

基于最优相似度三支决策的模糊粗糙集模型

杨霁琳^{1,2} 张贤勇^{2,3} 唐孝^{2,3} 冯林⁴

(四川师范大学基础教学学院 成都 610068)¹ (四川师范大学智能信息与量子信息研究所 成都 610068)²
(四川师范大学数学与软件科学学院 成都 610068)³ (四川师范大学计算机科学学院 成都 610068)⁴

摘要 模糊信息系统中,对象的相似度往往会受噪声影响,且它在模型运算中常常并非全部需要高精度参与计算。文中首先引入阈值对 (α, β) ,提出了一种基于相似度三支决策的模糊粗糙集模型;其次利用模糊集近似的三支决策方法,给出了对象相似度三支决策的错误率、决策代价以及相应的语义解释;然后以总体决策代价最小化为目标,给出了最优 (α, β) 的计算方法,从而建立了一种基于最优相似度三支决策的模糊粗糙集模型;最后通过实例分析说明了该模型的可行性和合理性。本文建立的三支决策模糊粗糙集模型保留了模糊信息系统的确定性,一定程度地去除了噪声影响,且能通过计算得到最优阈值 (α, β) ,从而建立基于相似度三支决策的最优模型,这将有益于模糊信息系统的应用。

关键词 三支决策,模糊集,相似度,模糊粗糙集

中图分类号 TP18 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.10.005

Fuzzy Rough Set Model Based on Three-way Decisions of Optimal Similar Degrees

YANG Ji-lin^{1,2} ZHANG Xian-yong^{2,3} TANG Xiao^{2,3} FENG Lin⁴

(College of Fundamental Education, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China)¹

(Institute of Intelligent Information and Quantum Information, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China)²

(College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China)³

(College of Computer Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China)⁴

Abstract In the fuzzy information system, the noises tend to affect objects' similarity, as well as not all the objects' similar degree need high accuracy for calculation in the model. Consequently, a fuzzy rough set model based on three-way decisions of similar degrees was proposed by introducing thresholds (α, β) in this paper. Then error rates, decision costs and corresponding semantics explanations of three-way decision about objects' similar degrees were given through the three-way decisions method of fuzzy sets approximation. Furthermore, by taking minimizing overall decision costs as the goal, a calculating method of the optimal thresholds (α, β) was given. Therefore, a fuzzy rough sets model based on the three-way decision of optimal similar degrees was established. Finally, an example was analyzed to show the feasibility and reasonability of the model. The fuzzy rough sets model based on three-way decision keeps uncertainty of fuzzy information system, but also reduces noise effects in some extents, and the optimal (α, β) can be got by calculating. This study is benefit for application of the fuzzy information system.

Keywords Three-way decisions, Fuzzy set, Similar degrees, Fuzzy rough set

1 引言

三支决策是近年来发展起来的一种处理不确定性决策的数学方法。Yao^[1]基于各个领域中三支决策的共性及特征,提出了三支决策理论框架。该理论拓展了传统的二支决策,提供了3种决策选择:接受决策、不承诺决策和拒绝决策。三支决策的建立规避了错误拒绝或错误接受造成的损失,更符合

合思维逻辑和实际应用^[2]。

众多研究者在理论和应用上对三支决策理论框架进行了深入的研究并取得了丰富的成果^[2-3]。Deng等^[4]基于模糊集讨论了三支决策近似问题。Liu和Liang等将不完备性^[5]、区间性直觉模糊^[6-7]与犹豫模糊等^[8]引入到三支决策中,提出了一系列不确定性三支决策模型。Hu等^[9]基于偏序集和犹豫模糊集讨论了三支决策空间,建立了有效的决策评估函数。

到稿日期:2018-04-17 返修日期:2018-05-16 本文受国家自然科学基金项目(61673285, 61303204, 61203285),四川省科技支撑计划项目(2017JQ0046, 2015GZ0079),四川省教育厅科研项目(18ZA0410, 17ZB0356)资助。

杨霁琳(1981—),女,博士,副教授,主要研究方向为粗糙集、模糊集, E-mail: yjl524@163.com(通信作者);张贤勇(1978—),男,博士,教授,主要研究方向为粗糙集、粒计算、数据挖掘;唐孝(1981—),男,博士,副教授,主要研究方向为不确定性分析、数据挖掘;冯林(1972—),男,博士,教授,主要研究方向为粗糙集理论及应用。

徐久成等^[10]提出了基于 Vague 集的三支决策模型。Li 等^[11]基于多粒度提出了三支认知概念的公理化方法,设计了一个三支认知近似系统。Sun 等^[12]在多粒度近似空间,探讨了一个模糊决策对象的粗糙近似表示。Min 等^[13]和 Zhang 等^[14]研究了代价敏感三支决策与三支推荐问题。Yu 等^[15]分析了三支聚类。Zhang 等^[16]讨论了三层粒结构和决策表的三支信息度量等问题。

在模糊信息系统中,数据被认为是一个模糊概念,一般用隶属度函数来表示,这恰好反映了实际问题中的不确定性,但这种不确定性更易受噪声影响。Wang 等^[17]针对噪声有可能使完全不相似的对象产生微弱相似度这一情况,引入了一个阈值 ϵ ,提出了一种可调节的模糊粗糙集模型。该模型不仅能保留数据的不确定性,还能在一定程度上去除噪声的影响,且方便运算。但该模型的不足之处在于需要通过大量实验才能寻找到阈值 ϵ 的最优区间,较为耗时耗力,也有可能不会出现因 ϵ 选取不当使模糊集过度拟合或没有效果的情况。

