

# 决策形式背景面向属性与面向对象的决策规则

姜玉婷 秦克云

(西南交通大学数学学院 成都 611756)

**摘 要** 决策形式背景是形式概念分析的重要研究内容,决策形式背景的知识体现为决策规则。文中提出了面向对象与面向属性概念格的决策规则,给出了决策规则的语义解释;刻画了面向属性概念格的决策规则与基于 Wille 概念格的决策规则的关系,给出了一种属性集协调性判别方法。

**关键词** 决策形式背景,形式概念分析,面向属性,面向对象,决策规则

**中图分类号** TP182 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.10.006

## Property-oriented and Object-oriented Decision Rules in Decision Formal Contexts

JIANG Yu-ting QIN Ke-yun

(College of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

**Abstract** Decision formal context is an important topic of formal concept analysis. The decision rules in decision formal contexts based on object-oriented and property oriented concept lattices were proposed in this paper. The semantic interpretation of decision rules was provided. Furthermore, the relationship between decision rules based on property-oriented concept lattices and decision rules based on Wille's concept lattices were described. And a method for determining the consistency of attribute sets was given.

**Keywords** Decision formal contexts, Formal concept analysis, Property-oriented, Object-oriented, Decision rules

## 1 引言

1982 年,德国数学家 Wille 提出了形式概念分析(Formal Concept Analysis, FCA)理论<sup>[1]</sup>,也称概念格理论。该理论是根据数据集中对象与属性之间的二元关系建立的一种概念层次结构,可用于概念的表示、排序和显示,是数据分析与规则提取的一种有效工具。作为知识处理的有力工具,概念格理论已被广泛应用于知识工程、机器学习、模式识别、专家系统、决策分析、数据挖掘等领域。

作为形式概念分析的重要研究内容之一,形式背景的属性约简理论与方法受到了学术界的广泛关注。属性约简不仅可以获得更简洁的知识,能揭示属性之间的依赖关系。Ganter 等<sup>[2]</sup>提出了协调子形式背景的概念,从减少行与列的角度提出了可约简属性与可约简对象的概念,并对相关属性的特征进行了系统分析。Zhang 等<sup>[3]</sup>给出了协调属性集的判断定理,提出了形式概念的区分属性与区分矩阵的概念,并借助布尔逻辑公式转换给出了约简的计算方法。Liu 等<sup>[4]</sup>针对基于属性的概念格与基于对象的概念格给出了协调集判断定理,通过概念的区分属性给出了属性约简方法,并刻画了概念格约简与信息系统约简之间的关系。Medina<sup>[5]</sup>刻画了概念格、基于属性的概念格以及基于对象的概念格中的属性特征。人们对基于属性的概念格约简、基于对象的概念格约简以及信

息系统约简的相互关系进行了深入分析<sup>[6-7]</sup>;同时,将形式概念和形式概念格引入粗糙集理论。例如, Gediga 等<sup>[8]</sup>和 Yao<sup>[9]</sup>基于近似算子分别定义了基于属性和基于对象的形式概念格。Belohlavek 等<sup>[10]</sup>针对模糊形式背景研究了保持经典集诱导的模糊概念不变的约简问题,并给出了约简方法。Wu 等<sup>[11]</sup>将粒计算理论与概念格理论相结合,提出了形式背景中的粒结构与粒协调集的概念,并给出了粒约简计算方法。其中,约简计算无需构造概念格,可直接通过对象的区分属性获得,计算简便易行。Shao 等<sup>[12]</sup>针对模糊形式背景提出了粒协调集与粒约简的概念,并给出了粒约简计算方法。李金海等<sup>[13]</sup>提出了概念格外延信息量的概念,给出了信息量计算方法并进一步提出了一种启发式属性约简计算方法。Wei 等<sup>[14]</sup>从决策规则的角度提出了决策形式背景的强协调性与弱协调性概念,对于强协调决策形式背景给出了协调集的判定定理及约简方法;对于弱协调决策形式背景,通过蕴含映射给出了约简计算方法。Wu 等<sup>[11]</sup>提出了粒协调决策形式背景的概念,并通过对象的区分属性矩阵给出粒协调决策形式背景的约简方法。Li 等<sup>[15-18]</sup>基于决策规则的约简问题对决策形式背景进行了系统研究,提出了决策规则之间的蕴涵关系、冗余决策规则、必要决策规则等概念,给出了冗余决策规则及必要决策规则的等价描述,借助区分属性给出了决策形式背景保持决策规则的约简方法。Shao 等<sup>[19]</sup>借助决策属性建立

