三支类背景上的规则获取

任睿思[1] 魏 玲[1] 祁建军[2]
(西北大学数学学院 西安 710127)[1] (西安电子科技大学计算机学院 西安 710071)[2]

摘 要 规则提取是三支概念分析中的一个重要问题。首先,基于属性导出三支概念,定义了两种三支类背景,即三支条件类背景和三支决策类背景,给出了类背景上的类概念并且研究了类概念的结构。其次,讨论了三支决策类背景上的类概念与三支弱协调决策形式背景上的属性导出三支概念之间的关系。然后,提出了三支决策类背景上的规则获取方法,并且通过比较证明了基于三支类背景获取的规则优于基于三支弱协调决策形式背景获取的规则。最后,利用三支条件类背景给出了反向规则与双向规则的获取方法。

关键词 属性导出三支概念,三支弱协调决策形式背景,三支条件类背景,三支决策类背景,规则获取

中图法分类号 O29,TP18 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.10.004

Rules Acquisition on Three-way Class Contexts

REN Rui-si[1] WEI Ling[1] QI Jian-jun[2]
(School of Mathematics,Northwest University,Xi'an 710127,China)[1]
(School of Computer Science & Technology,Xidian University,Xi'an 710071,China)[2]

Abstract Rules acquisition is an important problem in three-way concept analysis. Based on attribute-induced three-way concepts,two kinds of three-way class contexts were defined,namely three-way condition class contexts and three-way decision class contexts. The class concepts in these two different three-way class contexts were defined and the structures of class concepts were studied. Moreover,the relationships between the class concepts in three-way decision class contexts and the attribute-induced three-way concepts in three-way weakly consistent formal decision contexts were discussed. Then the rules based on three-way decision class concepts were presented,and the way to acquire them was shown. Furthermore,compared to the rules acquired from the three-way weakly consistent formal decision contexts,the class context based rules were proved to be superior than three-way weakly consistent context based rules. Specifically,the number of class context based rules is smaller than the number of three-way weakly consistent context based rules,but for each three-way weakly consistent context based rule,there exists a class context based rule containing more know-ledge. Finally,considering the three-way condition class context,the reverse rules were defined. Considering both three-way condition class contexts and three-way decision class contexts,the double directed rules were presented.

Keywords Attribute-induced three-way concept,Three-way weakly consistent formal decision context,Three-way condition class context,Three-way decision class context,Rules acquisition

1 引言

三支概念分析(3-Way Concept Analysis,3WCA)[1-3]是Qi等于2014年提出的将三支决策(3-Way Decisions,3WD)[4]运用在形式概念分析(Formal Concept Analysis,FCA)[5-6]中的数据分析工具[7-8]。3WD是Yao[4]于2012年提出的,其将实体集分为正域、负域与边界域3个部分,并基于3个域分别给出相应的接受规则、拒绝规则和不承诺规则。3WD更加符合人类思维的决策行为。

规则获取是FCA中重要的研究课题。张文修等[9]提出了决策形式背景,并给出了强协调决策形式背景上决策规则的提取方法。李金海[10-12]在约简后的决策形式背景中给出了前件更少的决策规则。李涛等[13]运用闭标记[12]剔除了冗余的决策规则。朱治春等[14]利用Prediger[15]提出的类背景这一概念,给出了类背景上的规则获取方法,并证明了类背景上的规则优于决策背景上的规则。

在FCA的研究中,规则获取是基于经典的二支概念格进行的,因此在3WCA中,自然可以利用三支概念格来获取内容更加丰富的规则。如果基于三支概念重新定义三支类背景,那么基于类背景一定可以得到知识更为丰富的规则。本文首先基于属性导出三支概念,构造了两种三支类背景,即三支决策类背景与三支条件类背景,并定义了这两种类背景上

到稿日期:2018-04-17 返修日期:2018-05-18 本文受国家自然科学基金项目(61772021,11371014)资助。
任睿思(1991-),女,博士,主要研究方向为形式概念分析;**魏 玲**(1972-),女,博士,教授,主要研究方向为粗糙集、形式概念分析等,E-mail:wl@nwu.edu.cn(通信作者);**祁建军**(1970-),男,博士,副教授,主要研究方向为形式概念分析、三支决策。

的类概念。然后,在三支决策类背景上给出了决策规则的获取方法,并研究了三支决策类背景上的规则与基于三支协调性的规则[16]之间的关系,进一步证明了类背景上的规则更优。最后,结合三支条件类背景,给出了反向规则以及双向规则的获取方法,极大地丰富了决策规则的研究。

2 预备知识

本节给出了后文所需的形式概念分析以及三支概念分析的相关基本概念。

2.1 形式概念分析

定义 1[6] 称三元组(G,M,I)为一个形式背景,其中$G=\{g_1,g_2,\cdots,g_t\}$为对象集,每个$g_i(i\leqslant t)$称为一个对象;$M=\{m_1,m_2,\cdots,m_s\}$为属性集,每个$m_j(j\leqslant s)$称为一个属性;I为G和M之间的二元关系,$I\subseteq G\times M$。若$(g,m)\in I$,则称对象g具有属性m,用gIm表示。

对于形式背景(G,M,I)上的任意对象集$X\subseteq G$和属性集$A\subseteq M$,可以定义一对正算子$*:P(G)\rightarrow P(M)$与$*:P(M)\rightarrow P(G)$:

$$X^{*}=\{m\in M\mid \forall g\in X,gIm\}$$

$$A^{*}=\{g\in G\mid \forall m\in A,gIm\}$$

若$\forall g\in G$,满足$\{g\}^{*}\neq\emptyset$,$\{g\}^{*}\neq M$,且$\forall m\in M$,满足$\{m\}^{*}\neq\emptyset$,$\{m\}^{*}\neq G$,则称形式背景(G,M,I)是正则的。如果(G,M,I)为一形式背景,则(G,M,I^c)也为一个形式背景,称作形式背景(G,M,I)的补背景,其中$I^c=G\times M-I$。

基于正算子,定义形式概念如下。

定义 2[6] 设(G,M,I)为一个形式背景,若对象集X与属性集A形成的二元组(X,A)满足$X^{*}=A$且$X=A^{*}$,则称(X,A)是一个形式概念,简称概念。其中X称为概念的外延,A称为概念的内涵。

形式背景(G,M,I)的全体概念记为$L(G,M,I)$,对于任意两个概念(X_1,A_1),$(X_2,A_2)\in L(G,M,I)$,它们的偏序关系被定义为:

$$(X_1,A_1)\leqslant(X_2,A_2)\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2\Leftrightarrow A_1\supseteq A_2$$

分别定义它们的下确界和上确界为:

$$(X_1,A_1)\wedge(X_2,A_2)=(X_1\cap X_2,(A_1\cup A_2)^{**})$$

$$(X_1,A_1)\vee(X_2,A_2)=((X_1\cup X_2)^{**},A_1\cap A_2)$$

则$L(G,M,I)$是一个完备格,称为概念格。

定义 3[9] 称五元组(G,M,I,N,J)为一个决策形式背景,其中(G,M,I)和(G,N,J)都是形式背景,M称为条件属性,N称为决策属性,并且$M\cap N=\emptyset$。