因此,本文主要从两个方面来考虑:1)在实际应用中,噪声影响应存在两种情况,一种是使完全不相似的对象产生微弱的相似度,另一种是使几乎完全相似的对象相似度达不到最大值;2)能较为方便地计算最优阈值。Wang 等^[17]提出的可调节模糊粗糙集模型考虑了噪声影响的第一种情况。因此,本文将基于可调节模糊粗糙集模型,提出一种基于最优相似度的三支决策模糊粗糙集模型。

本文首先引入阈值对 (α, β) 并定义了三支决策模糊相似度,进而建立了基于三支决策的模糊粗糙集模型;然后利用模糊集近似的三支决策方法,给出对象相似度三支决策的错误率和语义解释,分析相似度三支决策动作对应的决策代价;接着以总体决策代价最小化为目标,给出了计算最优 (α, β) 的方法,从而建立了基于最优相似度的三支决策;最后通过实例分析说明该模型不仅能保留模糊信息系统的不确定性,还能在一定程度上去除噪声的影响,且可以计算出最优 (α, β) ,建立基于最优相似度三支决策的模糊粗糙集模型。

2 模糊集近似的三支决策方法

模糊集中的隶属度函数能够很好地刻画对象的不确定性,但从实际应用的角度出发,隶属度函数提供的高精确度隶属度值的表示方式可能过分精确,常常会伴随较高的评估代价,浪费资源和生产成本,甚至降低生产效率^[2]。因此,Zadeh^[18]提出了类似于三支决策的思想对模糊集进行近似。根据阈值对 (α, β) ,对于模糊集中的任意一个对象 x ,可以通过三支决策对 x 的隶属度值进行如下近似:

$$\mu_A^{(\alpha, \beta)}(x) = \begin{cases} 1, & \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0, & \mu_A(x) \leq \beta \\ [0, 1], & \beta < \mu_A(x) < \alpha \end{cases}$$

其中, $\mu_A^{(\alpha, \beta)}(x) \in [0, 1]$ 是对象 x 属于模糊集的程度,即隶属度。

在基于全序关系的三支决策理论框架下, Deng 等^[4]提出了一种基于决策理论的模糊集近似模型,模糊集三支决策的代价和错误如表 1 所列。表 1 中, $\mu_A(x)$ 是对象 x 的隶属度,近似后的隶属度值可能是 0, 1 或 0.5。 $act \in \{a_e, a_r, a_{s\downarrow}, a_{s\uparrow}\}$ 表示某一个三支决策动作,相应的决策错误表示为 $E_{act}(\mu_A$

(x))。采取动作 act 对应的决策代价为 $\lambda_{act} \in \{\lambda_e, \lambda_r, \lambda_{s\downarrow}, \lambda_{s\uparrow}\}$, 则 x 采取决策动作 act 引起的实际代价为 $R(act|x) = \lambda_{act} E_{act}(\mu_A(x))$ 。对于每个对象 x ,一次决策只能采取一种三支决策动作,即接受、拒绝或不承诺。通过累加每个对象的决策代价,得到总体决策代价为:

$$R = \sum_{x \in U} R(act|x) = \sum_{x \in U} \lambda_{act} E_{act}(\mu_A(x)) \quad (1)$$

表 1 模糊集三支决策的代价和错误

Table 1 Costs and errors of three-way decisions in fuzzy set

决策动作	模糊集隶属度	隶属度近似	决策错误	决策代价
提升操作(接受决策) a_e	$\mu_A(x) \geq \alpha$	1	$1 - \mu_A(x)$	λ_e
降低操作(拒绝决策) a_r	$\mu_A(x) \leq \beta$	0	$\mu_A(x) - 0$	λ_r
降低操作(不承诺决策) $a_{s\downarrow}$	$0.5 \leq \mu_A(x) < \alpha$	0.5	$\mu_A(x) - 0.5$	$\lambda_{s\downarrow}$
提升操作(不承诺决策) $a_{s\uparrow}$	$\beta < \mu_A(x) < 0.5$	0.5	$0.5 - \mu_A(x)$	$\lambda_{s\uparrow}$

文献[2]通过对规则的分析 and 计算,得出最终的三支决策规则为:

(A)若 $\mu_A(x) \geq \alpha$,则采取接受决策 a_e ,即令 $\mu_A^{(\alpha, \beta)}(x) = 1$;

(N)若 $\beta < \mu_A(x) < \alpha$,则采取不承诺决策 a_n ,即令 $\mu_A^{(\alpha, \beta)}(x) = 0.5$;

(R)若 $\mu_A(x) \leq \beta$,则采取拒绝决策 a_r ,即令 $\mu_A^{(\alpha, \beta)}(x) = 0$ 。

以总体决策代价最小化为目标,计算出最优阈值对 (α, β) 为: $(\frac{2\lambda_e + \lambda_{s\downarrow}}{2(\lambda_e + \lambda_{s\downarrow})}, \frac{\lambda_{s\uparrow}}{2(\lambda_r + \lambda_{s\uparrow})})$ 。