到稿日期:2018-04-17 返修日期:2018-05-16 本文受国家自然科学基金(61473239,61372187)资助。

姜玉婷(1993-),女,硕士生,主要研究方向为概念格理论;秦克云(1962-),男,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究方向为粗糙集理论、粒计算、多值逻辑,E-mail: keyunqin@263.net(通信作者)。

了概念之间的等价关系,并给出了概念的压缩方法以及决策规则获取方法。李进金等<sup>[20]</sup>通过引入交互式可约元提出了一种形式背景属性约简方法,给出了一种概念格生成算法,并且针对协调决策形式背景给出了一种属性约简方法。

决策形式背景的约简理论与方法是相关理论的热门研究问题。对于决策规则的研究,大多数都是基于 Wille 概念格的,而对于面向属性与面向对象概念格的决策规则研究以及这些决策规则之间的关系讨论得较少。本文针对决策形式背景,提出了面向对象与面向属性概念格的决策规则;刻画了面向属性概念格的决策规则与基于 Wille 概念格的决策规则的关系,给出了一种属性集协调性判别方法。

## 2 预备知识

形式概念分析基于形式背景展开讨论。一个形式背景是一个三元组 $(G, M, I)$ ,其中 $G$ 为所讨论的对象构成的集合, $M$ 为 $G$ 中对象所具有的属性构成的集合, $I$ 是 $G$ 和 $M$ 之间的二元关系,即 $I \subseteq G \times M$ 。对于任意 $g \in G, m \in M$ ,若 $(g, m) \in I$ ,则表示对象 $g$ 具有属性 $m$ ;若 $(g, m) \notin I$ ,则表示对象 $g$ 不具有属性 $m$ 。以下用 $P(X)$ 表示集合 $X$ 的幂集合。为刻画形式概念,Wille引入了以下算子 $\uparrow: P(G) \rightarrow P(M), \downarrow: P(M) \rightarrow P(G)$ :对于任意 $A \in P(G), B \in P(M)$ ,有:

$$A^\uparrow = \{m \in M; \forall a \in A((a, m) \in I)\} \quad (1)$$

$$B^\downarrow = \{g \in G; \forall b \in B((g, b) \in I)\} \quad (2)$$

即 $A^\uparrow$ 为 $A$ 中对象所具有公共属性构成的集合, $B^\downarrow$ 为具有 $B$ 中所有属性的对象构成的集合。对于任意 $g \in G, m \in M$ ,将 $\{g\}^\uparrow$ 和 $\{m\}^\downarrow$ 分别简记为 $g^\uparrow$ 和 $m^\downarrow$ 。

基于模态算子,Gediga等<sup>[8]</sup>提出了面向属性的形式概念,建立了面向属性的概念格。Yao<sup>[9]</sup>进一步提出了面向对象的概念格。考虑算子 $\diamond: P(G) \rightarrow P(M), \square: P(M) \rightarrow P(G)$ ,其中对于任意 $A \in P(G), B \in P(M)$ ,有:

$$A^\diamond = \{m \in M; \exists a \in A((a, m) \in I)\} \quad (3)$$

$$B^\square = \{g \in G; \forall b \in B((g, b) \in I \rightarrow b \in B)\} \quad (4)$$

类似地,算子 $\square: P(G) \rightarrow P(M), \diamond: P(M) \rightarrow P(G)$ 的定义为:对于任意 $A \in P(G), B \in P(M)$ ,有:

$$A^\square = \{m \in M; \forall g \in G((g, m) \in I) \rightarrow g \in A\} \quad (5)$$

$$B^\diamond = \{g \in G; \exists b \in B((g, b) \in I)\} \quad (6)$$

**定义 1**<sup>[8]</sup> 设 $(G, M, I)$ 为形式背景,对于任意 $A \in P(G), B \in P(M)$ ,若 $A^\diamond = B, B^\square = A$ ,则称 $(A, B)$ 为一个面向属性的形式概念。

将 $(G, M, I)$ 中所有面向属性的形式概念构成的集合记为 $B_p(G, M, I)$ 。对于任意 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \in B_p(G, M, I)$ ,定义它们之间的序关系 $\leq$ 为: $(X_1, Y_1) \leq (X_2, Y_2)$ ,当且仅当 $X_1 \subseteq X_2$ (或等价地, $Y_1 \subseteq Y_2$ )。

**定理 1** 设 $(G, M, I)$ 为形式背景, $B_p(G, M, I)$ 关于 $\leq$ 构成完备格,称为面向属性的概念格,其中对于任意 $(X_j, Y_j) \in B_p(G, M, I), j \in J$ ( $J$ 为指标集),有:

$$\bigwedge_{j \in J} (X_j, Y_j) = (\bigcap_{j \in J} X_j, (\bigcap_{j \in J} Y_j)^\square) \quad (7)$$

$$\bigvee_{j \in J} (X_j, Y_j) = ((\bigcap_{j \in J} X_j)^\diamond, \bigcap_{j \in J} Y_j) \quad (8)$$