2.2 三支概念分析

本节给出属性导出三支概念格的相关知识。下面首先给出任意非空有限集合幂集的笛卡儿积上的运算。

设U是非空有限集合,$P(U)$表示U的幂集,$DP(U)$表示笛卡儿积$P(U)\times P(U)$。对于任意(A,B),$(C,D)\in DP(U)$,定义如下运算:

$$(A,B)\cap(C,D)=(A\cap C,B\cap D)$$

$$(A,B)\cup(C,D)=(A\cup C,B\cup D)$$

$$(A,B)^c=(U-A,U-B)=(A^c,B^c)$$

$$(A,B)\subseteq(C,D)\Leftrightarrow A\subseteq C\text{ 且 }B\subseteq D$$

与2.1节中给出的正算子的定义类似,对于形式背景(G,M,I)上的任意对象集$X\subseteq G$和属性集$A\subseteq M$,可以定义一对负算子$\bar{*}:P(G)\rightarrow P(M)$与$\bar{*}:P(M)\rightarrow P(G)$如下[2]:

$$X^{\bar{*}}=\{m\in M\mid \forall g\in X,gI^cm\}$$

$$A^{\bar{*}}=\{g\in G\mid \forall m\in A,gI^cm\}$$

若同时考虑正算子与负算子,可以定义形式背景上的一对属性导出三支算子如下。

定义 4[2] 设(G,M,I)为一个形式背景,对任意对象集$X,Y\subseteq G$和属性集$A\subseteq M$,可定义一对属性导出三支算子$\lhd:P(M)\rightarrow DP(G)$和$\rhd:DP(G)\rightarrow P(M)$如下:

$$A^{\lhd}=(A^{*},A^{\bar{*}})$$

$$(X,Y)^{\rhd}=\{m\in M\mid m\in X^{*}\text{ 且 }m\in Y^{\bar{*}}\}=X^{*}\cap Y^{\bar{*}}$$

基于属性导出三支算子,属性导出三支概念的定义如下。

定义 5[2] 设(G,M,I)为一个形式背景,$((X,Y),A)$称作属性导出三支概念(简称AE-概念),当且仅当$A^{\lhd}=(X,Y)$且$(X,Y)^{\rhd}=A$。其中,$X,Y\subseteq G$,$A\subseteq M$。(X,Y)称为AE-概念的外延,A称为AE-概念的内涵。

由定义5可知,若$((X,Y),A)$为形式背景(G,M,I)上的属性导出三支概念,则X中的对象都具有A中的所有属性,而Y中的对象都不具有A中的所有属性。

形式背景(G,M,I)上的全体AE-概念记为$AEL(G,M,I)$,对于任意两个AE-概念,$((X_1,Y_1),A_1)$,$((X_2,Y_2),A_2)\in AEL(G,M,I)$,它们的偏序关系被定义为:

$$((X_1,Y_1),A_1)\leqslant((X_2,Y_2),A_2)\Leftrightarrow(X_1,Y_1)\subseteq(X_2,Y_2)\Leftrightarrow A_2\subseteq A_1$$

分别定义它们的下确界和上确界为:

$$((X_1,Y_1),A_1)\wedge((X_2,Y_2),A_2)=((X_1,Y_1)\cap(X_2,Y_2),(A_1\cup A_2)^{\lhd\rhd})$$

$$((X_1,Y_1),A_1)\vee((X_2,Y_2),A_2)=(((X_1,Y_1)\cup(X_2,Y_2))^{\rhd\lhd},A_1\cap A_2)$$

则$AEL(G,M,I)$是一个完备格,称为属性导出三支概念格。

3 三支弱协调决策形式背景的三支类背景

本节基于属性导出三支概念,给出了三支弱协调决策背景的三支类背景,并给出了三支类背景上类概念的定义,同时讨论了类概念与三支概念之间的关系。

3.1 三支类背景与类概念

因为决策形式背景的三支弱协调与三支概念格间的细于关系相关,故本文首先定义属性导出三支概念格间的细于关系如下。

定义 6 $AEL(G,M_1,I_1)$与$AEL(G,M_2,I_2)$为两个属性导出三支概念格,$((X_1,Y_1),A_1)\in AEL(G,M_1,I_1)$,若存在单射$\beta:AEL(G,M_2,I_2)\rightarrow AEL(G,M_1,I_1)$满足:

1)$\beta(((G,G),\emptyset))=((G,G),\emptyset)$,$\beta(((\emptyset,\emptyset),M_2))=((\emptyset,\emptyset),M_1)$;

2)$\forall((X_2,Y_2),A_2)\in AEL(G,M_2,I_2)$,有$\beta(((X_2,Y_2),A_2))=((X_1,Y_1),A_1)$且$(X_1,Y_1)\subseteq(X_2,Y_2)$。

则称$AEL(G,M_1,I_1)$细于$AEL(G,M_2,I_2)$,记作$AEL(G,M_1,I_1)\leqslant AEL(G,M_2,I_2)$,称映射$\beta$为蕴含映射。

下面给出基于属性导出三支概念格弱协调决策形式背景的定义。

定义 7　设(G,M,I,N,J)是一个决策形式背景。若存在蕴含映射β，使得$AEL(G,M,I)\leqslant AEL(G,N,J)$，则称该决策形式背景是基于属性导出三支概念格弱协调的。在不混淆的情况下，简称决策形式背景(G,M,I,N,J)是三支弱协调的。

下面给出三支弱协调决策形式背景的三支类背景的定义。

定义 8　设(G,M,I,N,J)为三支弱协调决策形式背景，$AEL_E(G,M,I)$是(G,M,I,N,J)的条件属性导出三支概念的非空外延集，$AEL_E(G,N,J)$是(G,M,I,N,J)的决策属性导出三支概念的非空外延集。称背景$K_{N,M}=(AEL_E(G,M,I),N,J_N)$为$(G,M,I,N,J)$的三支决策类背景，其中，$(X,Y)\in AEL_E(G,M,I)$，$d\in N$，关系$J_N$定义为$(X,Y)J_Nd\Leftrightarrow\forall g_i\in X,g_iJd$且$\forall g_j\in Y,g_jJ^cd$。背景$K_{M,N}=(AEL_E(G,N,J),M,I_M)$为$(G,M,I,N,J)$的三支条件类背景，其中，$(W,Z)\in AEL_E(G,N,J)$，$m\in M$，关系$I_M$定义为$(W,Z)I_Mm\Leftrightarrow\forall g_t\in W,g_tIm$且$\forall g_h\in Z,g_hI^cm$。