在模糊集中,常利用两个或多个阈值得到其分段函数。对于如何选取最优阈值,模糊集近似的三支决策方法给出了很好的解决方法。

3 基于相似度三支决策的模糊粗糙集模型

3.1 模糊粗糙集模型及其扩展模型

定义 1^[19] 设模糊信息系统 $\Omega = (U, A, V, f)$, $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是非空有限对象集, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 是属性集, $V = \{V_a | a \in A\}$ 是属性值集, V_a 是一个隶属函数值,则对象 x 在属性 a 下的属性值可以表示为 $\mu_a(x) \in [0, 1]$, f 表示一个映射, $f: U \times A \rightarrow V_a$, 即 $(x, a) \rightarrow \mu_a(x)$ 。

在模糊信息系统中, $\mu_a(x) \in [0, 1]$ 刻画了数据的不确定性,但经典粗糙集的等价关系很难再成立。因此,许多学者对经典粗糙集模型做了进一步推广。

定义 2^[19] 在 $\Omega = (U, A, V, f)$ 中, $B \subseteq A$, 如果满足以下条件:

- 1) 自反性: $S_B(x, x) = 1, \forall x \in U$;
- 2) 对称性: $S_B(x, y) = S_B(y, x), \forall x, y \in U$ 。

则 S_B 是模糊相似关系。

其中, $S_B(x, y) \in [0, 1]$ 表示对象 x 和对象 y 在属性集 B 上的不可区分程度,即对象相似度。模糊相似类 $[x]_B$ 是 U 上的一个模糊集, $[x]_B(y) = S_B(x, y), y \in U$ 。

模糊粗糙集模型中,为了方便运算,常常设定一个阈值 γ ,利用 γ -截集来构造对象相似度模糊集的一个简单的经典集合。

定义 3^[3] 在 $\Omega = (U, A, V, f)$ 中, $\forall x, y \in U, B \subseteq A$, 相似关系定义为 $R: U \times U \rightarrow [0, 1], xRy = \{(x, y) \in U \times U | S_B(x,$

$y) \geq \gamma$ 。其中, $\gamma \in [0, 1]$ 。 R 满足自反性和对称性, 但不一定满足传递性, 因此 R 是相似关系。

定义 4^[3] 在 $\Omega = (U, A, V, f)$ 中, $\forall x, y \in U, B \subseteq A$, 其相似类定义为:

$$S_B(x) = \{y \in U \mid s_B(x, y) \geq \gamma\} \quad (2)$$

显然, 利用定义 3 和定义 4, 可将模糊集通过一个阈值近似为一个经典集合, 便于运算, 但该方法却无法在知识表示中体现模糊信息系统中数据的不确定性。

考虑到噪声有可能会引起不相似对象 x 和 y 之间微弱的相似度, 即本文分析噪声影响的第一种情况, Wang 等^[17] 引入一个阈值 ϵ 来去除噪声的影响, 同时保留模糊信息系统的确定性, 以便于运算, 具体如下。

定义 5^[17] 在 $\Omega = (U, A, V, f)$ 中, $B \subseteq A, \forall x, y \in U$, 有:

$$[x]_B^\epsilon(y) = \begin{cases} 0, & S_B(x, y) < \epsilon \\ S_B(x, y), & S_B(x, y) \geq \epsilon \end{cases} \quad (3)$$

其中, $\epsilon \in [0, 1]$ 。

显然, 阈值 ϵ 对相似关系的建立有直接影响。文献^[17] 在实验中多次设置 ϵ 的值, 并计算分类结果的正确率, 寻找 ϵ 的最佳区间值。

3.2 相似度的三支决策

针对模糊信息系统, 我们主要从两个方面进行考虑: 1) 噪声不但可以使完全不相似的对象 (即 $S_B(x, y) = 0$) 产生微弱的相似度, 即 $S_B(x, y) > 0$, 也可以使几乎完全相似的对象 ($S_B(x, y) \approx 1$) 的相似度达不到最大值, 即 $S_B(x, y) < 1$; 2) 实际应用模型中, 对象相似度并非全部需要高精度的隶属度值来表示。因此, 基于定义 5, 本文引入一个阈值对 (α, β) 对对象相似度这一模糊集进行近似处理。

定义 6 在 $\Omega = (U, A, V, f)$ 中, $B \subseteq A, \forall x, y \in U$, 对象之间的相似度可近似为:

$$S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y) = \begin{cases} 1, & S_B(x, y) \geq \alpha \\ S_B(x, y), & \beta < S_B(x, y) < \alpha \\ 0, & S_B(x, y) \leq \beta \end{cases} \quad (4)$$

其中, 阈值 $(\alpha, \beta) \in [0, 1]$ 且 $\alpha > \beta$ 。

定义 6 中, 对象相似度由 (α, β) 分为 3 个区域, 即形成三支结构。每一次两两对象间相似度的近似过程可看成是一次决策, 对应的三支决策思想为: 1) 接受决策: 若 $S_B(x, y) \geq \alpha$, 则 $S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y) = 1$; 2) 不承诺决策: 若 $\beta < S_B(x, y) < \alpha$, 则 $S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y) = S_B(x, y)$; 3) 拒绝决策: 若 $S_B(x, y) \leq \beta$, 则 $S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y) = 0$ 。因此, 我们称定义 6 为相似度的三支决策, 记 $S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y)$ 为三支决策相似度。

设 $0 \leq \beta \leq 0.5 \leq \alpha \leq 1$, 则基于 (α, β) 的对象相似度的三支定义如图 1 所示。

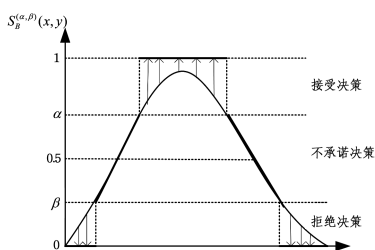


图 1 基于 (α, β) 的对象相似度的三支定义

Fig. 1 Three-way definition of objects' similar degree based on (α, β)