**定义 2**<sup>[9]</sup> 设 $(G, M, I)$ 为形式背景,对于任意 $A \in P(G), B \in P(M)$ ,若 $A^\square = B, B^\diamond = A$ ,则称 $(A, B)$ 为一个面向对象的概念。

将 $(G, M, I)$ 中所有面向对象的形式概念构成的集合记为 $B_o(G, M, I)$ ,对于任意 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \in B_o(G, M, I)$ ,定义它们之间的序关系 $\leq$ 为: $(X_1, Y_1) \leq (X_2, Y_2)$ ,当且仅当 $X_1 \subseteq X_2$ (或等价地, $Y_1 \subseteq Y_2$ )。

**定理 2** 设 $(G, M, I)$ 为形式背景, $B_o(G, M, I)$ 关于 $\leq$ 构成完备格,称为面向对象的概念格,其中对于任意 $(X_j, Y_j) \in B_o(G, M, I), j \in J$ ( $J$ 为指标集),有:

$$\bigwedge_{j \in J} (X_j, Y_j) = ((\bigcap_{j \in J} X_j)^\square, \bigcap_{j \in J} Y_j) \quad (9)$$

$$\bigvee_{j \in J} (X_j, Y_j) = (\bigcap_{j \in J} X_j, (\bigcap_{j \in J} Y_j)^\diamond) \quad (10)$$

**性质 1** 设 $(G, M, I)$ 为形式背景, $A_1, A_2 \subseteq G, B_1, B_2 \subseteq M$ 。

(1) 若 $A_1 \subseteq A_2, B_1 \subseteq B_2$ ,则 $A_1^\diamond \subseteq A_2^\diamond, A_1^\square \subseteq A_2^\square, B_1^\diamond \subseteq B_2^\diamond, B_1^\square \subseteq B_2^\square$ 。

(2)  $A^\square \subseteq A \subseteq A^\diamond, B^\diamond \subseteq B \subseteq B^\square$ 。

(3)  $A^\square \diamond = A^\square, A^\diamond \square = A^\diamond, B^\diamond \diamond = B^\diamond, B^\square \square = B^\square$ 。

(4)  $(A_1 \cup A_2)^\diamond = A_1^\diamond \cup A_2^\diamond, (A_1 \cap A_2)^\square = A_1^\square \cap A_2^\square, (B_1 \cup B_2)^\diamond = B_1^\diamond \cup B_2^\diamond, (B_1 \cap B_2)^\square = B_1^\square \cap B_2^\square$ 。

设 $(G, M, I)$ 为形式背景, $E \subseteq M$ 。令 $I_E = I \cap (G, M)$ ,则 $(G, E, I_E)$ 也是形式背景,称为 $(G, M, I)$ 的一个子形式背景,其中的算子分别记为 $\diamond_E$ 和 $\square_E$ 。容易证明,对于任意 $X \subseteq G, B \subseteq E$ ,有 $X^{\diamond_E} = X^{\diamond_M} \cap E, B^{\square_M} = B^{\square_M} - \{x \in G; x \in (M - E)\}^\diamond$ 。

**定义 3**<sup>[15]</sup> 设 $(G, M, I, T, J)$ 是一个决策形式背景, $E \subseteq M$ 。对于任意 $(X, A) \in B(G, E, I_E), (Y, B) \in B(G, T, J)$ ,若 $X \subseteq Y$ ,且 $X, Y, A, B \neq \emptyset$ ,则称 $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ 是一个决策规则,简记为 $A \rightarrow B$ 。

$(X, A) \rightarrow (Y, B)$ 的直观含义为:如果某对象 $x$ 具有 $A$ 中的所有条件属性,则由 $x \in X \subseteq Y = B^\downarrow$ 可知 $x$ 必具有 $B$ 中所有的决策属性。

**定义 4**<sup>[15]</sup> 设 $(G, M, I, T, J)$ 是决策形式背景。若决策规则 $(X, A) \rightarrow (Y, B), (X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1)$ 满足 $A \subseteq A_1, B_1 \subseteq B$ ,则称 $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ 蕴涵 $(X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1)$ ,记为 $(X, A) \rightarrow (Y, B) \Rightarrow (X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1)$ 。

若 $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ 蕴涵 $(X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1)$ ,则相对于 $(X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1)$ ,决策规则 $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ 包含更多的决策信息。将决策形式背景 $(G, M, I, T, J)$ 的所有决策规则构成的集合记为 $R(G, M, T)$ 。