在类背景[15]中，我们不再考虑单个对象与单个属性之间的关系，而是考虑对象类与属性之间的关系。具体地，在三支决策类背景$K_{N,M}=(AEL_E(G,M,I),N,J_N)$中，原始决策形式背景中的对象被条件属性导出的三支算子分成了不同的对象类，且三支决策类背景$K_{N,M}$给出了这些对象类与决策属性的关系J_N，因此这些对象类的概念结构可基于决策属性进行分析与获取。反之，在三支条件类背景$K_{M,N}=(AEL_E(G,N,J),M,I_M)$中，原始决策形式背景中的对象集被基于决策属性的三支算子分为了不同的对象类，而这些对象类的概念结构又可基于条件属性进行分析与获取。

下面以决策类背景$K_{N,M}$为例，给出类背景中类概念的定义与获取方法。

与经典形式概念的获取方式类似，在三支决策类背景上可定义如下类算子。

定义 9　设$K_{N,M}=(AEL_E(G,M,I),N,J_N)$为一个三支决策类背景，对任意的条件属性导出三支概念的非空外延集$C\subseteq AEL_E(G,M,I)$和决策属性集$A\subseteq N$，定义一对算子$\blacktriangleleft$：$P(N)\rightarrow P(AEL_E(G,M,I))$和$\blacktriangleright$：$P(AEL_E(G,M,I))\rightarrow P(N)$如下：

$$A^{\blacktriangleleft}=\{(X,Y)\in AEL_E(G,M,I)\mid\forall d\in A,(X,Y)J_Nd\}$$

$$C^{\blacktriangleright}=\{d\in N\mid\forall(X,Y)\in C,(X,Y)J_Nd\}$$

由类算子的定义可以看出，其本质就是类背景上的一对$*$算子，但是由于类背景上的关系包含了“共同具有”与“共同不具有”两种语义，因此类算子计算得到的结果所含的信息更加丰富。下面给出这对算子的性质。

定理 1　设$K_{N,M}=(AEL_E(G,M,I),N,J_N)$为一个三支决策类背景，且$C,C_1,C_2\subseteq AEL_E(G,M,I)$，$A,A_1,A_2\subseteq N$，则有：

1）$C\subseteq C^{\blacktriangleright\blacktriangleleft}$，$A\subseteq A^{\blacktriangleleft\blacktriangleright}$；

2）$C_1\subseteq C_2\Rightarrow C_2^{\blacktriangleright}\subseteq C_1^{\blacktriangleright}$，$A_1\subseteq A_2\Rightarrow A_2^{\blacktriangleleft}\subseteq A_1^{\blacktriangleleft}$；

3）$C^{\blacktriangleright}=C^{\blacktriangleright\blacktriangleleft\blacktriangleright}$，$A^{\blacktriangleleft}=A^{\blacktriangleleft\blacktriangleright\blacktriangleleft}$；

4）$C\subseteq A^{\blacktriangleleft}\Leftrightarrow A\subseteq C^{\blacktriangleright}$；

5）$(C_1\cup C_2)^{\blacktriangleright}=C_1^{\blacktriangleright}\cap C_2^{\blacktriangleright}$，$(A_1\cup A_2)^{\blacktriangleleft}=A_1^{\blacktriangleleft}\cap A_2^{\blacktriangleleft}$；

6）$(C_1\cap C_2)^{\blacktriangleright}\supseteq C_1^{\blacktriangleright}\cup C_2^{\blacktriangleright}$，$(A_1\cap A_2)^{\blacktriangleleft}\supseteq A_1^{\blacktriangleleft}\cup A_2^{\blacktriangleleft}$；

7）若$C=\{(X,Y)\}$，则$C^{\blacktriangleright}=C^{\triangleright_N}$。

证明：1）$\forall(X,Y)\in C$，由$C^{\blacktriangleright}$的定义可知，$\forall d\in C^{\blacktriangleright}$，有$(X,Y)J_Nd$，故由$C^{\blacktriangleright\blacktriangleleft}$的定义可知$(X,Y)\in C^{\blacktriangleright\blacktriangleleft}$，由$(X,Y)$的任意性可知$C\subseteq C^{\blacktriangleright\blacktriangleleft}$。同理可得$A\subseteq A^{\blacktriangleright\blacktriangleleft}$。

2）$\forall d\in C_2^{\blacktriangleright}$，由$C_2^{\blacktriangleright}$的定义可知，$\forall(X,Y)\in C_2$，有$(X,Y)J_Nd$，又由$C_1\subseteq C_2$可知，$\forall(X,Y)\in C_1$，一定有$(X,Y)\in C_2$，故$(X,Y)J_Nd$。由$C_1^{\blacktriangleright}$的定义可知，$d\in C_1^{\blacktriangleright}$，又由$d$的任意性可知$C_2^{\blacktriangleright}\subseteq C_1^{\blacktriangleright}$。同理可得$A_1\subseteq A_2\Rightarrow A_2^{\blacktriangleleft}\subseteq A_1^{\blacktriangleleft}$。

3）先证$C^{\blacktriangleright}\subseteq C^{\blacktriangleright\blacktriangleleft\blacktriangleright}$。$\forall d\in C^{\blacktriangleright}$，由$C^{\blacktriangleright\blacktriangleleft}$的定义可知，$\forall(X,Y)\in C^{\blacktriangleright\blacktriangleleft}$，有$(X,Y)J_Nd$。又由$C^{\blacktriangleright\blacktriangleleft\blacktriangleright}$的定义可知，$d\in C^{\blacktriangleright\blacktriangleleft\blacktriangleright}$。由$d$的任意性可知，$C^{\blacktriangleright}\subseteq C^{\blacktriangleright\blacktriangleleft\blacktriangleright}$。

再证$C^{\blacktriangleright\blacktriangleleft\blacktriangleright}\subseteq C^{\blacktriangleright}$。由1）知$C\subseteq C^{\blacktriangleright\blacktriangleleft}$，即$\forall(X,Y)\in C$，有$(X,Y)\in C^{\blacktriangleright\blacktriangleleft}$。由$C^{\blacktriangleright\blacktriangleleft\blacktriangleright}$的定义可知，$\forall d\in C^{\blacktriangleright\blacktriangleleft\blacktriangleright}$，有$(X,Y)J_Nd$。又由$(X,Y)$的任意性与$C^{\blacktriangleright}$的定义可知，$d\in C^{\blacktriangleright}$。由$n$的任意性可知，$C^{\blacktriangleright\blacktriangleleft\blacktriangleright}\subseteq C^{\blacktriangleright}$。综上所述，$C^{\blacktriangleright}=C^{\blacktriangleright\blacktriangleleft\blacktriangleright}$。同理可得$A^{\blacktriangleleft}=A^{\blacktriangleleft\blacktriangleright\blacktriangleleft}$。