性质 1 在 $\Omega = (U, A, V, f)$ 中, $B \subseteq A, \forall x, y \in U$, 有:

- 1) $S_B^{(\alpha, \beta)}(x, x) = 1$;
- 2) $S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y) = S_B^{(\alpha, \beta)}(y, x)$ 。

根据定义 2, $S_B^{(\alpha, \beta)}$ 是基于三支决策相似度的模糊相似关系。

定义 7 在 $\Omega = (U, A, V, f)$ 中, Z 是 U 上的一个模糊集合, $B \subseteq A, \forall x, y \in U$, 则 Z 关于 Ω 的上、下近似是一对模糊集合, 分别表示为:

$$\overline{R}^{(\alpha, \beta)}(Z)(x) = \sup_{y \in U} (Z(y) \wedge S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y))$$

$$\underline{R}^{(\alpha, \beta)}(Z)(x) = \inf_{y \in U} (Z(y) \vee (1 - S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y)))$$

其中, $S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y)$ 是三支决策相似度。

定义 8 在 $\Omega = (U, A, V, f)$ 中, $Z \subseteq U, B \subseteq A, \forall x, y \in U$, 则有:

$$POS^{(\alpha, \beta)}(Z)(x) = \overline{R}^{(\alpha, \beta)}(Z)(x)$$

$$BND^{(\alpha, \beta)}(Z)(x) = \overline{R}^{(\alpha, \beta)}(Z)(x) - \underline{R}^{(\alpha, \beta)}(Z)(x)$$

$$NEG^{(\alpha, \beta)}(Z)(x) = 1 - \overline{R}^{(\alpha, \beta)}(Z)(x)$$

对象子集 Z 的正域、边界域及负域都仍是基于三支决策相似度的模糊集合。

在实际问题中, 若存在对象受噪声影响的可能性或者可以忽略的对象之间的差别时, 可以利用 (α, β) 将其合理拟合合成 1 或者 0, 这将更便于计算, 且更切合实际应用。

4 最优相似度三支决策的方法

定义 6 给出了相似度三支决策的定义, 我们注意到 (α, β) 值的选取直接决定了模糊信息系统中对象不可区分关系的建立, 如果选取不当, 有可能导致对象相似度过度拟合或者达不到去除噪声的目的。因此, 合理、快捷地确定最优 (α, β) 值, 建立最优相似度三支决策, 对本文建立的模糊粗糙集模型具有重要的意义。

因此, 本节将利用模糊集近似的三支决策思想, 通过最小化总体决策代价, 给出最优 (α, β) 的计算方法, 从而实现相似度三支决策最优的目标, 最终建立基于最优相似度三支决策的模糊粗糙集模型。

4.1 基于最小代价的相似度三支决策

模糊集近似的三支决策方法利用决策错误和决策代价建立总体决策代价^[4]。本节将利用该方法, 给出模糊相似度的三支决策错误及相应的语义解释。

根据图 1, 对对象相似度三支决策的操作以及在该操作下可能产生的决策错误分析如下。

1) 当 $S_B(x, y) \geq \alpha$ 时, 采取接受决策, 对象间的相似性得到提升的操作, 即 $S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y) = 1$ 。显然, 此时对象间原有相似度 $S_B(x, y)$ 的值相对较高且较易判断, 若被提升为 1, 则产生决策错误的概率较低。因此, 设 $1 - S_B(x, y)$ 为对象 x 和 y 在本应产生相似关系的事件下出错的概率。

2) 当 $\beta < S_B(x, y) < \alpha$ 时, 采取不承诺决策, 对象间的相似性保持不变的操作, 即 $S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y) = S_B(x, y) \in [0, 1]$, 仍然是用模糊隶属度值刻画对象之间的相似性程度。显然, 此

时对象 x 和 y 之间的相似性尚存在不确定性,因此设 $|0.5 - S_B(x, y)|$ 为对象 x 和 y 在本应产生相似关系下却保持不确定性而出错的概率。

3) 当 $S_B(x, y) \leq \beta$ 时, 采取拒绝决策, 对象间的相似性得到降低的操作, 即 $S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y) = 0$ 。显然, 此时对象间原有相似度 $S_B(x, y)$ 的值较低且较易判断, 若被降低为 0, 则产生错误的概率也较低。因此, 设 $S_B(x, y)$ 为对象 x 和 y 在本应产生相似关系的事件下出错的概率。

通过以上分析, 3 种操作对应的决策错误可以分别表示如下。

1) 接受决策(相似对象): 如果 $S_B(x, y) \geq \alpha$, $E_e(S_B(x, y)) = 1 - S_B(x, y)$;

2) 不承诺决策(可能相似对象): 如果 $\beta < S_B(x, y) < \alpha$, $E_b(S_B(x, y)) = |0.5 - S_B(x, y)|$;

