积模糊粗糙集模型的公理化刻画及算法实现; (4) 最重要的是根据积模糊粗糙模型, 从论域分解的角度探索降

(下转第 232 页)

- ring, 2007, 19(8): 1131-1144
- [8] Zhu W. Relationship between generalized rough sets based on binary relation and covering[J]. Information Sciences, 2009, 179(3): 210-225
- [9] Zhu W, Wang F Y. A new type of covering rough set [C]//3rd International IEEE Conference Intelligently Stems. London: [s. n.], 2006: 444-449
- [10] 胡军, 王国胤. 覆盖粗糙集的模糊度[J]. 重庆邮电大学学报, 2009, 21(4): 490-493
- [11] 魏荣, 刘保仓, 史开泉. 基于覆盖广义粗集的模糊性[J]. 计算机科学, 2007, 34(1): 153-155
- [12] 徐伟华, 张文修. 覆盖广义粗糙集的模糊性[J]. 模糊系统与数学, 2006, 20(6): 115-121
- [13] 徐菲菲, 苗夺谦, 李国道, 等. 基于最简覆盖的粗糙模糊集的粗糙熵[J]. 计算机科学, 2006, 33(10): 179-181
- [14] 王健鹏, 戴岱, 周正春. 基于覆盖的模糊粗糙集模型[J]. 周口师范学院学报, 2004, 21(2): 20-23
- [15] 余美真, 李进金. 覆盖粗糙模糊集的不确定性度量[J]. 模糊系统与数学, 2009, 23(6): 145-148
- [16] 李凡, 徐章艳, 饶勇. Vague集[J]. 计算机科学, 2000, 27(9): 12-24, 28
- [17] 闫德勤, 迟忠先. 粗糙集与 Vague 集[J]. 计算机科学, 2004, 31(8): 133-135
- [18] 刘金良, 闫瑞霞, 姚炳学. 粗糙 Vague 集的不确定性度量[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(1): 104-107
- [19] 朱六兵. 粗糙集与 Vague 集的理论及应用研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2006
- [20] 张倩倩, 徐久成, 胡玉文. 基于覆盖的粗糙 Vague 集模型研究[J]. 广西大学学报, 2009, 35(5): 653-657, 662
- [21] 徐久成, 张倩倩. 覆盖粗糙 Vague 集的不确定性度量研究[J]. 计算机科学, 2010, 37(10): 225-227
- [22] 胡军, 王国胤. 覆盖粒度空间的层次模型[J]. 南京大学学报, 2008, 44(5): 551-558
- [23] 刘纪芹, 史开泉. 基于知识含量的粗糙集不确定性度量[J]. 计算机科学, 2007, 34(7): 171-173
- [24] 王国胤, 张清华. 不同知识粒度下粗糙集的不确定性研究[J]. 计算机学报, 2008, 31(9): 1588-1598
- [25] 解滨, 李磊军, 米据生. 基于知识粒度的粗糙集的不确定性度量[J]. 计算机学报, 2010, 37(9): 225-228
- [26] 胡军, 王国胤. 一种覆盖粗糙模糊集模型[J]. 软件学报, 2010, 21(5): 968-977
- [27] 胡军, 王国胤. 粗糙集的不确定性度量准则[J]. 模式识别与人工智能, 2010, 23(5): 606-615
- [28] 李大湘, 彭进业, 李展. 基于半监督多示例学习的对象图像检索[J]. 控制与决策, 2010(7): 981-986
- [29] 李大湘, 彭进业, 贺进芳. 基于视觉语义与 RSSVM 的图像检索[J]. 华南理工大学学报: 自然科学版, 2010(04): 156-161

(上接第 204 页)

低高维模糊粗糙集计算的复杂度问题,并在实际问题的处理中得到应用。

参考文献

- [1] Pawlak Z. Rough sets [J]. International Journal of Computer and Information Science, 1982, 11: 341-356
- [2] Pawlak Z. Rough set theory and its applications to data analysis [J]. Cybernetics and Systems, 1998, 29: 661-688
- [3] 张文修, 吴志伟, 梁吉业, 等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001
- [4] Wu W Z, Zhang W X, Li H Z. Knowledge acquisition in incomplete fuzzy information systems via the rough set approach[J]. Expert Systems, 2003, 20: 280-286
- [5] Yao Y Y. Relational interpretations of neighborhood operators and rough set approximation operators[J]. Information Sciences, 1998, 111: 239-259
- [6] Dubois D, Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets[J]. International Journal of General System, 1990, 17: 191-208
- [7] Wu W Z, Mi J S, Zhang W X. Generalized fuzzy rough sets[J]. Information Sciences, 2003, 51: 263-282
- [8] Liu G L. Generalized rough sets over fuzzy lattices[J]. Information Sciences, 2008, 178: 1651-1662
- [9] Yao Y Y. Granular computing: Basic issues and possible solutions [C]//Paul P, ed. Proceedings of the 5th Joint Conference on Information Sciences. USA: Elsevier Publishing Company, 2000: 186-189
- [10] Pawlak Z. Fuzzy sets and information granularity[C]//Gupta M, Ragade R, Yager R, et al., eds. Advances in Fuzzy Set Theory and Applications. North-Holland, Amsterdam Publishing Co., 1979: 3-18
- [11] Pawlak Z. Fuzzy Logic=Computing with Words [J]. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 1996, 2: 103-111
- [12] Yao Y Y. Granular computing using neighborhood systems [C]//Roy R. Advances in soft computing: Engineering design and manufacturing. London: Springer-Verlag Company, 1999: 539-553
- [13] 苗夺谦, 范世栋. 知识的粒度计算及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22: 48-56
- [14] 张钊, 张铃. 问题求解的理论及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1990
- [15] 张铃, 张钊. 模糊商空间理论[J]. 软件学报, 2003, 14: 770-776
- [16] 吴明芬, 沈挺, 曹存根, 等. 模糊商空间理论两个定理的补充[J]. 北京交通大学学报, 2009, 33(6): 86-90
- [17] Yao Y Y, Lingras P J. Interpretations of Belief Functions in the Theory of Rough Sets[J]. Information Sciences, 1998, 104: 81-106
- [18] Li T J. Rough approximation operators on two universes of discourse and their fuzzy extensions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2008, 159: 3033-3050
- [19] 邱雅竹, 付蓉. 两个论域上的粗糙集模型及其应用[J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2005, 28: 15-18
- [20] 高明, 王继成. 双论域下粗糙集数据约简方法研究[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45: 144-146
- [21] 吴明芬, 曹存根. 近似空间的笛卡尔积粗糙集模型及其可分解性[J]. 计算机科学, 2011, 38: 225-228
- [22] 陈卫东, 张维明. 笛卡尔积运算对数据库数据质量的传递影响[J]. 计算机科学, 2008, 35: 210-213