**定义 5**<sup>[15]</sup> 设 $(G, M, I, T, J)$ 是一个决策形式背景, $E \subseteq M$ 。称 $E$ 是 $(G, M, I, T, J)$ 的决策规则协调集,如果对于任意 $(X, A) \rightarrow (Y, B) \in R(G, M, T)$ ,存在 $(X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1) \in R(G, E, T)$ 使得 $(X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1) \Rightarrow (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 。

Li等<sup>[15]</sup>给出了决策规则协调集的判定定理,并基于区分函数给出了决策规则约简计算方法。

## 3 面向属性的决策形式背景的决策规则

本节基于模态算子考虑面向属性的决策规则。

**定义 6** 设 $(G, M, I, T, J)$ 是一个决策形式背景, $E \subseteq M$ 。对于任意 $(X, A) \in B_p(G, E, I_E), (Y, B) \in B_p(G, T, J)$ ,若 $X \subseteq Y$ 且 $X, Y, A, B \neq \emptyset$ ,则称 $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ 是一个面向属

性的决策规则,简记为  $A \rightarrow B$ 。

$(X, A) \rightarrow (Y, B)$  的直观含义为:如果某对象  $x$  具有的条件属性都在  $A$  中,则由  $x \in X \subseteq Y = B^{\square}$  可知  $x$  具有的决策属性都在  $B$  中。

**定义 7** 设  $(G, M, I, T, J)$  是一个决策形式背景,若  $(X, A) \rightarrow (Y, B), (X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1)$  都是面向属性的决策规则,且满足  $A_1 \subseteq A, B \subseteq B_1$ ,则称  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$  蕴涵  $(X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1)$ ,记为  $(X, A) \rightarrow (Y, B) \Rightarrow (X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1)$ 。

若  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$  蕴涵  $(X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1)$ ,则相对于  $(X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1), (X, A) \rightarrow (Y, B)$  包含更多的决策信息。将决策形式背景  $(G, M, I, T, J)$  的所有面向属性概念格的决策规则构成的集合记为  $R_p(G, M, T)$ 。

**例 1** 考虑决策形式背景  $F = (G, M, I, T, J)$ ,如表 1 所列。其中,  $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}, M = \{a, b, c, d, e, f\}, T = \{d_1, d_2, d_3\}$ 。

表 1 决策形式背景  $F = (G, M, I, T, J)$

Table 1 Decision formal context  $F = (G, M, I, T, J)$

$G$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$d_1$	$d_2$	$d_3$
1	0	0	1	1	1	0	0	0	1
2	0	1	1	1	1	1	1	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0	1
4	1	0	1	0	0	0	1	0	0
5	0	1	1	1	1	1	0	1	1

由表 1 可以得出:  $F = (G, M, I, T, J)$  的所有面向属性的决策规则为:

- $R_1: (13, cde) \rightarrow (135, d_2 d_3)$
- $R_2: (3, e) \rightarrow (135, d_2 d_3)$
- $R_3: (13, cde) \rightarrow (1234, d_1 d_3)$
- $R_4: (34, ace) \rightarrow (1234, d_1 d_3)$
- $R_5: (3, e) \rightarrow (1234, d_1 d_3)$
- $R_6: (4, ac) \rightarrow (1234, d_1 d_3)$
- $R_7: (134, acde) \rightarrow (1234, d_1 d_3)$
- $R_8: (3, e) \rightarrow (13, d_3)$
- $R_9: (4, ac) \rightarrow (24, d_1)$

**性质 2** 设  $(G, M, I, T, J)$  是一个决策形式背景,  $E \subseteq M$ 。对于任意  $(X, A) \rightarrow (Y, B) \in R_p(G, E, T)$ ,存在  $(X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1) \in R_p(G, M, T)$  使得  $(X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1) \Rightarrow (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 。

**证明:**事实上,由于  $X \in Ext B_p(G, E, I_E) \subseteq Ext B_p(G, M, I)$ ,因此  $(X, X^{\diamond}) \in B_p(G, M, I)$ ,再由  $X \subseteq Y$  可知  $(X, X^{\diamond}) \rightarrow (Y, B) \in R_p(G, M, T)$ ,又因为  $A = X^{\diamond \varepsilon} = X^{\diamond} \cap E \subseteq X^{\diamond}$ ,所以  $(X, X^{\diamond}) \rightarrow (Y, B) \Rightarrow (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 。

**定义 8** 设  $(G, M, I, T, J)$  是一个决策形式背景,  $E \subseteq M$ 。称  $E$  是  $(G, M, I, T, J)$  面向属性的决策规则协调集,如果对于任意  $(X, A) \rightarrow (Y, B) \in R_p(G, M, T)$ ,存在  $(X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1) \in R_p(G, E, T)$  使得  $(X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1) \Rightarrow (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 。称  $E$  是  $(G, M, I, T, J)$  面向属性的决策规则约简,如果  $E$  是  $(G, M, I, T, J)$  面向属性的决策规则协调集,且  $E$  的任意真子集不是  $(G, M, I, T, J)$  面向属性的决策规则协调集。