3) 拒绝决策(不相似对象): 如果 $S_B(x, y) \leq \beta$, $E_r(S_B(x, y)) = S_B(x, y)$ 。

其中, E_e, E_b, E_r 分别是接受决策、不承诺决策和拒绝决策所产生的决策错误的概率。对于 $\forall x, y \in U$, 相应的三支决策错误可以用分段函数表示为:

$$E^{(\alpha, \beta)}(S_B(x, y)) = \begin{cases} 1 - S_B(x, y), & S_B(x, y) \geq \alpha \\ |0.5 - S_B(x, y)|, & \beta < S_B(x, y) < \alpha \\ S_B(x, y), & S_B(x, y) \leq \beta \end{cases} \quad (5)$$

本模型中, 设 $actions = \{a_e, a_b, a_r\}$ 是对象决策动作的集合, 分别表示接受事件、不承诺事件和拒绝事件。每一次决策操作对应的决策代价为 $\lambda_{act} = \{\lambda_e, \lambda_b, \lambda_r\}$, 则 x 采取一次决策动作 act 引起的实际代价为 $R(act|x) = \lambda_{act} E_{act}(S_B(x, y))$ 。对于每个对象 x , 一次决策只能采取一种三支决策动作, 即接受、不承诺或拒绝。通过累加每个对象的决策代价, 得到总体决策代价:

$$R = \sum_{x \in U} R(act|x) = \sum_{x \in U} \lambda_{act} E_{act}(S_B(x, y)) \quad (6)$$

根据三支决策的思想, 为了使总体决策代价最小, 可得到如下 3 条决策规则。

1) 接受(A): 若 $R(a_e|x) \leq R(a_r|x)$ 且 $R(a_e|x) \leq R(a_b|x)$, 则采取接受决策 a_e , 即 $S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y) = 1$;

2) 不承诺(N): 若 $R(a_b|x) \leq R(a_e|x)$ 且 $R(a_b|x) \leq R(a_r|x)$, 则采取不承诺决策 a_b , 即 $S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y) = S_B(x, y)$;

3) 拒绝(R): 若 $R(a_r|x) \leq R(a_e|x)$ 且 $R(a_r|x) \leq R(a_b|x)$, 则采取拒绝决策 a_r , 即 $S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y) = 0$ 。

在每个规则中都执行决策代价最小的决策, 即可实现总体决策代价最小化的目标, 进而建立最小化的相似度三支决策。

4.2 最优 (α, β) 的计算

根据前面 3 条规则中的不等式, 可以计算出模糊粗糙集模型中相似度三支决策的最优阈值对 (α, β) , 具体求解过程如下。

首先, A, N, R 3 条决策规则中的 3 种行动代价具体表示为:

$$R(a_e|x) = \lambda_e E_e(S_B(x, y)) = \lambda_e (1 - S_B(x, y))$$

$$R(a_b|x) = \lambda_b E_b(S_B(x, y)) = \lambda_b |0.5 - S_B(x, y)|$$

$$R(a_r|x) = \lambda_r E_r(S_B(x, y)) = \lambda_r S_B(x, y)$$

然后, 分析 3 个决策动作的决策代价 $\lambda_e, \lambda_b, \lambda_r$ 的关系如下: 本文假设 3 种操作的决策代价都是非负数, 即 $\lambda_e, \lambda_b, \lambda_r \geq 0$ 。根据模糊信息系统的特点, 考虑到不承诺决策操作既未提升相似度又未降低相似度, 而是保留了其对象的不确定性, 该决策等同于未做任何动作, 其决策代价 λ_b 应最小, 即 $\lambda_b \leq \lambda_e$ 且 $\lambda_b \leq \lambda_r$ 。另外, 在实际问题中, 噪声引起对象之间微弱相似的可能性应大于干扰对象完全相同的可能性。直观地, 可能性越大, 决策代价应越小; 可能性越小, 决策代价应越大。因此, 设 $\lambda_e \geq \lambda_r$ 。三支决策代价中, 显然两两决策代价不可能同时为 0。

通过以上分析, 即有 $0 \leq \lambda_b \leq \lambda_r \leq \lambda_e, \lambda_e + \lambda_r \neq 0, \lambda_e + \lambda_b \neq 0$ 和 $\lambda_b + \lambda_r \neq 0$ 。

对决策规则和代价进行计算。由于在不承诺规则中存在绝对值的情况, 因此分两种情况进行讨论。

1) 当 $S_B(x, y) \geq 0.5$ 时

对于接受规则(A), 有:

$$R(a_e|x) \leq R(a_b|x) \Leftrightarrow \lambda_e (1 - S_B(x, y)) \leq \lambda_b (S_B(x, y) - 0.5) \Leftrightarrow S_B(x, y) \geq \frac{\lambda_e + 0.5\lambda_b}{\lambda_e + \lambda_b};$$

$$R(a_e|x) \leq R(a_r|x) \Leftrightarrow \lambda_e (1 - S_B(x, y)) \leq \lambda_r S_B(x, y) \Leftrightarrow S_B(x, y) \geq \frac{\lambda_e}{\lambda_e + \lambda_r}。$$

因为 $\lambda_b \leq \lambda_r$, 所以 $\frac{\lambda_e + 0.5\lambda_b}{\lambda_e + \lambda_b} \geq \frac{\lambda_e}{\lambda_e + \lambda_r}$ 。因此, 当 $S_B(x, y) \geq$

$\frac{\lambda_e + 0.5\lambda_b}{\lambda_e + \lambda_b}$ 时, 采取接受规则: $S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y) = 1$ 。