4）若$C\subseteq A^{\blacktriangleleft}$，则$\forall(X,Y)\in C$，有$(X,Y)\in A^{\blacktriangleleft}$，由$A^{\blacktriangleleft}$的定义可得$\forall d\in A$，有$(X,Y)J_Nd$。由$(X,Y)$的任意性和$C^{\blacktriangleright}$的定义可得$d\in C^{\blacktriangleright}$。又由$d$的任意性可得$A\subseteq C^{\blacktriangleright}$。同理可得，若$A\subseteq C^{\blacktriangleright}$，则$C\subseteq A^{\blacktriangleleft}$，故$\subseteq A^{\blacktriangleleft}\Leftrightarrow A\subseteq C^{\blacktriangleright}$。

5）由$(C_1\cup C_2)^{\blacktriangleright}$的定义可知：

$$\begin{aligned}(C_1\cup C_2)^{\blacktriangleright}&=\{d\in N\mid\forall(X,Y)\in C_1\cup C_2,(X,Y)J_Nd\}\\&=\{d\in N\mid\forall(X_i,Y_i)\in C_1,\forall(X_j,Y_j)\in C_2,\\&\quad(X_i,Y_i)J_Nd\text{ 且 }(X_j,Y_j)J_Nd\}\\&=\{d\in N\mid\forall(X_i,Y_i)\in C_1,(X_i,Y_i)J_Nd\}\cap\\&\quad\{d\in N\mid\forall(X_j,Y_j)\in C_2,(X_j,Y_j)J_Nd\}\\&=C_1^{\blacktriangleright}\cap C_2^{\blacktriangleright}\end{aligned}$$

同理可得$(A_1\cup A_2)^{\blacktriangleleft}=A_1^{\blacktriangleleft}\cap A_2^{\blacktriangleleft}$。

6）$\forall d\in C_1^{\blacktriangleright}$，由$C_1^{\blacktriangleright}$的定义可得$\forall(X_i,Y_i)\in C_1$，有$(X_i,Y_i)J_Nd$成立。若$\forall(X,Y)\in C_1\cap C_2$，则$(X,Y)\in C_1$，故$(X,Y)J_Nd$。由$(C_1\cap C_2)^{\blacktriangleright}$的定义可知$d\in(C_1\cap C_2)^{\blacktriangleright}$。由$d$的任意性可知$C_1^{\blacktriangleright}\subseteq(C_1\cap C_2)^{\blacktriangleright}$。类似地，$\forall t\in C_2^{\blacktriangleright}$，由$C_2^{\blacktriangleright}$的定义可得$\forall(X_j,Y_j)\in C_2$，则有$(X_j,Y_j)J_Nt$成立。若$\forall(X,Y)\in C_1\cap C_2$，则$(X,Y)\in C_2$，故$(X,Y)J_Nt$。由$(C_1\cap C_2)^{\blacktriangleright}$的定义可知$t\in(C_1\cap C_2)^{\blacktriangleright}$。由$t$的任意性可知$C_2^{\blacktriangleright}\subseteq(C_1\cap C_2)^{\blacktriangleright}$。综上所述，$(C_1\cap C_2)^{\blacktriangleright}\supseteq C_1^{\blacktriangleright}\cup C_2^{\blacktriangleright}$。同理可得$(A_1\cap A_2)^{\blacktriangleleft}\supseteq A_1^{\blacktriangleleft}\cup A_2^{\blacktriangleleft}$。

7）$\forall C=\{(X,Y)\}$，由$C^{\blacktriangleright}$的定义可知：

$$\begin{aligned}C^{\blacktriangleright}&=\{d\in N\mid(X,Y)J_Nd\}\\&=\{d\in N\mid\forall g_i\in X,g_iJd\text{ 且 }\forall g_j\in Y,g_jJ^cd\}\\&=X^{*_N}\cap Y^{\bar{*}_N}\end{aligned}$$

又由$C^{\triangleright_N}$的定义可知，$C^{\blacktriangleright}=C^{\triangleright_N}$。

基于上述算子，给出三支决策类背景上的类概念的定义如下。

定义 10　设$K_{N,M}$为一个三支决策类背景，若一个二元

组(C,A)满足 $C^{\blacktriangleright}=A$ 且 $A^{\blacktriangleleft}=C$，则称(C,A)是一个类概念。其中 $C\subseteq AEL_E(G,M,I)$，$A\subseteq N$。称 C 为类概念的外延，A 为类概念的内涵。

将三支决策类背景 $K_{N,M}$ 的全体类概念记为 $L(K_{N,M})$，对于任意两个类概念(C_1,A_1)，$(C_2,A_2)\in L(K_{N,M})$，它们的偏序关系定义如下：

$(C_1,A_1)\leqslant(C_2,A_2)\Leftrightarrow C_1\subseteq C_2\Leftrightarrow A_2\subseteq A_1$

定理 2 若(C_1,A_1)，(C_2,A_2)为三支决策类背景 $K_{N,M}$ 上的两个类概念，则

$(C_1,A_1)\wedge(C_2,A_2)=(C_1\cap C_2,(A_1\cup A_2))^{\blacktriangleright\blacktriangleleft}$

$(C_1,A_1)\vee(C_2,A_2)=((C_1\cup C_2)^{\blacktriangleright\blacktriangleleft},A_1\cap A_2)$

也是 $K_{N,M}$ 上的类概念，故 $L(K_{N,M})$是完备格，称为类概念格。

证明：下面证明$(C_1\cap C_2,(A_1\cup A_2)^{\blacktriangleleft\blacktriangleright})$为一个类概念。先证$(C_1\cap C_2)^{\blacktriangleright}=(A_1\cup A_2)^{\blacktriangleleft\blacktriangleright}$。因为$(C_1,A_1)$，$(C_2,A_2)$为两个类概念，所以 $C_1=A_1^{\blacktriangleleft}$ 且 $C_2=A_2^{\blacktriangleleft}$，故$(C_1\cap C_2)^{\blacktriangleright}=(A_1^{\blacktriangleleft}\cap A_2^{\blacktriangleleft})^{\blacktriangleright}$。又由定理 1 中的性质 5)可得$(A_1^{\blacktriangleleft}\cap A_2^{\blacktriangleleft})^{\blacktriangleright}=(A_1\cup A_2)^{\blacktriangleleft\blacktriangleright}$，因此$(C_1\cap C_2)^{\blacktriangleright}=(A_1\cup A_2)^{\blacktriangleleft\blacktriangleright}$。

再证$(A_1\cup A_2)^{\blacktriangleleft\blacktriangleright\blacktriangleleft}=C_1\cap C_2$。由定理 1 中性质 3)可得$(A_1\cup A_2)^{\blacktriangleleft\blacktriangleright\blacktriangleleft}=(A_1\cup A_2)^{\blacktriangleleft}$。再由定理 1 中性质 5)可得$(A_1\cup A_2)^{\blacktriangleleft}=A_1^{\blacktriangleleft}\cap A_2^{\blacktriangleleft}$，又由 $C_1=A_1^{\blacktriangleleft}$ 且 $C_2=A_2^{\blacktriangleleft}$ 可得 $A_1^{\blacktriangleleft}\cap A_2^{\blacktriangleleft}=C_1\cap C_2$。因此，$(A_1\cup A_2)^{\blacktriangleleft\blacktriangleright\blacktriangleleft}=C_1\cap C_2$。