**定义 9** 设  $F = (G, M, I, T, J)$  是一个决策形式背景,  $F^C = (G, M, I^C, T, J^C)$  为  $F$  的补决策形式背景,其中对于

任意的  $g \in G, m \in M, t \in T$ ,有:

$$(g, m) \in I^C \Leftrightarrow (g, m) \notin I$$

$$(g, t) \in T^C \Leftrightarrow (g, t) \notin T$$

**定理 3** 设  $F = (G, M, I, T, J)$  是一个决策形式背景,  $F^C = (G, M, I^C, T, J^C)$  为  $F$  的补决策形式背景。

1)  $(X, A) \rightarrow (Y, B) \in R_p(G, M, T)$  当且仅当  $(X, M-A) \rightarrow (Y, T-B)$  是  $F^C$  中的决策规则。

2) 若  $E$  是  $F$  的面向属性的决策规则协调集,则  $E$  是  $F^C$  的决策规则协调集。

3) 若  $E$  是  $F$  的面向属性的决策规则约简,则存在  $E$  的一个子集是  $F^C$  的决策规则约简。

**证明:**1)事实上,若  $(X, A) \rightarrow (Y, B) \in R_p(G, M, T)$ ,则  $X \subseteq Y, (X, A) \in B_p(G, M, I), (Y, B) \in B_p(G, T, J)$ ;从而  $(X, M-A) \in B(G, M, I^C), (Y, T-B) \in B(G, T, J^C)$ 。再由  $X \subseteq Y$  可知  $(X, M-A) \rightarrow (Y, T-B)$  是  $F^C$  中的决策规则,反之亦然。

2)设  $E$  是  $F$  的面向属性的决策规则协调集,对于  $F^C$  中任意一条决策规则  $(X, A) \rightarrow (Y, B) \in R^C(G, M, T)$ ,有  $(X, M-A) \rightarrow (Y, T-B) \in R_p(G, M, T)$ ,从而存在  $(X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1) \in R_p(G, E, T)$ ,使得  $(X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1) \Rightarrow (X, M-A) \rightarrow (Y, T-B)$ ,故有  $X_1 \subseteq Y_1, M-A \subseteq A_1, B_1 \subseteq T-B$ 。由  $(X_1, A_1) \in B_p(G, E, I_E), (Y_1, B_1) \in B_p(G, T, J)$  可得  $(X_1, E-A_1) \in B(G, E, I_E^C), (Y_1, T-B_1) \in B(G, T, J^C)$ 。再由  $X_1 \subseteq Y_1$  可得  $(X_1, E-A_1) \rightarrow (Y_1, T-B_1) \in R^C(G, E, T)$ ,又因为  $M-A \subseteq A_1, B_1 \subseteq T-B$ ,所以  $E-A_1 \subseteq M-A_1 \subseteq A, B \subseteq T-B_1$ ,从而有  $(X_1, E-A_1) \rightarrow (Y_1, T-B_1) \Rightarrow (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ,即  $E$  是  $F^C$  的决策规则协调集。

下面通过例 2 来说明  $F^C$  的决策规则协调集未必是  $F$  面向属性的决策规则协调集。

**例 2** 考虑例 1 的决策形式背景  $F = (G, M, I, T, J)$ ,如表 1 所列。 $F$  的补决策形式背景  $F^C = (G, M, I^C, T, J^C)$  即为文献[15]中的决策形式背景,如表 2 所列。其中,  $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}, M = \{a, b, c, d, e, f\}, T = \{d_1, d_2, d_3\}$ 。

表 2 决策形式背景  $F^C = (G, M, I^C, T, J^C)$

Table 2 Decision formal context  $F^C = (G, M, I^C, T, J^C)$

$G$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$d_1$	$d_2$	$d_3$
1	0	0	1	1	1	0	0	0	1
2	0	1	1	1	1	1	1	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0	1
4	1	0	1	0	0	0	1	0	0
5	0	1	1	1	1	1	0	1	1

文献[15]通过区分属性得到了  $F^C$  的决策规则约简为  $\{a, b, e\}$  和  $\{a, e, f\}$ ,核心属性集为  $\{a, e\}$ 。假设  $E = \{a, b, e\}$ ,由表 1 可得  $F = (G, E, I_E, T, J)$  的所有面向属性的决策规则为:

- $R_1: (13, e) \rightarrow (13, d_3)$
- $R_2: (13, e) \rightarrow (135, d_2 d_3)$
- $R_3: (4, a) \rightarrow (24, d_1)$
- $R_4: (4, a) \rightarrow (1234, d_1 d_3)$
- $R_5: (134, ae) \rightarrow (1234, d_1 d_3)$

容易看出,对于例 1 的  $F$  中面向属性的决策规则  $R_3: (13, cde) \rightarrow (1234, d_1 d_3)$ ,在  $R_p(G, E, T)$  中不能找到一条规则  $(X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1)$  使得  $(X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1) \Rightarrow (13, cde) \rightarrow$

(1234,  $d_1 d_3$ )成立,因此  $E = \{a, b, e\}$  不是  $F = (G, M, I, T, J)$  的面向属性的规则协调集。

#### 4 面向对象与面向属性的决策形式背景的决策规则之间的关系

**定义 10** 设  $(G, M, I, T, J)$  是一个决策形式背景。对于任意  $(X, A) \in B_o(G, E, I_E), (Y, B) \in B_o(G, T, J)$ , 若  $X \subseteq Y$  且  $X \cdot Y, A, B \neq \emptyset$ , 则称  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$  是一个面向对象的决策规则。

$(X, A) \rightarrow (Y, B)$  的直观含义为: 如果某对象  $x$  具有  $A$  中的某个条件属性, 则由  $x \in X \subseteq Y = B^\diamond$  可知  $x$  必具有  $B$  中的某个决策属性。

**定义 11** 设  $(G, M, I, T, J)$  是一个决策形式背景, 若  $(X, A) \rightarrow (Y, B), (X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1)$  都是面向对象的决策规则, 且满足  $A_1 \subseteq A, B \subseteq B_1$ , 则称  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$  蕴涵  $(X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1)$ , 记为  $(X, A) \rightarrow (Y, B) \Rightarrow (X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1)$ 。

将决策形式背景  $(G, M, I, T, J)$  的所有面向对象概念格的决策规则构成的集合记为  $R_o(G, M, T)$ 。

**定义 12** 设  $(G, M, I, T, J)$  是一个决策形式背景, 若  $(X, A) \in B_o(G, M, I), (Y, B) \in B_o(G, T, J)$ , 且  $Y \subseteq X; X, Y, A, B \neq \emptyset$ , 则称  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$  为决策形式背景  $(G, M, I, T, J)$  面向对象的 II-型决策规则。

$(X, A) \rightarrow (Y, B)$  的直观含义为: 若对象  $x \in G$  不具有  $A$  中所有条件属性, 则  $x$  不具有  $B$  中所有决策属性; 或者, 若对象  $x \in G$  具有的条件属性都在  $M - A$  中, 则  $x$  所具有的决策属性都在  $T - B$  中。

**定义 13** 设  $(G, M, I, T, J)$  是一个决策形式背景, 若  $(X, A) \rightarrow (Y, B), (X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1)$  都是面向对象的 II-型决策规则, 且满足  $A \subseteq A_1, B_1 \subseteq B$ , 则称  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$  蕴涵  $(X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1)$ , 记为  $(X, A) \rightarrow (Y, B) \Rightarrow (X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1)$ 。

将决策形式背景  $(G, M, I, T, J)$  的所有面向对象概念格的 II-型决策规则构成的集合记为  $R_o^{\text{II}}(G, M, T)$ 。

**定义 14** 设  $(G, M, I, T, J)$  是一个决策形式背景, 若  $(X, A) \in B_p(G, M, I), (Y, B) \in B_p(G, T, J)$ , 且  $Y \subseteq X; X, Y, A, B \neq \emptyset$ , 则称  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$  为决策形式背景  $(G, M, I, T, J)$  面向属性概念格的 II-型决策规则。

$(X, A) \rightarrow (Y, B)$  的直观解释为: 若对象  $x \in G$  具有  $M - A$  中的某个条件属性, 则  $x$  必具有  $T - B$  中的某个决策属性。

**定义 15** 设  $(G, M, I, T, J)$  是一个决策形式背景, 若  $(X, A) \rightarrow (Y, B), (X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1)$  都是面向属性概念格的 II-型决策规则, 且满足  $A \subseteq A_1, B_1 \subseteq B$ , 则称  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$  蕴涵  $(X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1)$ , 记为  $(X, A) \rightarrow (Y, B) \Rightarrow (X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1)$ 。

将决策形式背景  $(G, M, I, T, J)$  的所有面向属性概念格的 II-型决策规则构成的集合记为  $R_p^{\text{II}}(G, M, T)$ 。