对于不承诺规则(N), 类似有:

$$R(a_b|x) \leq R(a_e|x) \Leftrightarrow S_B(x, y) \leq \frac{\lambda_e + 0.5\lambda_b}{\lambda_e + \lambda_b};$$

$$R(a_b|x) \leq R(a_r|x) \Leftrightarrow S_B(x, y) \geq \frac{-0.5\lambda_b}{\lambda_r - \lambda_b}。$$

因为 $\frac{-0.5\lambda_b}{\lambda_r - \lambda_b} \leq 0$, 所以 $S_B(x, y) \geq 0.5 > 0 \geq \frac{-0.5\lambda_b}{\lambda_r - \lambda_b}$ 。因此,

当 $0.5 \leq S_B(x, y) \leq \frac{\lambda_e + 0.5\lambda_b}{\lambda_e + \lambda_b}$ 时, 采取不承诺规则: $S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y) = S_B(x, y)$ 。

对于拒绝规则(R), 同样有:

$$R(a_r|x) \leq R(a_e|x) \Leftrightarrow S_B(x, y) \leq \frac{\lambda_e}{\lambda_e + \lambda_r};$$

$$R(a_r|x) \leq R(a_b|x) \Leftrightarrow S_B(x, y) \leq \frac{-0.5\lambda_b}{\lambda_r - \lambda_b}。$$

因为 $\frac{-0.5\lambda_b}{\lambda_r - \lambda_b} \leq 0 \leq \frac{\lambda_e}{\lambda_e + \lambda_r}$, 所以 $S_B(x, y) \leq \frac{-0.5\lambda_b}{\lambda_r - \lambda_b}$, 但是

$S_B(x, y) \geq 0.5$, 与之矛盾。因此, 该情况下拒绝规则(R)不参与相似关系的决策。

2) 当 $S_B(x, y) < 0.5$ 时

对于接受规则(A), 有:

$$R(a_e|x) \leq R(a_b|x) \Leftrightarrow \lambda_e (1 - S_B(x, y)) \leq \lambda_b (0.5 - S_B(x, y)) \Leftrightarrow S_B(x, y) \geq \frac{\lambda_e - 0.5\lambda_b}{\lambda_e - \lambda_b};$$

$$R(a_e|x) \leq R(a_r|x) \Leftrightarrow S_B(x, y) \geq \frac{\lambda_e}{\lambda_e + \lambda_r}。$$

由 $0 \leq \lambda_b \leq \lambda_r \leq \lambda_e \leq 1$ 可知, $\frac{\lambda_e - 0.5\lambda_b}{\lambda_e - \lambda_b} \geq 0.5, \frac{\lambda_e}{\lambda_e + \lambda_r} \geq$

0.5, 而 $S_B(x, y) < 0.5$, 因此, 当 $S_B(x, y) < 0.5$ 时, 不参与相似关系的接受决策。

对于不承诺规则(N), 类似有:

$$R(a_b | x) \leq R(a_e | x) \Leftrightarrow S_B(x, y) \leq \frac{\lambda_e - 0.5\lambda_b}{\lambda_e - \lambda_b};$$

$$R(a_b | x) \leq R(a_r | x) \Leftrightarrow S_B(x, y) \geq \frac{0.5\lambda_b}{\lambda_b + \lambda_r}.$$

因为 $\frac{\lambda_e - 0.5\lambda_b}{\lambda_e - \lambda_b} \geq 0.5$, 而 $\frac{0.5\lambda_b}{\lambda_b + \lambda_r} \leq 0.5$, 所以当 $\frac{0.5\lambda_b}{\lambda_b + \lambda_r} \leq$

$S_B(x, y) < 0.5$ 时, 采取不承诺决策规则: $S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y) = S_B(x, y)$ 。

对于拒绝规则(R), 同样有:

$$R(a_r | x) \leq R(a_e | x) \Leftrightarrow S_B(x, y) \leq \frac{\lambda_e}{\lambda_e + \lambda_r};$$

$$R(a_r | x) \leq R(a_b | x) \Leftrightarrow S_B(x, y) \leq \frac{0.5\lambda_b}{\lambda_b + \lambda_r}.$$

因为 $\frac{\lambda_e}{\lambda_e + \lambda_r} \geq 0.5$, 而 $\frac{0.5\lambda_b}{\lambda_b + \lambda_r} \leq 0.5$, 所以当 $S_B(x, y) \leq$

$\frac{0.5\lambda_b}{\lambda_b + \lambda_r}$ 时, 采取相似关系的拒绝决策规则: $S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y) = 0$ 。

以上分别对 $S_B(x, y) \geq 0.5$ 和 $S_B(x, y) < 0.5$ 的情况进行了讨论, 并得到了相应的决策规则。最后, 合并以上规则。

接受决策规则: 当 $S_B(x, y) \geq \frac{\lambda_e + 0.5\lambda_b}{\lambda_e + \lambda_b}$ 时, $S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y) = 1$;

不承诺决策规则: 当 $\frac{0.5\lambda_b}{\lambda_b + \lambda_r} < S_B(x, y) < \frac{\lambda_e + 0.5\lambda_b}{\lambda_e + \lambda_b}$ 时,

$S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y) = S_B(x, y)$ 。

拒绝决策规则: 当 $S_B(x, y) \leq \frac{0.5\lambda_b}{\lambda_b + \lambda_r}$ 时, $S_B^{(\alpha, \beta)}(x, y) = 0$ 。