综上，$(C_1\cap C_2,(A_1\cup A_2)^{\blacktriangleleft\blacktriangleright})$为一个类概念。同理可证$((C_1\cup C_2)^{\blacktriangleright\blacktriangleleft},A_1\cap A_2)$为一个类概念。因此，$L(K_{M,N})$是完备格。

下例给出一个基于属性导出三支概念格弱协调的决策形式背景及其条件属性导出三支概念格与决策属性导出三支概念格。同时，给出该决策形式背景的三支决策类背景及其对应的类概念格。

例 1 表 1 给出了决策形式背景(G_1,M_1,I_1,N_1,J_1)，其中对象集为 $G_1=\{1,2,3,4\}$，条件属性集为 $M_1=\{a,b,c,d\}$，决策属性集为 $N_1=\{e,f,g\}$。

表 1 决策形式背景(G_1,M_1,I_1,N_1,J_1)

Table 1 Formal decision context(G_1,M_1,I_1,N_1,J_1)

	a	b	c	d	e	f	g
1	+	+	−	−	+	+	−
2	+	−	−	−	−	+	−
3	−	+	+	+	+	−	+
4	+	−	−	+	+	+	−

条件属性导出三支概念格 $AEL(G_1,M_1,I_1)$和决策属性导出三支概念格 $AEL(G_1,N_1,J_1)$分别如图 1 和图 2 所示。

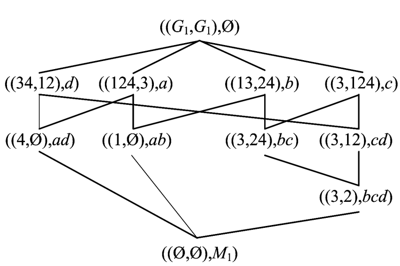

图 1 $AEL(G_1,M_1,I_1)$

Fig. 1 $AEL(G_1,M_1,I_1)$

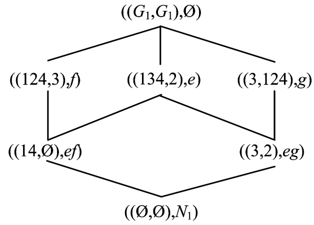

图 2 $AEL(G_1,N_1,J_1)$

Fig. 2 $AEL(G_1,N_1,J_1)$

决策属性导出三支概念格 $AEL(G_1,N_1,J_1)$到条件属性导出三支概念格 $AEL(G_1,M_1,I_1)$的蕴含映射 β 如下：

$\beta(((G_1,G_1),\varnothing))=((G_1,G_1),\varnothing)$

$\beta(((\varnothing,\varnothing),N_1))=((\varnothing,\varnothing),M_1)$

$\beta(((124,3),f))=((124,3),a)$

$\beta(((134,2),e))=((1,\varnothing),ab)$

$\beta(((3,124),g))=((3,124),c)$

$\beta(((14,\varnothing),ef))=((4,\varnothing),ad)$

$\beta(((3,2),eg))=((3,2),bcd)$

因此，决策形式背景(G_1,M_1,I_1,N_1,J_1)是三支弱协调的。

表 2 列出了决策形式背景(G_1,M_1,I_1,N_1,J_1)对应的三支决策类背景 $K_{N_1,M_1}=(AEL_E(G_1,M_1,I_1),N_1,J_{N_1})$，其对应的类概念格如图 3 所示。

表 2 三支决策类背景 K_{N_1,M_1}

Table 2 Three-way decision class context K_{N_1,M_1}

	e	f	g
(3,2)	+	−	+
(3,12)	−	−	+
(3,24)	−	−	+
(1,Ø)	+	+	−
(4,Ø)	+	+	−
(34,12)	−	−	−
(124,3)	−	+	−
(13,24)	−	−	−
(3,124)	−	−	+
(G_1,G_1)	−	−	−

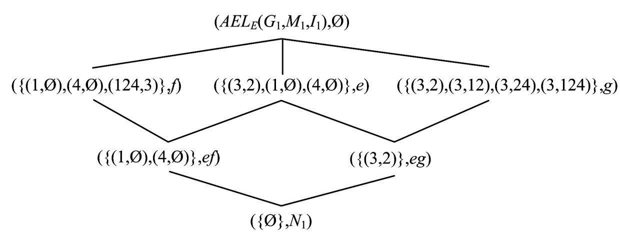

图 3 $L(K_{N_1,M_1})$

Fig. 3 $L(K_{N_1,M_1})$

3.2 类概念与三支概念之间的关系

本节讨论三支类背景上的类概念与决策形式背景上的三支概念之间的关系。首先，给出三支类概念内涵与三支概念内涵之间的关系。

定理 3 设 $K_{N,M}=(AEL_E(G,M,I),N,J_N)$为一个三支决策类背景，$(C,A)$为 $K_{N,M}=(AEL_E(G,M,I),N,J_N)$中的一个类概念且 $C=\{(X_1,Y_1),\cdots,(X_s,Y_s)\}$，则有 $A=$

$\bigcap_{1\leqslant i\leqslant s}(X_i,Y_i)^{\triangleright_N}$。

证明：由类概念、类算子$\blacktriangleright$和三支算子$\triangleright$的定义可得：

$$
\begin{aligned}
A &= C^{\blacktriangleright}=\{d\in N\mid \forall (X_i,Y_i)\in C,(X_i,Y_i)J_N d\}\\
&=\bigcap_{1\leqslant i\leqslant s}\{d\in N\mid (X_i,Y_i)J_N d\}\\
&=\bigcap_{1\leqslant i\leqslant s}\{d\in N\mid \forall g_t\in X_i,\forall g_h\in Y_i,g_tJd \text{ 且 } g_hJ^c d\}\\
&=\bigcap_{1\leqslant i\leqslant s}\{d\in N\mid d\in X_i^{*_N} \text{ 且 } d\in Y_i^{\bar{*}_N}\}\\
&=\bigcap_{1\leqslant i\leqslant s}(X_i^{*_N}\cap Y_i^{\bar{*}_N})\\
&=\bigcap_{1\leqslant i\leqslant s}(X_i,Y_i)^{\triangleright_N}
\end{aligned}
$$

由类概念的定义可知，类概念的外延为条件属性导出三支概念外延的集合，定理 3 表明类概念的内涵为其外延在决策背景中对应的三支概念的内涵的交集。又因为内涵的交集还是内涵，所以类概念的内涵也是决策属性导出三支概念的内涵。下面研究类概念外延与三支概念外延之间的关系。