**定理 4** 给定决策形式背景  $(G, M, I, T, J)$ , 对于任意  $(X, A) \rightarrow (Y, B) \in R_p(G, M, T), (X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1) \in R_o(G, M, T)$ , 有:

1)  $(X, A) \rightarrow (Y, B) \in R_p(G, M, T)$  当且仅当  $(X^C, A^C) \rightarrow (Y^C, B^C) \in R_o^{\text{II}}(G, M, T)$ 。

2)  $(X_1, A_1) \rightarrow (Y_1, B_1) \in R_o(G, M, T)$  当且仅当  $(X_1^C, A_1^C) \rightarrow$

$(Y_1^C, B_1^C) \in R_p^{\text{II}}(G, M, T)$ 。

**结束语** 基于概念格理论的形式背景属性约简理论与方法是形式概念分析的热门研究问题。本文针对决策形式背景面向属性和面向对象的概念格, 给出了面向属性和面向对象的决策规则, 证明了面向属性的决策规则协调集是其补形式背景的决策规则协调集; 讨论了面向属性和面向对象的决策形式背景的决策规则之间的关系。基于本文的研究结果, 可以进一步讨论面向对象和面向属性的决策规则约简的方法。

#### 参考文献

- [1] WILLE R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts [M] // Rival I, ed. Ordered sets. Dordrecht-Boston; Reidel, 1982: 445-470.
  - [2] GANTER B, WILLE R. Formal Concept Analysis, Mathematic Foundations [M]. Berlin; Springer, 1999.
  - [3] ZHANG W, WEI L, QI J J. Attribute reduction theory and approach to concept Lattice [J]. Science in China Information Sciences, 2005, 48(6): 713-726.
  - [4] LIU M, SHAO M W, ZHANG W X, et al. Reduction method for concept lattices based on rough set theory and its application [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2007, 53(9): 1390-1410.
  - [5] MEDINA J. Relating attribute reduction in formal, object-oriented and property-oriented concept lattice [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2012, 64(6): 1992-2002.
  - [6] DIAS S M, VIEIRA N J. Concept lattices reduction: definition, analysis and classification [J]. Expert Systems with Applications, 2015, 42(20): 7084-7097.
  - [7] WANG X, ZHANG W X. Relations of attribute reduction between object and property oriented concept lattices [J]. Knowledge-Based Systems, 2008, 21(5): 398-403.
  - [8] GEDIGA G, DUNTSCH I. Modal-style operators in qualitative date analysis [C] // Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Data Mining. IEEE, 2002: 155-162.
  - [9] YAO Y Y. A comparative study of formal concept analysis and rough set theory in data analysis [C] // Proceedings of 3rd International Conference on RSCTC'04. Springer Berlin Heidelberg, 2004: 59-68.
  - [10] BELOHLAVEK R, SKLENAR V, ZACPAL J. Crisply generated fuzzy concepts [J]. Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2005, 3403: 269-284.
  - [11] WU W Z, LEUNG Y, MI J S. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts [J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2009, 21(10): 1461-1474.
  - [12] SHAO M W, YANG H Z, WU W Z. Knowledge reduction in formal fuzzy contexts [J]. Knowledge-Based Systems, 2015, 73: 265-275.
  - [13] LI J H, LV Y J, LIANG B M. Algorithm for attribute reduction based on information quantity of concept lattice extension [J]. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(10): 144-146. (in Chinese)
- 李金海, 吕跃进, 梁斌梅. 基于概念格外延信息量的属性约简算法 [J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(10): 144-146.

使得在寻找  $k$  个相似邻居时存在不精准的情况,导致推荐质量不理想。

**结束语** 针对数据的稀疏性,本文引入了非对称信任关系,建立了基于用户信任关系的推荐算法(ATRec)。ATRec首先通过建立的信任传递机制,得到用户的非对称间接信任关系;其次,融合直接和间接信任关系,获取用户的信任集合;最后,利用信任集合、最近邻的信息和好评阈值计算商品的受欢迎程度,进而获取 top-N 推荐列表。在 FilmTrust 和 Epinions 数据集中的实验表明,ATRec 中直接与间接信任用户的影响因子差别不大;而且与目前的主流算法 TRecSo 相比,ATRec 在推荐 top-N 商品的 Precision 上最高可提升 22.1%,而  $F_1$ -measure 略低。本文方法可推广到对称信任关系,并且可以轻松应用于现实场景中,能取得较好的推荐结果。但在推荐本质中,ATRec 倾向于将热门商品推荐给用户,下一步研究工作可能会考虑到冷门商品的推荐,实现推荐结果的多样性。