合并后的规则与定义 6 相似度的三支决策相对应, 因此

有 $\alpha = \frac{\lambda_e + 0.5\lambda_b}{\lambda_e + \lambda_b}, \beta = \frac{0.5\lambda_b}{\lambda_b + \lambda_r}$, 即 (α, β) 表示为:

$$\left(\frac{\lambda_e + 0.5\lambda_b}{\lambda_e + \lambda_b}, \frac{0.5\lambda_b}{\lambda_b + \lambda_r} \right) \quad (7)$$

根据最优 (α, β) 的计算方法, 基于定义 6, 即可得到总体决策代价最小化的最优相似度三支决策, 从而建立基于最优相似度三支决策的模糊粗糙集模型。

5 实例分析

下面基于一个模糊信息系统实例来分析本文建立的最优相似度三支决策的模糊粗糙集模型。

例 1 $\Omega = (U, A, V, f)$ 是一个模糊信息系统, 如表 2 所列。其中, 对象集合 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_8\}$, 属性集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \forall a \in A, \forall x \in U$, 对象的隶属度为 $\mu_a(x) \in [0, 1]$ 。

表 2 $\Omega = (U, A, V, f)$

Table 2 $\Omega = (U, A, V, f)$

Ω	a_1	a_2	a_3	a_4
x_1	0.1	0.8	0.9	0.8
x_2	1.0	0.1	0.3	0.2
x_3	0.6	0.3	0.8	0.4
x_4	0.1	0.6	0.9	0.6
x_5	0.2	0.9	0.9	0.5
x_6	0.5	0.2	0.7	0.3
x_7	0.3	0.9	0.5	0.7
x_8	1.0	0.6	0.2	0.1

通过欧氏距离计算对象间的相似度, 如式(8)所示:

$$S_A(x, y) = 1 - \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{\sum_{k=1}^m (\mu_{a_k}(x) - \mu_{a_k}(y))^2} \quad (8)$$

其中, $x, y \in U, m = 4$ 。经计算, 对象相似度如表 3 所列。

表 3 相似度 $S_A(x, y)$

Table 3 Similarity degree $S_A(x, y)$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_1	1							
x_2	0.289	1						
x_3	0.591	0.675	1					
x_4	0.888	0.035	0.690	1				
x_5	0.834	0.030	0.685	0.925	1			
x_6	0.550	0.740	0.935	0.625	0.590	1		
x_7	0.765	0.165	0.580	0.830	0.815	0.515	1	
x_8	0.324	0.820	0.545	0.095	0.190	0.570	0.365	1

根据定义 6, 利用阈值 (α, β) 可建立基于相似度三支决策的模糊粗糙集模型。当计算出最优 (α, β) 时, 相应地可得到最优相似度三支决策的模糊粗糙集模型。

在计算最优阈值 (α, β) 时, 根据 3.2 节中的分析, 3 种动作所产生的决策代价应满足 $0 \leq \lambda_b \leq \lambda_r \leq \lambda_e$ 。因此, 设 $\lambda_b = 0.25, \lambda_r = 0.32, \lambda_e = 0.48$ 。根据式(7)分别计算最优阈值 (α, β) 为:

$$\alpha = \frac{\lambda_e + 0.5\lambda_b}{\lambda_e + \lambda_b} = 0.829$$

$$\beta = \frac{0.5\lambda_b}{\lambda_b + \lambda_r} = 0.219$$

在模糊信息系统中, 基于相似度的三支决策动作、错误率和代价如表 4 所列。

表 4 基于相似度的三支决策动作、错误率和代价

Table 4 Three-way decision actions, error rates and costs

based on similarity

决策动作	对象相似度	相似度近似	决策错误	决策代价
提升操作(接受决策) a_e	$S_A(x, y) \geq \alpha$	1	$1 - S_A(x, y)$	λ_e
不变操作(不承诺决策) a_b	$\beta < S_A(x, y) < \alpha$	$S_A(x, y)$	$ 0.5 - S_A(x, y) $	λ_b
降低操作(拒绝决策) a_r	$S_A(x, y) \leq \beta$	0	$S_A(x, y)$	λ_r

根据表 2 和表 3, 利用最优 (α, β) 值得到所有对象的三支决策相似度 $S_A^{(\alpha, \beta)}(x, y)$ 如下。

1) 接受决策(提升操作): $S_A(x_1, x_4) = 0.888 \geq \alpha, \Rightarrow S_A^{(\alpha, \beta)}(x_1, x_4) = 1$ 。

类似地, 对象相似度进行提升操作的有:

$S_A^{(\alpha, \beta)}(x_1, x_5) = S_A^{(\alpha, \beta)}(x_3, x_6) = S_A^{(\alpha, \beta)}(x_4, x_5) = S_A^{(\alpha, \beta)}(x_4, x_7) = 1$ 。

2) 拒绝决策(降低操作): $S_A(x_2, x_4) = 0.035 \leq \beta, \Rightarrow S_A^{(\alpha, \beta)}(x_2, x_4) = 0$ 。

同样地, 对象相似度进行降低操作的有: $S_A^{(\alpha, \beta)}(x_2, x_5) = S_A^{(\alpha, \beta)}(x_2, x_7) = S_A^{(\alpha, \beta)}(x_4, x_8) = S_A^{(\alpha, \beta)}(x_5, x_8) = 0$ 。

3) 不承诺决策(无操作): $\beta < S_A(x_1, x_2) < \alpha \Rightarrow S_A^{(\alpha, \beta)}(x_1, x_2) = S_A(x_1, x_2)$ 。除去操作 1)、操作 2) 涉及到的对象, 余下对象的相似度都执行操作 3), 即对象相似度保持不变。因此, 所有对象的 $S_A^{(\alpha, \beta)}(x, y)$ 如表 5 所列。