定理 4　设 $K_{N,M}=(AEL_E(G,M,I),N,J_N)$ 为一个三支决策类背景，(C,A) 为 $K_{N,M}=(AEL_E(G,M,I),N,J_N)$ 上的一个类概念且 $C=\{(X_1,Y_1),\cdots,(X_s,Y_s)\}$，则一定存在一个决策属性导出的三支概念 $((X,Y),A)\in AEL(G,N,J)$ 满足 $\bigcup_{1\leqslant i\leqslant s}(X_i,Y_i)\subseteq(X,Y)$。

证明：由定理 3 可得 $\bigcap_{1\leqslant i\leqslant s}(X_i,Y_i)^{\triangleright_N}=A$，即 $(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant s}(X_i,Y_i))^{\triangleright_N}=A$。由三支算子的性质可得 $((\bigcup_{1\leqslant i\leqslant s}(X_i,Y_i))^{\triangleright_N\triangleleft_N},A)$ 为决策背景 (G,N,J) 上的属性导出三支概念，且有 $\bigcup_{1\leqslant i\leqslant s}(X_i,Y_i)\subseteq(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant s}(X_i,Y_i))^{\triangleright_N\triangleleft_N}$。若令 $(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant s}(X_i,Y_i))^{\triangleright_N\triangleleft_N}=(X,Y)$，则有 $\bigcup_{1\leqslant i\leqslant s}(X_i,Y_i)\subseteq(X,Y)$。

由定理 4 可知，三支决策类背景上的任意类概念的外延的并为决策背景上属性导出三支概念外延的子集。

4　基于类概念的规则获取

本节给出基于类背景的规则及其获取方法，并将此规则与基于三支弱协调性的规则进行比较。

4.1　基于三支弱协调性的规则获取

定义 11　设 (G,M,I,N,J) 是一个三支弱协调决策形式背景。若对于 $(W,Z)\neq(\emptyset,\emptyset),(G,G)$，有 $((X,Y),A)\in AEL(G,M,I)$ 与 $((W,Z),B)\in AEL(G,N,J)$，满足 $(X,Y)\subseteq(W,Z)$ 即 $X\subseteq W$ 且 $Y\subseteq Z$，则称 $A\to B$ 是一个三支规则，记为 if A, then B。

因为规则 $A\to B$ 是基于属性导出三支概念格得到的，而属性导出三支概念外延的第一个元素中的所有对象共同具有内涵中的所有属性，而外延的第二个元素中的所有对象共同不具有内涵中的所有属性，所以规则 $A\to B$ 有两个不同方面的解释。它既表示如果对象子集中的对象共同拥有属性子集 A 中的所有属性，那么这个对象子集中的所有对象也共同拥有属性子集 B 中的所有属性；也表示如果对象子集中的对象共同不拥有属性子集 A 中的所有属性，那么这个对象子集中的所有对象也共同不拥有属性子集 B 中的所有属性。三支弱协调决策形式背景 (G,M,I,N,J) 上所有基于属性导出三支概念格得到的三支规则的集合记为 AR_1。

4.2　基于类背景的规则获取

本节给出基于三支决策类背景的规则获取，并讨论基于类背景的规则与基于三支弱协调决策形式背景的规则之间的关系。首先，给出基于三支决策类背景的规则获取。

定义 12　设 (G,M,I,N,J) 是一个三支弱协调决策形式背景，$K_{N,M}=(AEL_E(G,M,I),N,J_N)$ 为 (G,M,I,N,J) 的三支决策类背景，$((X,Y),A)$ 为条件背景 (G,M,I) 的属性导出三支概念。若 (C,B) 为 $K_{N,M}$ 上的类概念，且 $(X,Y)\in C$，$C\neq\{(\emptyset,\emptyset)\}$，$C\neq\{AEL_E(G,M,I)\}$，则可得规则 $A\to B$。

三支决策类背景 $K_{N,M}$ 上所有规则的集合记为 AR_2。在三支弱协调决策背景上可以获得很多规则，而这些规则中一定存在着一些冗余规则，使得由较多的条件只能获得较少的结论。即，对于规则 $A\to B$，若存在规则 $A_1\to B_1$，满足 $A_1\subseteq A$ 且 $B\subseteq B_1$，则称规则 $A\to B$ 是冗余的。

下面给出定义 12 中基于类背景获取的规则与定义 11 中基于三支弱协调决策形式背景获取的规则之间的关系。

定理 5　设 (G,M,I,N,J) 是一个三支弱协调决策形式背景，$\forall A\to B_1\in AR_1$，$\exists A\to B_2\in AR_2$，使得 $B_1\subseteq B_2$。

证明：设 $\forall A\to B\in AR_1$，由定义 11 可得 $\exists((X_1,Y_1),A)\in AEL(G,M,I)$，$((X,Y),B_1)\in AEL(G,N,J)$，满足 $(X_1,Y_1)\subseteq(X,Y)$，故 $(X,Y)^{\triangleright_N}=B_1$。记 $AEL_E(G,M,I)$ 中所有包含于 (X,Y) 的外延为 $\{(X_1,Y_1),\cdots,(X_h,Y_h)\}$，由定理 1 中的性质 3) 可得 $(\{(X_1,Y_1),\cdots,(X_h,Y_h)\}^{\blacktriangleright\blacktriangleleft},\{(X_1,Y_1),\cdots,(X_h,Y_h)\}^{\blacktriangleright})$ 为决策类背景上的一个类概念。若记 $\{(X_1,Y_1),\cdots,(X_h,Y_h)\}^{\blacktriangleright}=B_2$，由定义 12 可得规则 $A\to B_2\in AR_2$。由定理 3 可得 $\{(X_1,Y_1),\cdots,(X_h,Y_h)\}^{\blacktriangleright}=(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant h}(X_i,Y_i))^{\triangleright_N}$。又因为 $\forall(X_i,Y_i)$，$1\leqslant i\leqslant h$，满足 $(X_i,Y_i)\subseteq(X,Y)$，故 $\bigcup_{1\leqslant i\leqslant h}(X_i,Y_i)\subseteq(X,Y)$。由三支算子的性质可得 $(X,Y)^{\triangleright_N}\subseteq(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant h}(X_i,Y_i))^{\triangleright_M}$，即 $B_1\subseteq B_2$。

定理 5 说明了基于属性导出三支概念格获取的规则相对基于背景获得的规则是冗余的。定理 6 给出规则集 AR_1 与规则集 AR_2 之间的关系。

定理 6　设 (G,M,I,N,J) 是一个三支弱协调决策形式背景，AR_1 为其上基于属性导出三支概念格获取的规则集，AR_2 为基于三支决策类背景上的类概念格获取的规则集，则有 $AR_2\subseteq AR_1$。

证明：$\forall A\to B\in AR_2$，由定义 12 可得 $\exists(C,B)\in L(K_{N,M})$，$((X_i,Y_i),B)\in AEL(G,M,I)$ 满足 $(X_i,Y_i)\in C$。由定理 3 可知，三支决策类背景上的类概念的内涵为决策属性导出三支概念的内涵，即 $\forall(C,B)\in L(K_{N,M})$，$\exists((X,Y),B)\in AEL(G,N,J)$。又由定理 4 可得 $\bigcup C\subseteq(X,Y)$，故 $(X_i,Y_i)\subseteq(X,Y)$。由定义 11 可得 $A\to B\in AR_1$。由规则 $A\to B$ 的任意性可得 $AR_2\subseteq AR_1$。