### 参考文献

- [1] MASSA P, AVESANI P. Trust-aware recommender systems [C]//2007 ACM Conference on Recommender Systems. ACM, 2007:17-24.
- [2] ZHAO W X, LI S, HE Y, et al. Connecting social media to e-commerce: Cold-start product recommendation using microblogging information[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2016, 28(5): 1147-1159.
- [3] ZHOU J, TANG M, TIAN Y, et al. Social network and tag sources based augmenting collaborative recommender system [J]. IEICE Transactions on Information and Systems, 2015, 98(4): 902-910.
- [4] ZHANG H R, MIN F. Three-way recommender systems based on random forests[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91(C): 275-286.
- [5] O'DONOVAN J, SMYTH B. Trust in recommender systems [C]//10th International Conference on Intelligent User Interfaces. ACM, 2005: 167-174.
- [6] DENG A L, ZHU Y Y, SHI B L. A collaborative filtering recommendation algorithm based on item rating prediction[J]. Journal of Software, 2003, 14(9): 1621-1628. (in Chinese)
- [7] 邓爱林, 朱扬勇, 施伯乐. 基于商品评分预测的协同过滤推荐算法[J]. 软件学报, 2003, 14(9): 1621-1628.
- [8] SINHA R R, SWEARINGEN K. Comparing recommendations made by online systems and friends [C]//DELOS-NSF Workshop on Personalization and Recommender Systems in Digital Libraries. 2001.
- [9] MASSA P, BHATTACHARJEE B. Using trust in recommender systems: an experimental analysis[C]//International Conference on Trust Management. Berlin: Springer, 2004: 221-235.
- [10] MA H, ZHOU D, LIU C, et al. Recommender systems with social regularization[C]//Forth International Conference on Web Search & Web Data Mining. DBLP, 2011: 287-296.
- [11] HERLOCKER J L, KONSTAN J A, RIEDL J. Explaining collaborative filtering recommendations [C] // 2000 ACM Conference on Computer Supported Cooperative Work. ACM, 2000: 241-250.
- [12] PARK C, KIM D, OH J, et al. Improving top-K recommendation with trustor and trustee relationship in user trust network[J]. Information Sciences An International Journal, 2016, 374 (C): 100-114.
- [13] PAN R, ZHOU Y, CAO B, et al. One-class collaborative filtering [C]// Eighth IEEE International Conference on Data Mining, 2008(ICDM'08). IEEE, 2008: 502-511.
- [14] RENDLE S, FREUDENTHALER C, GANTNER Z, et al. BPR: Bayesian personalized ranking from implicit feedback [C] // Twenty-fifth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. AUAI Press, 2009: 452-461.
- [15] SHI Y, LARSON M, HANJALIC A. List-wise learning to rank with matrix factorization for collaborative filtering [C]// Fourth ACM Conference on Recommender Systems. ACM, 2010: 269-272.
- [16] ZHAO T, MCAULEY J, KING I. Leveraging social connections to improve personalized ranking for collaborative filtering [C]// 23rd ACM International Conference on Information and Knowledge Management. ACM, 2014: 261-270.
- [17] YAO W, HE J, HUANG G, et al. SoRank: incorporating social information into learning to rank models for recommendation [C] // 23rd International Conference on World Wide Web. ACM, 2014: 409-410.
- (上接第 36 页)
- [14] WEI L, QI J J, ZHANG W X. Attribute reduction theory of concept lattice based on decision formal contexts [J]. Science in China F, 2008, 51(7): 910-923.
- [15] LI J H, MEI C L, LV Y J. Knowledge reduction in decision formal contexts [J]. Knowledge-Based Systems, 2011, 24(5): 709-715.
- [16] LI J H, MEI C L, LV Y J. Knowledge reduction in real decision formal contexts [J]. Information Sciences, 2012, 189(7): 191-207.
- [17] LI J H, MEI M L, WANG J H, et al. Rule-preserved object compression in formal decision contexts using concept lattices [J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 71: 435-445.
- [18] LI J H, LV Y J. Attribute reduction and rules extraction in decision formal context based on concept lattice [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2009, 39(7): 182-188. (in Chinese)  
李金海, 吕跃进. 基于概念格的决策形式背景属性约简及规则提取 [J]. 数学的实践与认知, 2009, 39(7): 182-188.
- [19] SHAO M W, LEUNG Y, WU W Z. Rule acquisition and complexity reduction in formal decision contexts [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2014, 55(1): 259-274.
- [20] LI J J, ZHANG Y L, WU W Z, et al. Attribute reduction for formal context and consistent decision formal context and concept lattice generation [J]. Chinese Journal of Computer, 2014, 37(8): 1768-1774. (in Chinese)  
李进金, 张燕兰, 吴伟志, 等. 形式背景与协调决策形式背景属性约简与概念格生成 [J]. 计算机学报, 2014, 37(8): 1768-1774.