表5 基于三支决策的相似度 $S_A^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ Table 5 $S_A^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ based on three-way decisions

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	1							
x_2	0.289	1						
x_3	0.591	0.675	1					
x_4	1	0	0.690	1				
x_5	1	0	0.685	1	1			
x_6	0.550	0.740	1	0.625	0.590	1		
x_7	0.765	0	0.580	1	0.815	0.515	1	
x_8	0.324	0.820	0.545	0	0	0.570	0.365	1

显然,针对对象本应几乎相似的情况,提升操作去除了噪声的影响;针对对象本应几乎不相似的情况,降低操作去除了噪声的影响。同时,这两个操作使部分对象的相似度为0或者1,代替了较高精度隶属度值的表示,从而方便了模型的运算。无操作使对象相似度保持不变,从而恰好保持了模糊信息系统中的不确定性。

根据 $\lambda_b, \lambda_r, \lambda_c$ 的值,可通过计算得到总体决策代价最小化的最优阈值 (α, β) ,即能实现对象相似度三支决策的最优化,从而建立基于最优的对象相似度三支决策的模糊粗糙集模型。在现实问题中, $\lambda_b, \lambda_r, \lambda_c$ 的值可根据具体的现实情况进行设定。

结束语 在模糊信息系统中,本文引入阈值对 (α, β) 提出了一种基于最优相似度三支决策的模糊粗糙集模型。首先,建立了基于相似度三支决策的模型;然后,给出了对象相似度三支决策的错误率、决策代价以及相应的语义解释;接着,以总体决策代价最小化为目标,给出了计算最优 (α, β) 的方法,从而建立了一种基于最优相似度三支决策的模糊粗糙集模型;最后,用实例分析说明了该模型,保留了模糊信息系统的确定性,又一定程度地去除了噪声影响,且能通过计算得到最优阈值 (α, β) 。在今后的研究工作中,我们将利用公开数据集对模型进行检验,并进一步讨论该模型的属性约简方法等。

参考文献

[1] YAO Y Y. An outline of a theory of three-way decisions[C]// Proceedings of the 8th International RSCTC Conference. 2012: 1-17.

[2] 刘盾,李天瑞,苗夺谦,等. 三支决策与粒计算[M]. 北京:科学出版社,2013.

[3] YANG J L, ZHANG X Y, TANG X. Three-way decisions based parameter selection of OWA operators in fuzzy information system [J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2016, 31(6): 1156-1163. (in Chinese)
杨霖琳,张贤勇,唐孝. 基于三支决策的模糊信息系统 OWA 算子参数选择 [J]. 数据采集与处理, 2016, 31(6): 1156-1163.

[4] DENG X F, YAO Y Y. Decision-theoretic three-way approxi-

mations of fuzzy sets [J]. Information Sciences, 2014, 279: 702-715.

- [5] LIU D, LIANG D C, WANG C C. A novel three-way decision model based on incomplete information system [J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91: 16-31.
- [6] LIANG D C, LIU D. Deriving three-way decisions from intuitionistic fuzzy decision-theoretic rough sets [J]. Information Sciences, 2015, 30(C): 28-48.
- [7] LIANG D C, XU Z, LIU D. Three-way decisions with intuitionistic fuzzy decision-theoretic rough sets based on point operators [J]. Information Sciences, 2017, 375(1): 183-201.
- [8] LIANG D C, LIU D. A novel risk decision-making based on decision-theoretic rough sets under hesitant fuzzy information [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2015, 23(2): 237-247.
- [9] HU B Q. Three-way decision spaces based on partially ordered sets and three-way decisions based on hesitant fuzzy sets [J]. Knowledge-Based System, 2016, 91(C): 16-31.
- [10] XU J C, DU L N, LIU Y Y. Three-way decisions and vague sets [J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2016, 37(7): 1464-1468. (in Chinese)
徐久成,杜丽娜,刘洋洋. 三支决策与 Vague 集 [J]. 小型微型计算机系统, 2016, 37(7): 1464-1468.
- [11] LI J H, HUANG C C, QI J J, et al. Three-way cognitive concept learning via multi-granularity [J]. Information Sciences, 2017, 378(1): 244-263.
- [12] SUN B Z, MA W M, XIAO X. Three-way group decision making based on multigranulation fuzzy decision-theoretic rough set over two universes [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2017, 81(2): 87-102.
- [13] MIN F, HE H P, QIAN Y H, et al. Test-cost-sensitive attribute reduction [J]. Information Sciences, 2011, 181(22): 4928-4942.
- [14] ZHANG H R, MIN F, SHI B. Regression-based three-way recommendation [J]. Information Sciences, 2017, 378(1): 444-461.
- [15] YU H, ZHANG C, WANG G Y. A tree-based incremental overlapping clustering method using the three-way decision theory [J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91(C): 189-203.
- [16] ZHANG X Y, MIAO D Q. Three-layer granular structures and three-way informational measures of a decision table [J]. Information Sciences, 2017, 412-413: 67-86.
- [17] WANG C Z, QI Y L, SHAO M W, et al. A fitting model for feature selection with fuzzy rough sets [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2017, 25(4): 741-753.
- [18] ZADEH L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.
- [19] 胡寿松,何亚群. 粗糙决策理论与应用 [M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2006.