定理 6 说明了基于类背景获取的规则比由属性导出三支概念格获取的规则的个数更少。结合定理 5 可得基于类背景获取的规则个数更少，但每个规则包含的信息更丰富。

例 2（续例 1）　表 3 给出表 1 中的决策形式背景基于属性导出三支概念格获得的规则集 AR_1，表 4 给出基于三支决策类背景的类概念格得到的 AR_2。

表3 规则集 AR_1

Table 3 Rule set AR_1

$a\rightarrow f$	$ad\rightarrow e$	$c\rightarrow g$	$ad\rightarrow ef$	$bcd\rightarrow eg$
$ad\rightarrow f$	$ab\rightarrow e$	$bc\rightarrow g$	$ab\rightarrow ef$	
$ab\rightarrow f$	$bcd\rightarrow e$	$cd\rightarrow g$		
		$bcd\rightarrow g$		

表4 规则集 AR_2

Table 4 Rule set AR_2

$a\rightarrow f$	$ad\rightarrow e$	$c\rightarrow g$	$ad\rightarrow ef$	$bcd\rightarrow eg$
$ad\rightarrow f$	$ab\rightarrow e$	$bc\rightarrow g$	$ab\rightarrow ef$	
$ab\rightarrow f$	$bcd\rightarrow e$	$cd\rightarrow g$		
		$bcd\rightarrow g$		

4.3 基于类背景的双向规则的获取

在实际问题中，条件属性一般表示原因、前提和表象，而决策属性一般表示结果、结论和本质。因此4.1节和4.2节中所得到的规则都是由原因到结果、由前提到结论和由表象到本质的规则，这种规则被统称为正向规则。本节将利用条件类背景给出反向规则，即由结果到原因、由结论到前提和由本质到表象的规则。

定义13 设(G,M,I,N,J)是一个三支弱协调决策形式背景，$K_{M,N}=(AEL_E(G,N,J),M,I_M)$为$(G,M,I,N,J)$的三支条件类背景，$((X,Y),B)$为决策背景$(G,N,J)$的属性导出三支概念。若$(C,A)$为$K_{M,N}$的类概念，且$(X,Y)\in C$，$C\neq\{(\emptyset,\emptyset)\}$，$C\neq\{AEL_E(G,N,J)\}$，则可得反向规则$B\rightarrow A$。所有的反向规则记为$AR_3$。

结合正向规则与反向规则，给出如下双向规则。

定义14 若有规则$A\rightarrow B$和$B\rightarrow A$，则可得规则$A\leftrightarrow B$，称此规则为双向规则。所有双向规则的集合记为AR_4。

定理7给出双向规则的获取方法。

定理7 设(G,M,I,N,J)为一个三支弱协调的决策形式背景，若对象集对(X,Y)满足$(X,Y)\in AEL_E(G,M,I)$且$(X,Y)\in AEL_E(G,N,J)$，则可得双向规则$(X,Y)^{\triangleright_M}\leftrightarrow(X,Y)^{\triangleright_N}$。

证明：因为$(X,Y)\in AEL_E(G,M,I)$，所以$((X,Y),(X,Y)^{\triangleright_M})$为条件背景$(G,M,I)$上的一个属性导出三支概念，即$((X,Y),(X,Y)^{\triangleright_M})\in AEL(G,M,I)$。由定理1中给出的类背景上算子$\blacktriangleright$与$\blacktriangleleft$的性质3)可知$(\{(X,Y)\}^{\blacktriangleright\blacktriangleleft},\{(X,Y)\}^{\blacktriangleright})$为三支决策类背景$K_{N,M}=(AEL_E(G,M,I),N,J_N)$上的一个类概念。又由定理1中的性质1)可知，$(X,Y)\in\{(X,Y)\}^{\blacktriangleright\blacktriangleleft}$，故由定义12给出的三支决策类背景上的规则的定义可得规则$(X,Y)^{\triangleright_M}\rightarrow\{(X,Y)\}^{\blacktriangleright}$。由定理1中的性质7)可知$\{(X,Y)\}^{\blacktriangleright}=(X,Y)^{\triangleright_N}$，故可得规则$(X,Y)^{\triangleright_M}\rightarrow(X,Y)^{\triangleright_N}$。同理可以基于三支条件类背景得到反向的规则$(X,Y)^{\triangleright_N}\rightarrow(X,Y)^{\triangleright_M}$。综上可得，双向规则$(X,Y)^{\triangleright_M}\leftrightarrow(X,Y)^{\triangleright_N}$。

例3(续例1) 表5给出了表1中决策形式背景对应的三支条件类背景，图4给出了条件类背景对应的类概念格，表6给出了所有的反向规则AR_3，表7给出了所有的双向规则AR_4。

表5 三支条件类背景 K_{M_1,N_1}

Table 5 Three-way condition class context K_{M_1,N_1}

	a	b	c	d
(14,Ø)	+	-	-	-
(3,2)	-	+	+	+
(3,124)	-	-	+	-
(134,2)	-	-	-	-
(124,3)	+	-	-	-
(G_1,G_1)	-	-	-	-

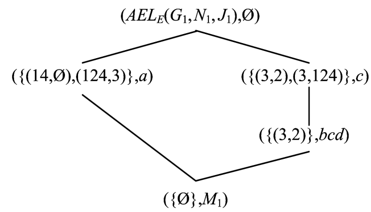

图4 $L(K_{M_1,N_1})$

Fig.4 $L(K_{M_1,N_1})$

表6 规则集 AR_3

Table 6 Rule set AR_3

$ef\rightarrow a$	$eg\rightarrow c$	$eg\rightarrow bcd$
$f\rightarrow a$	$g\rightarrow c$	

表7 规则集 AR_4

Table 7 Rule set AR_4

$a\leftrightarrow f$	$c\leftrightarrow g$	$bcd\leftrightarrow ef$

结束语 本文基于属性导出三支概念，定义了两种三支类背景即三支条件类背景与三支决策类背景，以及三支类背景上的类概念。通过引入三支决策类背景，给出了三支类背景上决策规则的获取方法，并比较了基于三支类背景获得的规则与基于三支弱协调决策形式背景获得的规则，进一步证明了基于三支类背景获取的规则的优越性。最后，结合三支条件类背景，研究了反向规则与双向规则的获取，丰富了三支概念分析中规则获取的内容。

类背景不仅在规则获取中具有很重要的作用，在背景的压缩中也常常被用到，因此进一步将三支类背景运用到形式背景的简化与压缩中可能会带来更多新的发现。

参考文献

[1] QI J J,WEI L,YAO Y Y. Three-way Formal Concept Analysis[C]//International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Cham:Springer,2014:732-741.

[2] QI J J,QIAN T,WEI L. The Connections Between Three-way and Classical Concept Lattices [J]. Knowledge-Based Systems,2016,91(C):143-151.

[3] REN R S,WEI L. The Attribute Reductions of Three-way Concept Lattices [J]. Knowledge-Based Systems,2016,99(C):92-102.

[4] YAO Y Y. An Outline of A Theory of Three-way Decisions[C]//Rough Sets and Current Trends in Computing. Springer Berlin Heidelberg,2012:1-17.

[5] WILLE R. Restructuring Lattice Theory:An Approach Based on Hierarchies of Concepts [C]//Proceedings of the NATO Advanced Study Institute. Dordrecht:Springer Berlin Heidelberg,1982:445-470.

(下转第46页)

计算机学报,2004,27(2):197-203.

[3] SHI Z Z,CHANG L. Reasoning about Semantic Web Services with an Approach Based on Dynamic Description Logics[J]. Chinese Journal of Computers,2008,31(9):1599-1611.(in Chinese)
史忠植,常亮. 基于动态描述逻辑的语义 Web 服务推理[J]. 计算机学报,2008,31(9):1599-1611.

[4] WANG G Y,YAO Y Y,YU H. A Survey on Rough Set Theory and Applications[J]. Chinese Journal of Computers,2009,32(7):1229-1247.(in Chinese)
王国胤,姚一豫,于洪. 粗糙集理论与应用研究综述[J]. 计算机学报,2009,32(7):1229-1247.

[5] 王国胤. Rough 集理论与知识获取[M]. 西安:西安交通大学出版社,2001.

[6] MIAO D Q,ZHOU J,ZHANG N,et al. Research of Attribute Reduction Based on Algebraic Equations[J]. Acta Electronica Sinica,2010,38(5):1021-1028.(in Chinese)
苗夺谦,周杰,张楠,等. 基于代数方程组的属性约简研究[J]. 电子学报,2010,38(5):1021-1028.

[7] DENG D Y,LU K W,MIAO D Q,et al. Study on Entire-Granulation Rough Sets and Concept Drifting in a Knowledge System[J]. Chinese Journal of Computers,2016,39(177):1-18.(in Chinese)
邓大勇,卢克文,苗夺谦,等. 知识系统中全粒度粗糙集及概念漂移的研究[J]. 计算机学报,2016,39(177):1-18.

[8] MARIA S,MAITE L. Rough set based approaches to feature selection for Case-Based Reasoning classifiers[J]. Pattern Recognition Letters,2011,32(2):280-292.

[9] TIBSHIRANI R,HASTIE T,NARAS HIMAN B,et al. Diagnosis of multiple cancer types by shrunken centroids of gene expression[C]∥Proceedings of the National Academy of Sciences. USA,2002:6567-6572.

[10] KOHAVI R,JOHN G H. Wrappers for feature subset selection[J]. Artificial Intelligence,1997,97(1/2):273-324.

[11] ROKACH L. Decomposition methodology for classification tasks:a meta decomposer framework[J]. Pattern Analysis and Applications,2006,9(2/3):257-271.

[12] WANG M,LIU B,TANG J H,et al. Metric learning with feature decomposition for image categorization[J]. Neurocomputing,2010,73(10-12):1562-1569.

[13] SHE Y H,HE X L,QIAN Y H. A multiple-valued logic approach for multigranulation rough set model[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2017,82:270-284.

[14] BAZAN J G,LATKOWSKI R,SZCZUKA M. Missing template decomposition method and its implementation in rough set exploration system[C]∥Proceedings of the Fifth International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing. Kobe,LNAI,2006:254-263.

[15] ZHANG Q Z. An Approach to Rough Set Decomposition of Incomplete Information Systems[C]∥IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications. Harbin,IEEE,2007:2455-2460.

[16] ZHANG H Y,YANG S Y. Feature selection and approximate reasoning of large-scale set-valued decision tables based on α-dominance-based quantitative rough sets[J]. Information Sciences,2017,378:328-347.

[17] GRZYMALA-BUSSE J W,GRZYMALA-BUSSE W J. Handling missing attribute values[M]∥Data Mining and Knowledge Discovery Handbook. 2005:37-57.

[18] GRZYMALA-BUSSE J W. Discretization of numerical attributes[M]∥Data Mining and Knowledge Discovery Handbook. Oxford:Oxford University Press,2002:218-225.

(上接第 26 页)

[6] GANTER B,WILLE R. Formal Concept Analysis:Mathematical Foundations [M]. Berlin Heidelberg:Springer-Verlag,1999.

[7] YAO Y Y. Interval Sets and Three-way Concept Analysis in Incomplete context [J]. International Journal of Machine Learning & Cybernetics,2017,8(1):3-20.

[8] REN R S,WEI L,YAO Y Y. An Analysis of Three Types of Partially-known Formal Concepts [J/OL]. International Journal of Machine Learning & Cybernetics. http://doi. org/10. 1007/s13042-017-0743-z.

[9] 张文修,仇国芳. 基于粗糙集的不确定决策[M]. 北京:清华大学出版社,2005.

[10] LI J H,LV Y J. Attribute Reduction and Rules Extraction in Decision Formal Context based on Concept Lattice [J]. Mathematics in Practice and Theory,2009,39(7):182-188.(in Chinese)
李金海,吕跃进. 基于概念格的决策形式背景属性约简及规则提取[J]. 数学的实践与认识,2009,39(7):182-188.

[11] LI J H,MEI C L,LV Y J. A Heuristic Knowledge-reduction Method for Decision Formal Contexts [J]. Computers and Mathematics with Applications,2011,61(4):1096-1106.

[12] LI J H,WANG J H,MEI C L,et al. Weakly Closed Label Concept Lattice and Its Application to Rule Acquisition in Decision Formal Contexts [C]∥Proceedings of International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Piscataway:IEEE,2013:658-663.

[13] LI T. Knowledge Acquisition in Formal Decision Context [D]. Xi'an:Northwest University,2013.(in Chinese)
李涛. 决策形式背景的知识获取[D]. 西安:西北大学,2013.

[14] ZHU Z C,WEI L. Two-way Rules Acquisition based on Class Contexts [J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition),2015,45(4):517-524.(in Chinese)
朱治春,魏玲. 基于类背景的双向规则的获取[J]. 西北大学学报(自然科学版),2015,45(4):517-524.

[15] PREDIGER S. Formal Concept Analysis for General Objects [J]. Discrete Applied Mathematics,2003,127(2):337-355.

[16] LIU L,QIAN T,WEI L. Rules Extraction in Formal Decision Contexts based on Attribute-induced Three-way Concept Lattices [J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition),2016,46(4):481-487.(in Chinese)
刘琳,钱婷,魏玲. 基于属性导出三支概格念的决策背景规则提取[J]. 西北大学学报(自然科学版),2016,46(4):481-487.